• 31/17 :

$<$

számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest.

$>$

számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest.

1.40.3. Feladat [7]. Adjuk meg a Cantor-halmaz egy monoton növekedő és folytonos leképezését $[0,1]$-re, majd ezt terjesszük ki $[0,1]$-re a monotonitás megtartásával. Mutassuk meg, hogy a kapott leképezés majdnem mindenütt differenciálható és a deriváltja majdnem mindenütt nulla.

1.40.6. Feladat [7]. Adjuk meg a Cantor-halmaz, majd a $[0,1]$ egy folytonos leképezését $[0,1]^2$-re illetve $[0,1]^n$-re.

• 94/8 :

$<$

jelöléseket.

$>$

jelöléseket.

Az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbb{U}_1(0)$, $\mathbb{B}_1(0)$ és $\mathbb{S}_1(0)$ gömböket olyan gyakran használjuk, hogy ezekre külön jelölést vezetünk be: $\mathbb{U}^n$, $\mathbb{B}^n$ és $\mathbb{S}^{n-1}$.

• 96/−14 :

$<$

minden nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként.

$>$

minden nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Az X nyílt halmazainak egy $\mathcal{S}$ rendszerét *szubbázis*nak nevezzük, ha az $\mathcal{S}$-beli halmazok véges metszetei bázist alkotnak. Például $\mathbb{R}$-ben az összes $]a,b[$ nyílt intervallum, ahol $a,b\in\mathbb{R}$, vagy akár csak $a,b\in\mathbb{Q}$, egy bázis, az összes $]-\infty,b[$ és $]a,+\infty[$ nyílt intervallum, ahol $a,b\in\mathbb{R}$, vagy akár csak $a,b\in\mathbb{Q}$, egy szubbázis.

• 107/−16 :

$<$

A kompakt halmazok jelentősége az, hogy a legtöbb átvihető kompakt

$>$

A kompakt halmazok jelentősége az, hogy a legtöbb lokális tulajdonság átvihető kompakt

• 108/4 :

$<$

$\to^*$ **3.85. Feladat: Uriszon-lemma.** Legyen X metrikus tér, $K\subset V\subset X$, ahol K

$>$

$\to^*$ **3.85. Feladat: Uriszon-lemma metrikus terekre.** Legyen X metrikus tér, $K\subset V\subset X$, ahol K

- 109/5 :

$<$

* **3.87. Feladat [14]: Tietze kiterjesztési tétele.** Legyen X metrikus tér, F nem üres zárt részhalmaza X-nek, és legyen $f : F \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $g : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $g|_F = f$ és $\inf f(F) = \inf g(X)$, $\sup f(F) = \sup g(X)$.

$\to$ **3.88. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy metrikus terek szorzata pon-

$>$

$\to$ **3.88. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy véges sok metrikus tér szorzata pon-

- 109/14 :

$<$

$\to$* **3.89. Feladat: Tyihonov tétele [10].** Legyenek (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots$ metrikus

$>$

$\to$* **3.89. Feladat: Tyihonov tétele metrikus terekre [10].** Legyenek (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots$ metrikus

- 111/-5 :

$<$

metrikák egyenletesen, és így topologikusan is ekvivalensek.

* **3.103. Általános topológia.** A topológiával kapcsolatos észrevételek szerint nagyon sok fogalom a nyílt halmazok segítségével definiálható és vizsgálható. Ez az észrevétel vezet a topologikus tér fogalmához: Az $(X, \mathcal{O})$ párt *topologikus tér*nek, $\mathcal{O}$-t *topológiá*nak nevezzük, ha X egy halmaz, $\mathcal{O}$ az X részhalmazainak egy rendszere, amely tartalmazza X-et, és nem vezet ki belőle a véges metszet és a tetszőleges unió képzése. Az $\mathcal{O}$ elemei a tér *nyílt halmaz*ai. Minden (X, d) metrikus tér topologikus tér is, ha a nyílt halmazokat a szokásos módon definiáljuk. A topologikus terek izomorfizmusai a homeomorfizmusok.

Metrikus terek esetén néhány fogalomnál (teljesség, egyenletes folytonosság, stb.) az játszik szerepet, hogy az x és y pontok „ε-közel” vannak ($\varepsilon > 0$), azaz fennáll az $xR_\varepsilon y$ reláció, ahol

$$R_\varepsilon = \big\{(u, v) : d(u, v) < \varepsilon\big\}.$$

Ez az észrevétel az uniform tér fogalmához vezet. Az $(X, \mathcal{U})$ párt *uniform tér*nek, $\mathcal{U}$-t *uniformitás*nak nevezzük, ha X nem üres halmaz, $\mathcal{U}$ pedig X reflexív szimmetrikus relációinak egy rendszere úgy, hogy bármely reláció tartalmazza valamely másik reláció önmagával vett kompozícióját, és bármely két reláció metszete tartalmaz egy harmadik relációt. Ha $R \in \mathcal{U}$ és $(x, y) \in R$, azaz xRy, akkor azt szokás mondani, hogy x és y *R-közel* vannak. Egy metrikus tér a fenti R_ε, $\varepsilon > 0$ relációkkal példa uniform térre. Ha egy uniform térben az

$$\mathcal{O} = \big\{V : V \subset X,\ \text{minden } x \in V\text{-hez van olyan } R \in \mathcal{U}, \text{ hogy } R(x) \subset V\big\}$$

halmazrendszert tekintjük, akkor X topologikus térré válik, így az uniform tér fogalma a metrikus térnél általánosabb, a topologikus térnél speciálisabb.

A topologikus, illetve az uniform terek fogalma sok szempontból természetesebb és kényelmesebben használható, mint a metrikus terek fogalma. Például akárhány X_γ, $\gamma \in \Gamma$ topologikus tér szorzata definiálható, mint a

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma = \big\{f : f : \Gamma \to \cup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, f(\gamma) \in X_\gamma\big\}$$

szorzathalmaz, az összes olyan topológiák metszetével topologizálva, amelyekre az összes $p_\gamma : f \mapsto f(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ projekciók folytonosak. Az X^Γ szorzattopológiájából az $f : \Gamma \to X$ függvények pontonkénti konvergenciája származik. (Még ha X metrikus tér is, általában akkor sem származtatható ez a konvergencia metrikából vagy eltérésből.)

A topologikus és uniform terek fogalma sok célra túl általános. Például nem feltétlenül léteznek bármely két különböző ponthoz őket tartalmazó, diszjunkt, nyílt halmazok. (Legyen $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$; az így kapott tér az *indiszkrét tér*.) A leggyengébb feltétel, amit használni szokás, hogy két különböző ponthoz mindig létezik olyan nyílt halmaz, amely valamelyiket tartalmazza, a másikat meg nem. Az ennek a feltételnek eleget tévő tereket T_0*-ter*eknek nevezzük; a jelölés a német „trennen" szóból ered. (Például $\{0, 1\}$ a $\mathcal{O} = \big\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\big\}$ topológiával T_0-tér; ezt a teret *összefüggő pontpár*nak hívják.) Erősebb feltétel, hogy két különböző ponthoz mindig létezik olyan nyílt halmaz, amely az elsőt tartalmazza, a másodikat nem. Az ilyen tereket T_1*-tér*nek hívják, és a feltétel azzal ekvivalens, hogy az egyelemű halmazok zártak. (Az összefüggő pontpár nem T_1-tér.) Ha azt követeljük meg, hogy különböző pontok nyílt halmazzal szétválaszthatók legyenek, azaz létezzenek diszjunk nyílt halmazok, amelyek közül az egyik az egyik, a másik a másik pontot tartalmazza, akkor a T_2*-tér* vagy *Hausdorff-tér* fogalmához jutunk. A T_3 feltétel azt köti ki, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont nyílt halmazokkal szétválaszthatók, azaz léteznek olyan diszjunkt nyílt halmazok, hogy az egyik a pontot, a másik a zárt halmazt tartalmazza, a T_4 feltétel pedig azt, hogy diszjunkt zárt halmazok nyílt halmazokkal szétválaszthatók, azaz léteznek olyan diszjunkt nyílt halmazok, hogy az egyik az egyik, a másik a másik zárt halmazt tartalmazza. A T_π feltétel bizonyos értelemben a T_3 és T_4 feltétel között fekszik, és azt köti ki, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz van olyan, az egész téren értelmezett folytonos függvény, amely $[0, 1]$-be képez, és a zárt halmazon 0, a pontban pedig 1. Leggyakrabban ezen feltételek kombinációja használatos: a T_3 és T_1 feltételeknek eleget tévő tereket *reguláris*nak, a T_π és T_1 feltételnek eleget tévő tereket *teljesen reguláris*nak, a T_4 és T_1 feltételeknek eleget tévő tereket pedig *normális*nak nevezzük; ezek mind Hausdorff-terek, és a teljesen reguláris terek nyilván regulárisak is. Nevezetes tény az *Uriszon-lemma*, mely szerint normális térben bármely két diszjunkt zárt halmaz folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz van olyan, az egész téren értelmezett folytonos függvény, amely $[0, 1]$-be képez, és az egyik zárt halmazon 0, a másikon pedig 1, így normális tér mindig teljesen reguláris. Egy másik nevezetes tétel *Tyihonov tétele*: kompakt terek szorzata kompakt.

Mint látjuk, a topologikus terek vizsgálatánál számos új fogalmat kell bevezetni, és az ezek közötti finom kapcsolatok vizsgálata időigényes. A fokozatosság elve mellett ez az oka, hogy ebben a jegyzetben metrikus terekre szorítkozunk. Általános topológiával kapcsolatban Hewitt–Stromberg [55] könyvének megfelelő fejezeteit, és Bourbaki [12] művének II. könyvét ajánljuk.

$>$

metrikák egyenletesen, és így topologikusan is ekvivalensek.

- 116/13 :

$<$

rakció, de a négyzete már kontrakció.

$>$

rakció, de a négyzete már kontrakció.

3.117.5. Feladat [7]. Adjunk példát olyan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezésre, amelyre $\big|T(x) - T(y)\big| < |x - y|$, ha $x \neq y$, de nincs fixpontja.

- 116/−16 :

$<$

ra, a $T_i(x) = x$ fixpont problémával. Melyik T_i alkalmas iterációra?

$>$

a $T_i(x) = x$ fixpont problémával. Melyik T_i alkalmas iterációra?

3.118.1. Feladat [9]. Tekintsük az $F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, 2x_1 + x_2 - 1)$ függvény. Legyen

$$T_1(x_1, x_2) = \Big((1 - x_2)/2, \sqrt{1 - x_1^2}\Big), \quad T_2(x_1, x_2) = \Big((1 - x_2)/2, -\sqrt{1 - x_1^2}\Big).$$

Mutassuk meg, hogy a $(-0{,}9, 0{,}9)$ pontból indítva T_1 az $F(x) = 0$ egyenlet egyik, a $(0{,}9, 0{,}9)$ pontból indítva T_2 a másik megoldásához konvergál. Magyarázzuk meg a konvergenciák sebessége közötti különbséget.

- 116/−1 :

$<$

a legkisebb Lipschitz-konstans?

$>$

a legkisebb Lipschitz-konstans?

* **3.121.1. Fixpont tulajdonság.** Az X metrikus teret *fixpont tulajdonság*únak nevezzük, ha X bármely önmagába való folytonos leképezésének van fixpontja. A fixpont-tulajdonság nyilván topológiai tulajdonság.

* **3.121.2. Retraktum.** Egy X metrikus tér egy Y részhalmazára azt mondjuk, hogy az X *retraktuma*, ha van olyan folytonos leképezése X-nek Y-ra, amely Y-on az identitás. Az hogy Y retraktuma X-nek, nyilván topológiai tulajdonság. Például egy Hilbert-tér bármely nem üres zárt konvex részhalmaza bármely nála bővebb halmaznak retraktuma: a retrakciót úgy kapjuk, hogy minden ponthoz a hozzá legközelebbi Y-beli pontot rendeljük.

* **3.121.3. Tétel.** *Ha az X metrikus tér fixpont tulajdonságú és Y retraktuma X-nek, akkor Y is fixpont-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen $r : X \to Y$ egy retrakció. Ha T folytonos leképezése Y-nak önmagába, akkor $T \circ r$ folytonos leképezése X-nek Y-ba. Mivel X fixpont tulajdonságú, és $Y \subset X$, van x fixpont, amelyre $T\big(r(x)\big) = x$. Nyilván $x \in Y$, és így $r(x) = x$, amiből $T(x) = x$.

* **3.121.4. Homotópia, összehúzhatóság.** Az X metrikus teret az Y metrikus térbe képező f_0, f_1 folytonos leképezéseket *egymásba folytonosan átdeformálható*aknak, idegen szóval *homotóp*oknak nevezzük, ha van olyan $h : X \times [0,1] \to Y$ folytonos leképezés, a *homotópia*, amelyre $h(x,0) = f_0(x)$ és $h(x,1) = f_1(x)$ minden $x \in X$-re. (A vektoranalízisben és a komplex függvénytanban használni fogjuk zárt görbék homotópiáját; ez a homotópia általános fogalmának speciális esete, mivel egy zárt görbe $\mathbb{T}$ folytonos leképezésének tekinthető.) Általánosabban, definiálhatjuk a *relatív homotópiá*t: legyen $A \subset X$; az X metrikus teret az Y metrikus térbe képező f_0, f_1 folytonos leképezéseket *A-homotóp*oknak nevezzük, ha van olyan homotópia, amely A-n a leképezést fixen hagyja, azaz van olyan $h : X \times [0,1] \to Y$ homotópia, amelyre $h(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$ minden $x \in A$-ra és $0 \le t \le 1$-re. Az X-et Y-ba képező folytonos függvények A-homotópiája (így homotópiája is, amely az $A = \emptyset$ speciális eset) nyilván ekvivalencia-reláció, így beszélhetünk a függvények homotópia-osztályairól. Azt is könnyű látni, hogy ha f_0 és f_1 A-homotópok, Z is metrikus tér, $B \subset Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$ B-homotópok, $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, akkor $g_0 \circ f_0$ és $g_1 \circ f_1$ A-homotópok. Függvények homotópiája nyilván topologikus fogalom.

Az X metrikus teret (az X egy x_0 pontjára) *összehúzható*nak nevezzük, ha az identikus leképezése homotóp a konstans $f(x) \equiv x_0$ függvénnyel. Az összehúzhatóság nyilván topológiai tulajdonság.

* **3.121.5. Borsuk tétele.** *Legyen C zárt részhalmaza az X metrikus térnek, f_0 és f_1 homotóp leképezései F-nek $\mathbb{S}^n$-be. Ha f_0 kiterjeszthető az X egy folytonos F_0 leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be, akkor f_1 is kiterjeszthető az X egy F_1 folytonos leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be úgy hogy F_0, F_1 homotópok.*

Bizonyítás. Legyen h egy homotópiája f_0-nak f_1-be, és legyen

$$C' = \big\{(x,t) \in X \times [0,1] : \ t = 0 \text{ vagy } x \in C\big\}.$$

A C' halmaz zárt, és a $H'(x,t) = F(x)$, ha $t = 0$ és $H'(x,t) = h(x,t)$, ha $x \in C$ leképezése C'-nek $\mathbb{S}^n$-be folytonos. Megmutatjuk, hogy ez a leképezés kiterjeszthető C' egy nyílt U környezetére; a kiterjesztést jelölje H''. Valóban, $\mathbb{S}^n$ helyettesíthető a $[-1,1]^{n+1}$ tér vele homeomorf határával, és Tietze kiterjesztési tétele szerint ez a leképezés (koordinátánként) kiterjeszthető az egész tér egy $[-1,1]^{n+1}$-be való folytonos leképezésévé. A C' valamely környezetén ez a leképezés nem veszi fel értékként az origót, és $[-1,1]^{n+1}$ határa retraktuma $[-1,1]^{n+1}$ origótól különböző pontjai halmazának. Megmutatjuk, hogy U tartalmaz egy $V \times [0,1]$ alakú halmazt, ahol V egy, a C-t tartalmazó nyílt halmaz. Valóban, minden $x \in C$-re a

$\{x\} \times [0,1]$ kompakt halmaz távolsága U komplementerétől pozitív, így van olyan V_x nyílt környezete x-nek, amelyre $V_x \times [0,1] \subset U$; legyen $V = \cup\{V_x : x \in C\}$. Végül az Uriszon-lemma (vagy a metrikus terekre vonatkozó változata) szerint van olyan $p : X \to [0,1]$ folytonos függvény, amely a C-n 1, a V komplementerén pedig nulla. Legyen $H(x,t) = H''\big(x, tp(x)\big)$ a keresett homotópia és $F_1(x) = H(x,1)$ a keresett kiterjesztése f_1-nek.

* **3.121.6. Tétel.** *Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *$\mathbb{S}^{n-1}$ nem összehúzható;*

(2) *$\mathbb{S}^{n-1}$ nem retraktuma $\mathbb{B}^n$-nek;*

(3) *az $\mathbb{R}^n$ bármely nem üres X kompakt konvex részhalmaza fixpont tulajdonságú (Brouwer-féle fixponttétel);*

(4) *ha $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $r_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ és a*

$$T = \big\{(x_1, \dots, x_n) : |x_j - a_j| \le r_j\big\}$$

tégla

$$T_j^{\pm} = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in T : x_j - a_j = \pm r_j\big\}$$

lapjain valamely $f = (f_1, \dots, f_n) : T \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényre $\pm f_j \ge 0$, akkor a függvény a T téglán felveszi az origót értékként (Miranda közbenső érték tétele).

Mindegyik állítás igaz, és egyiket sem könnyű bebizonyítani. Mi a variációszámítás segítségével fogjuk majd (2)-t bizonyítani. Egy elemi, de nem egyszerű bizonyítás található (1)-re Hurewicz és Wallman [58] könyvében. A (4) állítás egyenletrendszer megoldására használható.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha X összehúzható, akkor X bármely Y retraktuma is összehúzható: valóban, ha r a retrakciója X-nek Y-ra, és h összehúzza X-et x_0-ra, akkor $r \circ h$ összehúzza Y-t $r(x_0)$-ra. Mivel $\mathbb{B}^n$ nyilván összehúzható, de (1) szerint $\mathbb{S}^{n-1}$ nem, $\mathbb{S}^{n-1}$ nem lehet $\mathbb{B}^n$ retraktuma, azaz (1)-ből következik (2). A megfordítás Borsuk tételéből adódik: ha $\mathbb{S}^{n-1}$ összehúzható lenne, akkor $\mathbb{S}^{n-1}$ identikus leképezését kiterjeszthetnénk $\mathbb{B}^n$-nek egy folytonos leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be, azaz (2) nem teljesülne.

A Brouwer-féle fixponttételt (2)-ből először $\mathbb{B}^n$-re bizonyítjuk. Ha létezne olyan $T : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ leképezés, amelynek nincs fixpontja, akkor tudnánk konstruálni $\mathbb{B}^n$-nek egy retrakcióját $\mathbb{S}^{n-1}$-re: minden $x \in \mathbb{B}^n$-re hosszabbítsuk meg a $T(x)$-ből x-be vezető szakaszt amíg metszi $\mathbb{S}^{n-1}$-et. Jelöljük ezt a pontot $r(x)$-el. Az r egy retrakciója $\mathbb{B}^n$-nek $\mathbb{S}^{n-1}$-re. Ha most R elég nagy, akkor az R sugarú, origó középpontú gömb tartalmazza X-et. Mivel X retraktuma $R \cdot \mathbb{B}^n$-nek, X is fixpont tulajdonságú. A megfordítás abból következik, hogy ha $\mathbb{S}^{n-1}$ retraktuma lenne $\mathbb{B}^n$-nek, akkor fixpont tulajdonságú lenne, de nem az: az $x \mapsto -x$ leképezésnek nincs fixpontja.

A Brouwer-féle fixponttételből következik (4): Először tegyük fel, hogy $\pm f_j > 0$ a $T_j^{\pm}$ lapokon ($j = 1, \ldots, n$), és legyen $F_j(x) = x_j - \varepsilon_j f_j(x)$. Ha az $\varepsilon_j > 0$ számok elég kicsik, az F leképezés T-t T-be képezi, így van fixpontja, amely zérushelye f-nek. Egyébként térjünk át az $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon(x - a)$ leképezésre. Ennek van egy x_ε zérushelye T-ben, és a zérushelyekből kiválasztható egy konvergens sorozat. A megfordításhoz legyen $F : T \to T$ egy folytonos leképezés, és $f(x) = x - F(x)$; (4) alkalmazható f-re, és f zérushelye F egy fixpontja.

* **Megjegyzés.** A Brouwer-féle fixponttételnek számos alkalmazása van: egyrészt más fixponttételek bizonyíthatók belőle, másrészt olyan egyenlőtlenségek, amelyeknek fontos játékelméleti (például a *Nash-féle egyensúlypont* létezése, *Neumann minimax tétele*) és közgazdasági alkalmazásaik vannak (a matematikai közgazdaságtan fő tétele), de az is belátható segítségével, hogy $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ nem homeomorfak, ha $m \neq n$. Ezeket a tételeket illetően lásd [147], 77. fejezet. Az alábbi tételt később használjuk majd.

* **3.121.7. Megoldás létezése nemlineáris egyenletrendszerre.** *Legyen $g : \mathbb{B}_R(0) \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, ahol $\mathbb{R}^n$-et egy tetszőleges normával és a szokásos belső szorzattal tekintjük, $\mathbb{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Ha minden $x \in \mathbb{S}_R(0)$-ra $\langle g(x), x \rangle \geq 0$, akkor a $g(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $\mathbb{B}_R(0)$-ban.*

Bizonyítás. Indirekt: Egyébként $f(x) = -Rg(x)/\|g(x)\|$ folytonos leképezése lenne $\mathbb{B}_R(0)$-nak önmagába, amelynek van egy x fixpontja. Erre $\|x\| = R$, de

$$\langle g(x), x \rangle = -\frac{\|g(x)\|}{R} \langle f(x), x \rangle = -\frac{\|g(x)\|}{R} \langle x, x \rangle < 0.$$

* **3.121.8. Dimenzióelmélet.** Ha be akarjuk bizonyítani, hogy két metrikus tér nem homeomorf, akkor nagyon hasznos lehet egy *topológiai invariáns*, valamilyen szám (vagy bármi más) ami homeomorf terekre megegyezik (és lehetőleg könnyen számítható). Egyike a legkorábban bevezetett topológiai invariánsoknak a *dimenzió*.

Egy X halmaz egy $\mathcal{A}$ lefedése a $\mathcal{B}$ lefedés *finomítása*, ha minden $A \in \mathcal{A}$-hez van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $A \subset B$. Egy *lefedés rend*je eggyel kisebb, mint az egy x pontot lefedő halmazok számának a szuprémuma az összes $x \in X$ pontra (-1, ha nincs pont). Egy X metrikus tér $\operatorname{cdim}(X)$ *lefedési dimenzió*ja a legkisebb olyan n egész szám amelyre X minden nyílt lefedésének van olyan finomítása, amelynek a rendje n. Az üres tér dimenziója -1. Két másik dimenziófogalom — az üres tér dimenzióját -1-nek véve — indukcióval definiálható: egy nem üres térre $\operatorname{idim}(X)$ az a legkisebb n természetes szám, amire minden x ponthoz és azt tartalmazó U nyílt halmazhoz van olyan $V \subset U$ nyílt halmaz, amelyre $\operatorname{idim}(\partial V) < n$ (kis induktív dimenzió), $\operatorname{Idim}(X)$ pedig az a legkisebb n természetes szám, amire minden F zárt halmazhoz és azt tartalmazó U nyílt halmazhoz van olyan $F \subset V \subset U$ nyílt halmaz, amelyre $\operatorname{Idim}(\partial V) < n$ (nagy induktív dimenzió). Az elmélet fő eredménye, hogy ezek a (nyilván topologikus) fogalmak szeparábilis metrikus terekben egybeesnek. Csak a szeparábilis metrikus terekben teljesülő fontosabb eredményeket soroljuk fel:

Altér dimenziója legfeljebb annyi, mint a tér dimenziója. Összeg tétel: ha a tér megszámlálható sok legfeljebb n dimenziós zárt altér összege, akkor maga is legfeljebb n dimenziós, ha pedig egy m és egy n dimenziós altér egyesítése, akkor legfeljebb $n+m+1$ dimenziós. Felbontási tétel: egy nem üres, legfeljebb n dimenziós tér felbontható egy legfeljebb 0 és egy legfeljebb $n-1$ dimenziós altérre. Szorzat tétel: két tér szorzatának a dimenziója legfeljebb a dimenziók összege (de lehet kisebb: van két olyan kétdimenziós tér, amelyeknek a szorzata csak három dimenziós). Kiterjesztési tétel: nem üres tér pontosan akkor legfeljebb n dimenziós, ha bármely zárt részhalmazának folytonos leképezése $\mathbb{S}^n$-be kiterjeszthető az egész tér folytonos leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be. Legnehezebb annak bizonyítása, hogy $\mathbb{R}^n$ dimenziója n, ez használja a Brouwer-féle fixponttételt. (Egyébként $\mathbb{R}^n$-ben pontosan a nem üres belsejű halmazok dimenziója n). Az $\mathbb{R}^{2n+1}$ térben létezik univerzális n-dimenziós kompakt halmaz: minden legfeljebb n dimenziós tér homeomorf ennek egy részhalmazával. További nevezetes, $\mathbb{R}^n$-re vonatkozó tételek: legfeljebb $n-2$ dimenziós részhalmaz komplementere összefüggő; $\mathbb{R}^n$ két homeomorf kompakt részhalmazának a komplementere ugyanannyi diszjunkt tartomány egyesítése (ez tartalmazza a Jordan-tételt speciális esetként); $\mathbb{R}^n$ két részhalmazának egy homeomorfizmusa $\mathbb{R}^n$-beli belső pontot $\mathbb{R}^n$-beli belső pontba visz (ez Brouwer nevezetes tartomány-invariancia tétele). Végül két állítás, amely a Hausdorff-dimenzióval való kapcsolatot írja le: ha X topológiai dimenziója n, akkor $\chi^n(X) > 0$, és minden $m > n$ valós számra van olyan X-szel homeomorf Y részhalmaza $[0,1]^{2n+1}$-nek, amelyre $\chi^m(Y) = 0$. A dimenzióelmélettel kapcsolatban bevezetésként Hurewicz és Wallman [58] könyvét ajánljuk, amely ma is jól olvasható, bár első kiadása 1941-ben jelent meg!

- 117/3 :

  <

oldására. Az alábbiakban vázoljuk az alapgondolatot. A különböző fixpont-

  >

olhatóságának bizonyítására, és elsősorban a Banach-féle fixponttétel az egyenletek megoldására is. Az alábbiakban vázoljuk az alapgondolatot. A különböző fixpont-

- 117/14 :

  <

ra, akkor a *módosított Newton-módszer*t kapjuk. Ha előbb az $x = x$ azonos-

  >

ra, akkor a *módosított Newton-módszer*t kapjuk. Ha G az x-től is függ, $G(x)(y) = F'(x)^{-1}(y)$, akkor a *Newton-módszer*t kapjuk. Ha előbb az $x = x$ azonos-

- 117/−6 :

  <

közelítésekből a $\Delta = \Delta_1$ differenciaoperátorral

$$\Delta x_n \approx cq^n(q-1), \qquad \Delta^2 x_n \approx cq^n(q-1)^2,$$

így $(\Delta x_n)^2/\Delta^2 x_n \approx cq^n$, amiből

$$x \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

>
közelítésekből a $\Delta = \Delta_1$ differenciaoperátorral

$$\Delta x_n \approx cq^n(q-1), \quad \Delta x_{n+1} \approx cq^{n+1}(q-1), \quad \Delta^2 x_n \approx cq^n(q-1)^2,$$

így $\Delta x_{n+1}/\Delta x_n \approx q$, továbbá $(\Delta x_n)^2/\Delta^2 x_n \approx cq^n$, amiből

$$x \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

- 120/1 :

<
** **3.139. Feladat: topologikus tér faktortere [10].** Legyen X topologikus tér és $\sim$ egy ekvivalenciareláció X-en. A *topologikus faktortér* alatt az ekvivalenciaosztályok $\tilde{X}$ halmazát értjük, azokat a $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ halmazokat tekintve nyíltnak, amelyekre $\cup\tilde{U}$ nyílt X-ben. Mutassuk meg, hogy ha (X, d) metrikus tér, és $\tilde{d}$ metrika, továbbá $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ nyílt a metrikus faktortérben, akkor $\cup\tilde{U}$ is nyílt X-ben. Mutassuk meg, hogy ha X kompakt és $\tilde{d}$ metrika, akkor a $\tilde{X}$ metrikus faktortérben egy $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $\cup\tilde{U}$ is nyílt X-ben, azaz a metrikus faktortér topológiája megegyezik topologikus faktortér topológiájával. Mutassuk meg, hogy egy pályatér faktormetrikájának (ha létezik faktormetrika) a topológiája mindig a topologikus faktortér topológiája.

>
* **3.138.1. Általános topológia.** A topológiával kapcsolatos észrevételek szerint nagyon sok fogalom a nyílt halmazok segítségével definiálható és vizsgálható. Ez az észrevétel vezet a topologikus tér fogalmához: Az $(X, \mathcal{O})$ párt *topologikus tér*nek, $\mathcal{O}$-t *topológiá*nak nevezzük, ha X egy halmaz, $\mathcal{O}$ az X részhalmazainak egy rendszere, amely tartalmazza X-et, és nem vezet ki belőle a véges metszet és a tetszőleges unió képzése. Az $\mathcal{O}$ elemei a tér *nyílt halmaz*ai. Például ha $\mathcal{O}$ az X összes részhalmazaiból áll, akkor X *diszkrét topológiá*járól beszélünk. A topologikus fogalmak minden topologikus térben definiálva vannak. Minden (X, d) metrikus tér topologikus tér is, ha a nyílt halmazokat a szokásos módon definiáljuk. A topologikus terek izomorfizmusai a homeomorfizmusok.

Ha $\mathcal{O}_1$ és $\mathcal{O}_2$ topológiák az X halmazon, akkor $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{O}_1$ *gyengébb*, mint $\mathcal{O}_2$, illetve, hogy $\mathcal{O}_2$ *erősebb*, mint $\mathcal{O}_1$. Mivel az X-en vett topológiák tetszőleges rendszerének a metszete is topológia, az X részhalmazainak akármilyen $\mathcal{H}$ rendszeréhez a $\mathcal{H}$-t tartalmazó topológiák metszete topológia, amelyet a $\mathcal{H}$ által *generált topológiá*nak nevezünk; ez a leggyengébb topológia, amelyre $\mathcal{H}$ elemei nyíltak. Például egy bázis vagy egy szubbázis generálja a topológiát. Persze, nem akármilyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer bázisa, illetve szubbázisa az általa generált topológiának: könnyű látni, hogy egy halmazrendszer pontosan akkor szubbázisa az általa generált topológiának, ha lefedés, és pontosan akkor bázisa az általa generált topológiának, ha lefedés és $U, V \in \mathcal{H}$, $x \in U \cap V$ esetén van olyan $W \in \mathcal{H}$, hogy $x \in W \subset U \cap V$. Legyen Y_i, $i \in I$ topologikus terek egy családja, $\mathcal{B}_i$ a bázisa, $\mathcal{S}_i$ pedig a szubbázisa az Y_i topológiájának. Ha $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ függvények egy családja, akkor könnyű látni, hogy a leggyengébb topológiának X-en, amelyre minden f_i folytonos, az $f_i^{-1}(S)$, $i \in I$, $S \in \mathcal{S}_i$ halmazok egy szubbázisát, a $\cap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(B_i)$, $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, $B_i \in \mathcal{B}_i$ halmazok pedig bázisát alkotják.

Topológiát megadhatunk a zárt halmazokkal is, hiszen a nyílt halmazok ezek komplementerei; természetesen a zárt halmazok rendszeréből nem vezethet ki a tetszőleges metszet és a véges unióképzés, valamint tartalmaznia kell az üres halmazt. Az X összes részhalmazainak rendszerét önmagába képező $A \mapsto A^\circ$ „belsejeképzéssel" is megadhatjuk a topológiát, amelyre $X^\circ = X$ és $A^\circ \subset A$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ és $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, ha $A, B \subset X$; nem nehéz megmutatni, hogy ez a négy tulajdonság elegendő ahhoz, hogy a leképezés fixpontjai egy topológia nyílt halmazait alkossák. Hasonlóan, az X összes részhalmazainak rendszerét önmagába képező $A \mapsto \overline{A}$ „lezárási operátorral" is megadhatjuk a topológiát, amelyre $\overline{\emptyset} = \emptyset$ és $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, ha $A, B \subset X$; nem nehéz megmutatni, hogy ez a négy tulajdonság elegendő ahhoz, hogy a leképezés fixpontjai egy topologikus tér zárt halmazait alkossák.

A topologikus terek fogalma sok szempontból természetesebb és kényelmesebben használható, mint a metrikus terek fogalma. Az $(X, \mathcal{O})$ topologikus tér bármely Y részhalmaza is topologikus tér, az eredeti tér *alter*e az $\mathcal{O}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$ *altér-topológiá*val. Páronként diszjunkt $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ topologikus terek *összeg*e definiálható az $X = \cup_{i \in I} X_i$ halmazt ellátva az $\cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ (bázis) által generált $\mathcal{O}$ toplógiával. Akárhány X_i, $i \in I$ topologikus tér szorzata definiálható, mint a $\prod_{i \in I} X_i$ szorzathalmaz, az összes olyan topológiák metszetével topologizálva, amelyekre az összes $p_i : x \mapsto x_i$, $i \in I$ projekciók folytonosak. Ha X topologikus tér, az X^I szorzattopológiájából az $x : I \to X$ függvények pontonkénti konvergenciája származik. (Még ha X metrikus tér is, általában akkor sem származtatható ez a konvergencia metrikából vagy eltérésből.) Különösen fontosak a $[0,1]^I$ *Tyihonov-téglá*k. Legyen X topologikus tér és $\sim$ egy ekvivalenciareláció X-en. Az $X/\sim$ *topologikus faktortér* alatt az ekvivalenciaosztályok $\tilde{X}$ halmazát értjük, azokat az $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ halmazokat tekintve nyíltnak, amelyekre $\cup \tilde{U}$ nyílt X-ben. Nyilván az $x \mapsto \tilde{x}$ természetes leképezés folytonos. A kompaktság nyilván „öröklődik" a zárt alterekre, a véges összegekre és a faktorterekre (mert kompakt tér folytonos képe kompakt). Nevezetes tény, hogy a szorzatra is: *Tyihonov tétele* szerint kompakt terek szorzata kompakt; ezt külön bizonyítjuk. A lokális kompaktság nyilván „öröklődik" a nyílt és a zárt alterekre, így a nyílt és zárt halmaz metszeteként előálló alterekre is, a tetszőleges összegre és a véges szorzatra.

A topologikus terek fogalma sok célra túl általános. Például nem feltétlenül léteznek bármely két különböző ponthoz őket tartalmazó, diszjunkt, nyílt halmazok.

(Legyen $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$; az így kapott tér az *indiszkrét tér*.) A leggyengébb feltétel, amit használni szokás, hogy két különböző ponthoz mindig létezik olyan nyílt halmaz, amely valamelyiket tartalmazza, a másikat meg nem. Az ennek a feltételnek eleget tévő tereket T_0-*tereknek* nevezzük; a jelölés a német „trennen" szóból ered. (Például $\{0,1\}$ a $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ topológiával T_0-tér; ezt a teret *összefüggő pontpár*nak hívják.) Erősebb feltétel, hogy két különböző ponthoz mindig létezik olyan nyílt halmaz, amely az elsőt tartalmazza, a másodikat nem. Az ilyen tereket T_1-*tér*nek hívják, és a feltétel könnyen láthatóan azzal ekvivalens, hogy az egyelemű halmazok zártak. (Az összefüggő pontpár nem T_1-tér.) Ha azt követeljük meg, hogy különböző pontok nyílt halmazzal szétválaszthatók legyenek, azaz létezzenek diszjunkt nyílt halmazok, amelyek közül az egyik az egyik, a másik a másik pontot tartalmazza, akkor a T_2-*tér* vagy *Hausdorff-tér* fogalmához jutunk. (Bármely végtelen halmaz a véges részhalmazokkal, mint zárt halmazokkal T_1-tér, de nem T_2-tér.) Könnyen látható, hogy Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt. Ezt felhasználva bármilyen $(X, \mathcal{O})$ Hausdorff-térről beláthatjuk, hogy homeomorf egy kompakt Hausdorff-tér egy alterével: feltehetjük, hogy $\infty \notin X$, legyen $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ az X *egy pont kompaktifikált*ja az X-beli nyílt halmazok és az X-beli kompakt halmazok X_∞-beli komplementereinek rendszerével topologizálva. Könnyű látni, hogy az egy pont kompaktifikált pontosan akkor lesz Hausdorff-tér, ha X lokálisan kompakt.

A T_3 feltétel azt köti ki, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont nyílt halmazokkal szétválaszthatók, azaz léteznek olyan diszjunkt nyílt halmazok, hogy az egyik a pontot, a másik a zárt halmazt tartalmazza (ami nyilván ekvivalens azzal, hogy ha U nyílt, $x \in U$, akkor van olyan V nyílt halmaz, amelyre $x \in V \subset \overline{V} \subset U$), a T_4 feltétel pedig azt, hogy diszjunkt zárt E, F halmazok nyílt halmazokkal szétválaszthatók, azaz léteznek olyan diszjunkt nyílt halmazok, hogy az egyik az egyik, a másik a másik zárt halmazt tartalmazza (ami nyilván ekvivalens azzal, hogy ha F zárt, U nyílt, $F \subset U$, akkor van olyan V nyílt halmaz, amelyre $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$). Például metrikus tér T_4, mert a $\{x : d(x,E) < d(x,F)\}$ és $\{x : d(x,E) > d(x,F)\}$ nyílt halmazok szétválasztják E-t és F-et. A T_π feltétel bizonyos értelemben a T_3 és T_4 feltétel között fekszik, és azt köti ki, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz van olyan, az egész téren értelmezett folytonos f függvény, amely $[0,1]$-be képez, és a zárt halmazon 0, a pontban pedig 1. Nevezetes tény az *Uriszon-lemma*, (külön bizonyítjuk), mely szerint T_4 térben bármely két diszjunkt zárt halmaz folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz van olyan, az egész téren értelmezett folytonos függvény, amely $[0,1]$-be képez, és az egyik zárt halmazon 0, a másikon pedig 1, így további axiómaként ezt nem érdemes felvenni. A T_π feltételből következik T_3 mert az $f^{-1}[0,1/2[$ és $f^{-1}]1/2,1]$ nyílt halmazok szétválasztják a zárt halmazt és a pontot, de a kételemű indiszkrét tér mutatja, hogy sem T_4-ből, sem T_π-ből nem következik még T_0 sem, az összefüggő pontpár pedig, hogy T_4-ből nem következik T_3. Ezért leggyakrabban ezen feltételek kombinációja használatos: a T_3 és T_1 feltételeknek eleget tévő tereket *reguláris*nak, a T_π és T_1 feltételnek eleget tévő tereket *teljesen reguláris*nak vagy *Tyihonov-tér*nek, a T_4 és T_1 feltételeknek eleget tévő tereket pedig *normális*nak nevezzük. A fentiek szerint normális tér teljesen reguláris, teljesen reguláris tér reguláris, és reguláris tér nyilván Hausdorff-tér. Azt sem nehéz belátni, hogy kompakt Hausdorff-tér normális, és ezt felhasználva adódik hogy lokálisan kompakt Hausdorff-tér teljesen reguláris, sőt, bármely kompakt halmaz elválasztható folytonos függvénnyel egy tőle diszjunkt zárt halmaztól. Megjegyezzük, hogy ha $Z = \{1/n : 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$, és $\mathbb{R}$-en azt a topológiát tekinjük, amelynek a $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{Q}$ és vagy $a < b \leq 0$ vagy $0 \leq a < b$ valamint a $]a, b[\setminus Z$, $a, b \in \mathbb{Q}$ és $a < 0 < b$ halmazok alkotják egy bázisát, akkor Hausdorff-teret kapunk, de ebben a térben a Z zárt halmaz és a 0 pont nem választhatók el nyílt halmazokkal. Az is megmutatható, hogy van olyan reguláris tér, amely nem teljesen reguláris, de a konstrukció bonyolult (lásd R. Engelking: Outline of general topology, North-Holland, Amsterdam, 1968] Ch. 2, Example 4.4). Végül az egyik feladatból következni fog, hogy van olyan teljesen reguláris tér, amely nem normális.

Nem nehéz belátni, hogy a T_i, $i \leq \pi$ tulajdonságok „öröklődnek” alterekre, a T_4 tulajdonság zárt alterekre; terek összege pontosan akkor rendelkezik egy T_i, $i \leq 4$ tulajdonsággal, ha mindegyik összeadandó rendelkezik az adott tulajdonsággal; T_i, $i \leq \pi$ tulajdonságú terek szorzata is rendelkezik az adott tulajdonsággal, és ha nem üres terek szorzata rendelkezik egy T_i, $i \leq 4$ tulajdonsággal, akkor minden tényezője is.

A sorozatok nem megfelelőek tetszőleges topologikus terek vizsgálatához. Lehet a sorozat fogalmát általánosítani, vagy szűrőket használni: Egy tetszőleges halmazban egy *szűrő* a halmaz részhalmazainak egy olyan rendszere, amely nem tartalmazza az üres halmazt, zárt a halmazbővítésre és a véges metszetképzésre. Például egy topologikus térben egy adott pont környezetei szűrőt alkotnak. (A pontok környezetszűrőinek megadása meghatározza a topológiát; persze a környezetszűrőket nem adhatjuk meg tetszőlegesen.) Egy szűrőt meghatároz egy olyan részrendszere, amely bármely két eleméhez tartalmaz olyan elemet, amely azok metszetében benne van. Egy szűrőnek egy ilyen részrendszerét *szűrőbázis*nak nevezzük. Egy pont környezetei szűrőjének egy szűrőbázisát a pont *környezetbázis*ának nevezzük. Például a pont összes nyílt környezetei, vagy a tér egy bázisának azok az elemei, amelyek tartalmazzák az adott pontot, környezetbázist alkotnak. Míg metrikus térben az adott középpontú $1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$ sugarú nyílt (vagy zárt) gömbök az adott pont egy megszámlálható környezetbázisát alkotják, tetszőleges topologikus térben nincs feltétlenül megszámlálható környezetbázis: elsősorban ez okozza a sorozatkonvergencia elégtelenségét. Helyette szűrők konvergenciáját használhatjuk: egy szűrő konvergál egy adott ponthoz, ha annak minden környezete benne van a szűrőben.

Mint látjuk, a topologikus terek vizsgálatánál számos új fogalmat kell bevezetni, és az ezek közötti finom kapcsolatok vizsgálata időigényes. A fokozatosság elve mellett ez az oka, hogy ebben a könyvben metrikus terekre szorítkozunk. Általános topológiával kapcsolatban magyarul a kitűnő [122] könyvet, egyébként Hewitt–Stromberg [55] könyvének megfelelő fejezeteit, és Bourbaki [12] művének II. könyvét ajánljuk.

* **3.138.2. Alexander tétele.** *Legyen $\mathcal{S}$ egy szubbázisa az X tér topológiájának.*

Az X tér pontosan akkor kompakt, ha minden $\mathcal{S}$-beli halmazokból álló lefedéséből kiválasztható véges lefedés.

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan nyílt halmazokból álló lefedés, amelyből nem választható ki véges lefedés. Tekintsük az ilyen lefedések rendszerét. Ez féligrendezett a tartalmazásra nézve, és benne minden lánc felülről korlátos, így a Zorn-lemma szerint tartalmaz egy $\mathcal{V}$ maximális lefedést. Legyen $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. Ekkor $\mathcal{W}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le X-et, így $\mathcal{W}$ nem lehet lefedése X-nek. Legyen $x \in X \setminus (\cup \mathcal{W})$ és válasszunk egy $V \in \mathcal{V}$ halmazt, amely lefedi x-et. Mivel $\mathcal{S}$ szubbázis, léteznek $S_1, \dots, S_n$ halmazok $\mathcal{S}$-ből, amelyekre $x \in \cap_{j=1}^n S_j \subset V$. Mivel $x \notin \cup \mathcal{W}$, egyetlen S_j sincs a $\mathcal{V}$-ben. Mivel $\mathcal{V}$ maximális, minden j-re van egy olyan A_j halmaz, amely véges sok $\mathcal{V}$-beli halmaz egyesítése, és amelyre $S_j \cup A_j = X$. Innen

$$V \cup (\cup_{j=1}^n A_j) \supset (\cap_{j=1}^n S_j) \cup (\cup_{j=1}^n A_j) = X,$$

és így X előáll véges sok $\mathcal{V}$-beli halmaz egyesítéseként. Ez ellentmond $\mathcal{V}$ kiválasztásának.

* **3.138.3. Tyihonov tétele.** *Kompakt terek szorzata kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $X = \prod_{i \in I} X_i$ a szóban forgó szorzattér és legyen $\mathcal{S}$ ennek a szorzattopológia definíciójánál leírt szubbázisa. Alexander tételét felhasználva, elég egy $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ lefedést vizsgálni. Legyen minden $i \in I$-re $\mathcal{U}_i$ az összes olyan $U_i \subset X_i$ nyílt halmazok osztálya, amelyekre $p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{U}$, ahol p_i az i-edik projekció. Megmutatjuk, hogy van olyan $i \in I$, amelyre $\cup \mathcal{U}_j = X_j$. Valóban, ha nem ez lenne a helyzet, akkor létezne olyan $x \in X$ pont, amely nem lenne $\cup \mathcal{U}$-ban. Mivel X_j kompakt, létezik véges sok $U_{j,1}, \dots, U_{j,n}$ halmaz $\mathcal{U}_i$-ben, amelyre $X_j = \cup_{k=1}^n U_{j,k}$. Nyilván $p_j^{-1}(U_{j,k})$, $k = 1, 2, \dots, n$ egy véges lefedése X-nek.

* **3.138.4. Tétel.** *Megszámlálható bázisú T_3-tér T_4-tér is.*

Bizonyítás. Legyenek E és F diszjunkt zárt halmazok X-ben. Minden $x \in E$-hez létezik a megszámlálható bázisnak olyan U_x eleme, amelyre $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset X \setminus F$ és minden $y \in F$-hez létezik a megszámlálható bázisnak olyan V_y eleme, amelyre $y \in V_y \subset \overline{V_y} \subset X \setminus E$. Legyen $\cup_{x \in E} U_x = \cup_{n=1}^\infty U_{x_n}$ és $\cup_{y \in F} V_y = \cup_{n=1}^\infty V_{y_n}$. Legyen $G_n = U_{x_n} \setminus \cup_{k \le n} \overline{V_{y_k}}$ és $H_n = V_{y_n} \setminus \cup_{k \le n} \overline{U_{x_k}}$, és legyen $G = \cup_{n=1}^\infty G_n$, $H = \cup_{n=1}^\infty H_n$. Mivel $G_i \cap V_{y_j} = \emptyset$, ha $j \le i$, azt kapjuk, hogy $G_i \cap H_j = \emptyset$, ha $j \le i$. Hasonlóan adódik, hogy $H_j \cap G_i = \emptyset$, ha $i \le j$. Innen $G \cap H = \emptyset$ és $E \subset G$, $F \subset H$.

* **3.138.5. Feladat: Uriszon-lemma [14]:** Legyen X egy T_4 tér, E és F diszjunkt zárt részhalmazai X-nek.

(1) Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re az $r \in R = \{k/2^n : n = 0, 1, \dots; k = 01, \dots, 2^n\}$ diadikusan racionális számokhoz léteznek olyan $V(r)$ nyílt halmazok, amelyekre $E \subset V(0) \subset \overline{V(0)} \subset V(1) = X \setminus F$ és

$$\overline{V(k/2^n)} \subset V\big((2k+1)/2^{n+1}\big) \subset \overline{V\big((2k+1)/2^{n+1}\big)} \subset V\big((k+1)/2^n\big),$$

ha $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

(2) Legyen $f(x) = \inf\{1, r \in R : x \in V(r)\}$ és mutassuk meg, hogy $f : X \to [0,1]$ folytonos függvény, amely szétválasztja az E és F halmazokat.

* **3.138.6. Feladat: Tietze kiterjesztési tétele [14]:** Legyen X egy T_4 tér, F zárt részhalmaza X-nek, $I = [-1,1]$ és legyen $f : F \to [-1,1]$ folytonos függvény.

(1) Teljes indukcióval adjunk meg olyan $g_0, g_1, \ldots$ és $h_1, h_2, \ldots$ folyonos függvényeket, amelyekre

$$g_n : X \to \left[-1 + (2/3)^n, 1 - (2/3)^n\right],$$

$$h_n : X \to \left[-2^{(n-1)}/3^n, 2^{(n-1)}/3^n\right],$$

$g_n = g_{n-1} + h_n$ és $\left|f(x) - g_n(x)\right| \le (2/3)^n$.

(2) Mutassuk meg, hogy létezik olyan $g : X \to I$ folytonos függvény, amelyre $g|_F = f$.

(3) Mutassuk meg, hogy az állítás akkor is érvényben marad, ha I nem üres félig zárt, illetve nyílt intervallum.

* **3.138.7. Feladat: az egység felbontása [8].** Általánosítsuk az egység felbontását T_4-térre, illetve lokálisan kompakt Hausdorff-térre.

** **3.138.8. Feladat [12].** Legyen $\mathbb{R}$-en $\mathcal{O}_{[[}$ az a szokásosnál erősebb topológia, amelynek az $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú halmazok alkotják egy bázisát. Mutassuk meg, hogy

(1) $\mathbb{Q}$ sűrű ebben a térben, így a tér szeparábilis;

(2) a megadott bázisnak nincs olyan megszámlálható $[a_n, b_n[$ részrendszere, amely bázis lenne, mert ezen halmazok közül az x pontot tartalmazók csak akkor alkothatják egy környezetbázisát x-nek, ha $x = a_n$ valamely n-re;

(3) a topológiának nincs megszámlálható bázisa;

(4) ha E zárt halmaz, akkor azon E-beli pontok F halmaza, amely belső pontja a komplementernek a szokásos topológiában, megszámlálható;

(5) ha F megszámlálható halmaz, akkor választva minden racionális végpontú nyílt intervallumból egy $\mathbb{R} \setminus F$-beli pontot, egy, a szokásos topológiában sűrű halmazt kapunk;

(6) az $]a, b[$, $a, b \in D$ és $[a, b[$, $a \in F$, $b \in D$ halmazok egy, a szokásosnál erősebb, de $\mathcal{O}_{[[}$-nél gyengébb $\mathcal{O}$ topológia megszámlálható bázisát alkotják;

(7) az $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ tér reguláris, és így normális;

(8) ha E_1 és E_2 diszjunkt zárt halmazok $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{[[})$-ben, akkor a (4) szerint hozzájuk tartozó F_1, F_2 megszámlálható halmazok F uniójához tartozó $\mathcal{O}$ topológiában is zártak, így szétválaszthatók $\mathcal{O}$-beli nyílt halmazokkal;

(9) az $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{[[})$ tér normális;

(10) az $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{[[})$ tér önmagával vett szorzata szeparábilis, így kontinuum sok folytonos leképezése létezik $[0,1]$-be;

(11) a szorzattérben a $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ halmaz minden részhalmaza zárt;

(11) a $\{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ halmaz egy adott részhalmazán 0-nak, az erre a halmazra vonatkozó komplementerén 1-nek definiált függvények folytonosak, de „túl sokan vannak” ahhoz, hogy mindegyik folytonosan kiterjeszthető legyen a szorzattér egy $[0,1]$-be való folytonos leképezésévé, így a szorzattér nem lehet normális.

** **3.139. Feladat: faktorterek [10].** Mutassuk meg, hogy ha (X,d) metrikus tér, és $\tilde{d}$ metrika, továbbá $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ nyílt a metrikus faktortérben, akkor $\cup\tilde{U}$ is nyílt X-ben. Mutassuk meg, hogy ha X kompakt és $\tilde{d}$ metrika, akkor az $\tilde{X}$ metrikus faktortérben egy $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $\cup\tilde{U}$ nyílt X-ben, azaz a metrikus faktortér topológiája megegyezik topologikus faktortér topológiájával. Mutassuk meg, hogy egy pályatér faktormetrikájának (ha létezik faktormetrika) a topológiája mindig a topologikus faktortér topológiája.

** **3.140. Feladat: öröklődés faktorterekre [14].** Mutassuk meg, hogy ha $\sim$ egy ekvivalencia-reláció az X topologikus téren, amelyhez tartozó természetes leképezés zárt, azaz minden zárt halmazt zártba visz, akkor

(1) ha X normális, akkor $\tilde{X} = X/\!\sim$ is normális;

(2) ha X kompakt Hausdorff-tér, akkor $\tilde{X}$ is az;

(3) ha az ekvivalencia-osztályok kompaktak és X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, akkor $\tilde{X}$ is az.

* **3.141. Uniform terek.** Metrikus terek esetén néhány fogalomnál (teljesség, egyenletes folytonosság, stb.) az játszik szerepet, hogy az x és y pontok „ε-közel” vannak ($\varepsilon > 0$), azaz fennáll az $xR^d_\varepsilon y$ reláció, ahol

$$R^d_\varepsilon = \{(u,v) : d(u,v) < \varepsilon\}.$$

Ez az észrevétel az uniform tér fogalmához vezet. Az $(X,\mathcal{U})$ párt *uniform tér*nek, $\mathcal{U}$-t *uniformitás*nak nevezzük, ha X nem üres halmaz, $\mathcal{U}$ pedig X reflexív relációiból álló szűrő úgy, hogy bármely reláció tartalmazza valamely reláció önmagával vett kompozícióját, és bármely reláció tartalmazza valamely relációt inverzét. Persze, az $\mathcal{U}$ szűrő egy bázisával is megadható. Például könnyű látni, hogy az $\mathcal{U}$-beli szimmetrikus relációk $\mathcal{U}$ egy bázisát adják. Ha $R \in \mathcal{U}$ és $(x,y) \in R$, azaz xRy, akkor azt szokás mondani, hogy x és y *R-közel* vannak. Egy metrikus tér a fenti R^d_ε, $\varepsilon > 0$ relációkkal példa uniform térre. Sokkal általánosabban, ha d_i, $i \in I$ eltérések egy tetszőleges családja X-en, akkor az $R^{d_i}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $i \in I$ relációk véges metszetei egy uniformitás egy bázisát alkotják; ez a d_i, $i \in I$ *eltéréscsaládból származó uniformitás*. Ha egy uniform térben az

$$\mathcal{O} = \{V : V \subset X,\ \text{minden } x \in V\text{-hez van olyan } R \in \mathcal{U}\text{, hogy } R(x) \subset V\}$$

halmazrendszert tekintjük, akkor X topologikus térré válik, így az uniform tér fogalma a topologikus térnél speciálisabb. Ha az uniformitásból származó topológia T_0, akkor T_2 is, ugyanis mint könnyen látható, mindkettő azzal ekvivalens, hogy

$\cap_{R\in\mathcal{U}} R = \mathbb{I}_X$. Megmutatható, hogy már az $X \times X$ topologikus térben nyílt, illetve zárt szimmetrikus relációk is bázisát alkotják az uniformitásnak. Egy X uniform tér egy Y részhalmaza is uniform tér az $R \cap Y \times Y$, $R \in \mathcal{U}$ relációkkal, ez az uniform tér *uniform altere*. Könnyű látni, hogy az altér-uniformitásból az altér-topológia származik.

Legyenek $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ uniform terek. Egy $f : X \to Y$ leképezést *egyenletesen folytonos*nak nevezünk, ha minden $S \in \mathcal{V}$ relációhoz van olyan $R \in \mathcal{U}$ reláció, hogy ha x és y R-közel vannak X-ben, akkor $f(x)$ és $f(y)$ S-közel vannak Y-ban. Az uniform terek izomorfiái a kölcsönösen egyértelmű és inverzükkel együtt egyenletesen folytonos leképezések. Legyen X tetszőleges halmaz, $(Y_i,\mathcal{V}_i)$, $i \in I$ uniform terek, $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ pedig leképezések indexelt családja. Az összes olyan X feletti uniform struktrúrák metszete, amelyekre minden f_i, $i \in I$ egyenletesen folytonos, egy uniform struktúra X-en. Ha $\mathcal{B}_i$ az $\mathcal{U}_i$ egy bázisa, akkor ennek egy bázisa az összes $\Big\{(x,y) \in X \times X : \big(f_i(x), f_i(y)\big) \in S_i \in \mathcal{B}_i\Big\}$ alakú relációk véges metszeteiből áll. Akárhány X_i, $i \in I$ uniform tér szorzata definiálható, mint a $\prod_{i\in I} X_i$ szorzathalmaz, az összes olyan uniformitások metszetével ellátva, amelyekre az összes $p_i : x \mapsto x_i$, $i \in I$ projekciók egyenletesen folytonosak. Könnyű látni, hogy a szorzat-uniformitásból a szorzat-topológia származik.

* **3.142. Feladat [13].** Tegyük fel, hogy V az X uniform tér egy relációja. Mutassuk meg, hogy

(1) létezik szimmetrikus környékeknek egy $V_1, V_2, \ldots$ sorozata, hogy $V_1 \subset V$ és $V_{n+1}^3 \subset V_n$ minden n-re;

(2) ha $h(x,y) = \inf\{1, 2^{-n} : (x,y) \in V_n\}$ és

$$d(x,y) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} h(z_{i-1}, z_i) : n \in \mathbb{N}, z_0, z_1, \ldots, z_n \in X, x = z_0, y = z_n\Big\},$$

akkor d eltérés;

(3) $\frac{1}{2}h(x,y) \le d(x,y) \le h(x,y)$, így $y \notin V(x)$-re $d(x,y) \ge \frac{1}{2}$;

(4) uniform tér T_π-tér;

(5) bármely uniform struktúra származtatható eltéréscsaládból;

(6) egy uniform struktúra pontosan akkor származtatható egyetlen eltérésből, ha megszámlálható bázisú;

(7) egy Hausdorff uniform struktúra pontosan akkor származtatható metrikából, ha megszámlálható bázisú.

* **3.144. Feladat: Tyihonov beágyazási tétele [13].** Legyen X topologikus tér, és legyen Φ az X-et $[0,1]$-be képező folytonos leképezések egy halmaza.. Mutassuk meg, hogy

(1) az $x \in X$-hez a $\varphi \mapsto \varphi(x)$, ha $\varphi \in \Phi$ kiválasztási függvényt rendelő J leképezés egy $J : X \to [0,1]^\Phi$ folytonos leképezés, amelyre $\varphi = p_\varphi \circ J$;

(2) ha X egy T_π-tér, és Φ az összes, X-et $[0,1]$-be képező folytonos függvények halmaza, akkor az összes $W_\varphi = \varphi^{-1}[0,1[$ halmazok X egy bázisát alkotják;

(3) ha Φ az összes, X-et $[0,1]$-be képező folytonos függvények halmaza, akkor az a leggyengébb $\mathcal{U}$ uniformitás $[0,1]^\Phi$-n, amelyre minden $\varphi \in \Phi$ egyenletesen folytonos, akkor $\mathcal{U}$-ból $[0,1]^\Phi$ szorzattopológiája származik;

(4) minden T_π-tér uniformizálható;

(5) ha X teljesen reguláris, és Φ az X-et $[0,1]$-be képező folytonos függvények egy olyan halmaza, amelyre a $W_\varphi = \varphi^{-1}[0,1[$ halmazok X egy bázisát alkotják, akkor a J leképezés homeomorfizmusa X-nek $J(X) \subset [0,1]^\Phi$-re;

(6) egy topologikus tér pontosan akkor teljesen reguláris, ha homeomorf egy kompakt Hausdorff-tér egy alterével;

(7) egy teljesen reguláris tér pontosan akkor megszámlálható bázisú, ha homeomorf $[0,1]^{\mathbb{N}}$ egy alterével;

(8) a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tér homeomorf a Hilbert-kockával;

(9) megszámlálható bázisú reguláris tér metrizálható;

(10) kompakt Hausdorff-tér pontosan akkor megszámlálható bázisú, ha metrizálható.

- 122/−17 :

$<$

és abszolútérték-homogén.

$>$

és abszolútérték-homogén.

* **4.4.5. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy normált tér pontosan akkor nem szeparábilis, ha található benne nemmegszámlálható sok páronként diszjunkt 1 sugarú gömb.

- 127/1 :

$<$

* **4.21. Feladat [6].** Legyenek a *Bernoulli-polinom*ok a $B_0 \equiv 1$, $B_1(x) = x - 1/2$, $B_n' = B_{n-1}$, $\int_0^1 B_n = 0$, ha $n > 1$ összefüggések által definiálva. Bizonyítsuk be, hogy

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k},$$

ahol a b_k számok a *Bernoulli-számBernoulli-szám*ok. lenyelMegoldas Kiszámoljuk.

* **4.22. Feladat: Euler összegzési formulája [12].** Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény $2m+1$-szer differenciálható az $[1,n]$ intervallumon, $f^{(2m+1)}$ integrálható,

akkor

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(1)+f(n)\big)$$
$$+\sum_{j=1}^{m} B_{2j}(0)\left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(1)\right)$$
$$+\int_1^n B_{2m+1}\left(x-\lfloor x\rfloor\right) f^{(2m+1)}(x)\,dx,$$

ahol a B_i függvények a Bernoulli-polinomok. (Ez a formula jól alkalmazható véges vagy végtelen összegek közelítésére.)

$>$

* **4.21. Feladat** [8]. Legyenek a *Bernoulli-polinom*ok a $B_0 \equiv 1$, $B_n' = B_{n-1}$, $\int_0^1 B_n = 0$, ha $n > 0$ összefüggések által definiálva. Bizonyítsuk be, hogy

$$n!B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k},$$

ahol az (n-től független) b_k számok a Bernoulli-számok. Mutassuk meg, hogy $b_0 = 1$ és

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0,$$

ha $n > 1$.

* **4.22. Feladat: Euler összegzési formulája** [**12**]. Bizonyítsuk be, hogy ha $m > 0$, az f függvény m-szer differenciálható az $[1, n]$ intervallumon, $f^{(m)}$ integrálható, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(1)-f(n)\big)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}(-1)^j B_j(0)\left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(1)\right)$$
$$+(-1)^{m+1}\int_1^n B_m\left(x-\lfloor x\rfloor\right) f^{(m)}(x)\,dx,$$

ahol a B_j függvények a Bernoulli-polinomok. (Ez a formula jól alkalmazható véges vagy végtelen összegek közelítésére.)

- $127/-13$:

$<$

* **4.24. Feladat: Stirling-formula** [**12**]. Bizonyítsuk be a *Stirling-formulá*t:

$$n! = \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\,e^{\frac{1}{12n}+c_n}, \quad \text{ahol} \quad |c_n| \le \frac{1}{2n^2}.$$

$>$

* **4.24. Feladat: Stirling-formula [12].** Bizonyítsuk be a *Stirling-formulát*:

$$n! = \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\,e^{\frac{1}{12n}-c_n}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le c_n \le \frac{1}{180n^3}.$$

- $127/-6$:

$<$

fogalommmal. Végtelen dimenziós térben egy másik, tisztán algebrai bázis

$>$

fogalommal. Végtelen dimenziós térben egy másik, tisztán algebrai bázis

- $132/4$:

$<$

nyilván $\mathcal{C}(X;Y) = \mathcal{B}(X;Y) = \mathcal{K}(X;Y)$.

$>$

nyilván $\mathcal{C}(X;Y) = \mathcal{B}(X;Y) = \mathcal{K}(X;Y)$.

* **4.45.5. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy

$$K = \big\{ f \in \mathcal{C}[0,1] : f(0) = 0, \mathrm{Lip}(f) \le 1 \big\}$$

kompakt.

- $136/13$:

$<$

(2) $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$;

$>$

(2) $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$;
(2.5)$x_n = (1/n, 2/n, \dots, n/n, 0, 0, \dots)$;

- $136/-11$:

$<$

altereként fogjuk tekinteni. Ezen terek szokásos jelölése c_0 illetve c.

$>$

altereként fogjuk tekinteni. Ezen terek szokásos jelölése $\mathbf{c}_0$ illetve $\mathbf{c}$.

$\rightarrow$ **4.66.5. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy a

$$H = \big\{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbf{l}^2 : x_i \in \mathbb{R}, |x_i| \le 1/i \big\}$$

Hilbert-kocka kompakt részhalmaza $\mathbf{l}^2$-nek.

$\rightarrow$ **4.66.7. Feladat [7].** Adjuk meg $[0,1]$ egy folytonos leképezését a Hilbert-kockára.

- 141/8 :

$<$

mes kommutatív Banach-algebrára.

$>$

mes kommutatív Banach-algebrára. Egységelemes algebrában definiálható egy x elem $\sigma(x)$ *spektruma*, mint azon $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárok halmaza, amelyekre $x - \lambda e$-nek nem létezik multiplikatív inverze, valamint az $r(x)$ *spektrálsugara*, mint a spektrum elemei abszolút értékeinek szuprémuma. Csak a $\mathbb{C}$ feletti egységelemes Banach-algebrák fontosak.

- 141/−10 :

$<$

(6) $f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt.$

$>$

(6) $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - 2x(1/2);$

(7) $f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt.$

- 142/12 :

$<$

veszi fel.

$>$

veszi fel.

5.16.5. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy a

$$(Tx)(s) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{sgn}(s-t)\,dt$$

összefüggés $\mathcal{C}[-1,1]$-et önmagába képező folytonos lineáris operátort definiál és határozzuk meg a normáját.

- 142/15 :

$<$

$p = 1, 2, \infty$ esetén.

$>$

$p = 1, 2, \infty$ esetén.

5.17.5. Feladat [12]. Általánosítsuk az előző feladatot $\mathbb{L}^p(\mu) \to \mathbb{L}^{p'}(\mu)$ típusú lineáris leképezésekre, ahol $p, p' \in \{1, 2, \infty\}$.

- 142/−11 :

<

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.18.5. Feladat [7]. Határozzuk meg a

$$T : (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \mapsto (x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)$$

összefüggéssel definiált $T : \mathbf{l}^2 \to \mathbf{l}^2$ operátor normáját, ahol $x_j \in \mathbb{R}$.

- 142/−4 :

<

(4) ha $e - xy$-nak van multiplikatív inverze, akkor $e - yx$-nek is.

>

(4) ha $e - xy$-nak van multiplikatív inverze, akkor $e - yx$-nek is.

5.20.2. Feladat [10]. Legyen X a $[0, 1]$ intervallumon definiált k-szor folytonosan differenciálható komplex értékű függvények $\mathbb{C}$ feletti algebrája. Mutassuk meg, hogy

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \sup_{0 \le t \le 1} \left| x^{(j)}(t) \right|$$

norma, amellyel X egységelemes komplex Banach-algebra.

5.20.4. Feladat [12]. Legyen X egységelemes normált algebra. Mutassuk meg, hogy ha $x, y \in X$, akkor $xy - yx \neq e$.

** **5.20.6. Feladat [17].** Legyen X egységelemes komplex Banach-algebra. Mutassuk meg, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$-re

(1) $\sigma(\alpha x) = \alpha\sigma(x)$;

(2) $r(\alpha x) = |\alpha| r(x)$;

(3) $r(x) \le \|x\|$;

(4) $\sigma(x)$ zárt halmaz;

(5) $\sigma(x)$ nem üres;

(6) $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_n \|x^n\|^{1/n}$;

(7) $r(x^n) = r(x)^n$;

(8) $r(x) < 1$ pontosan akkor, ha $x^n \to 0$;

(9) ha x invertálható, $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$, akkor $\sigma(x) \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$;

(10) ha p polinom, akkor $\sigma\big(p(x)\big) = p\big(\sigma(x)\big)$; ha $0 \notin p\big(\sigma(x)\big)$ és q egy másik polinom, akkor $p(x)^{-1}q(x) = q(x)p(x)^{-1}$ létezik és $t(x)$-szel jelölve $t\big(\sigma(x)\big) = \sigma\big(t(x)\big)$.

Mutassuk meg, hogy bármely $x, y \in X$-re

(11) ha x-nek van multiplikatív inverze, akkor $\sigma(xy) = \sigma(yx)$;

(12) $\sigma(xy)$ és $\sigma(yx)$ egybeesnek $\{0\}$ komplementerén;

(13) $r(xy) = r(yx)$;

(14) ha $xy = yx$, akkor $r(x + y) = r(x) + r(y)$ és $r(xy) = r(x)r(y)$.

Mutassuk meg, hogy ha X kommutatív, akkor $x \mapsto r(x)$ folytonos.

5.20.7. Feladat [8]**.** Legyen X egységelemes komplex Banach-algebra és

$$b = \inf_{x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}.$$

Mutassuk meg, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$-re

$$b \leq \inf_{x \neq 0} \frac{r(x)}{\|x\|} \leq \sqrt{b}.$$

5.20.8. Feladat [8]**.** Legyen X egységelemes komplex Banach-algebra. Mutassuk meg, hogy

(1) ha $x \in X$-nek van y jobbinverze, akkor minden $x' \in X$-nek, amelyre $\|x' - x\| < 1/\|y\|$, szintén van jobbinverze;

(2) ha $x_n \in X$-nek van y_n jobbinverze, $x_n \to x$ és y_n korlátos, akkor x-nek is van jobbinverze.

5.20.9. Feladat [8]**.** Legyen Y az X egységelemes komplex Banach-algebra egy zárt részalgebrája ugyanazzal az egyséelemmel. Mutassuk meg, hogy ha $x \in Y$, akkor $\sigma_X(x) \subset \sigma_Y(x)$ és $\sigma_X(x)$ tartalmazza $\sigma_Y(x)$ minden határpontját.

- 148/15 :

  $<$

$i\mathcal{C}(X; \mathbb{C})$-ben.

  $>$

$i\mathcal{C}(X; \mathbb{C})$-ben.

** **5.32.1. Feladat** [8]**:** Általánosítsuk az előző három tételt kompakt Hausdorff-térre.

- 151/−19 :

  $<$

  Bizonyítás. Legyen $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$, és alkalmazzuk a tételt.

* **5.42. Második konjugált tér.** Bármely X normált térre X^* Banach-tér. Képezhetjük a további konjugált tereket is: $X^{**} = (X^*)^*$, $X^{***} = (X^{**})^*$, stb. Az X és X^{**} között fontos kapcsolat van: ha $x \in X$ rögzített, legyen $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$. A definícióból azonnal adódik, hogy F_x lineáris funkcionál X^*-on. F_x korlátos is, mert $\left|F_x(f)\right| = \left|f(x)\right| \le \|f\|\|x\|$, amiből következik, hogy $\|F_x\| \le \|x\|$. Továbbá a Hahn–Banach-tétel következménye miatt van olyan $f \in X^*$, amelyre $\|f\| = 1$, és $f(x) = \|x\|$. Erre az f-re $\left|F_x(f)\right| = \|x\|$, így $\|F\| = \|x\|$. Így az $x \mapsto F_x$ leképezése X-nek X^{**}-ba normatartó, tehát izometria. Ezt a leképezést az X normált tér X^{**}-ba való *természetes leképezés*ének nevezzük. A definíció alapján azonnal következik, hogy a természetes leképezés lineáris. Ha a természetes leképezés X^{**}-ra képez, akkor X-et *reflexív*nek nevezzük. Természetesen ekkor X Banach-tér kell legyen.

* **5.43. Gyenge konvergencia:** Ha X tetszőleges halmaz, Y metrikus tér, (vagy általánosabban, ha topologikus tér), az Y^X függvénytérben és ennek altereiben értelmezve van a függvénysorozatok pontonkénti konvergenciája. (Ez a konvergencia származik a szorzattopológiából.) Ha $Y = \mathbb{K}$ és X normált tér $\mathbb{K}$ felett (általánosabban, ha topologikus vektortér), akkor a folytonos lineáris funkcionálok terén ezt a konvergenciát *gyenge* konvergenciá*nak (egyes szerzők gyenge konvergenciának) szokták nevezni, a topológiát, amiből származik, pedig *gyenge* topológiá*nak. Jelentőségét az adja, hogy egy X normált tér X^* konjugált terének egységgömbjét ebben a topológiában tekintve az kompakt, és ha X szeparábilis volt, akkor metrizálható is. Ezt a konvergenciát használva a normából származó konvergencia helyett, elkerülhető azoknak a nehézségeknek egy része, amelyek a variációszámításban és a parciális differenciálegyenleteknél az egységgömb kompaktságának hiánya okoz. Ezért vezette be Hilbert ezt a konvergenciát.

Ha X Hilbert-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján X^* elemeit X elemeivel azonosíthatjuk, és így a gyenge* topológiát átmásolhatjuk X-re. Általánosabban, ha X normált tér, a következőképpen járhatunk el. Minden $x \in X$-hez hozzárendelünk egy $F_x \in X^{**}$ lineáris funkcionált az $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$ összefüggéssel. A Hahn–Banach-tétel következménye szerint az $x \mapsto F_x$ leképezés lineáris izometrikus beágyazása X-nek X^{**}-ba. Így X minden eleme egy X^*-on értelmezett funkcionálnak tekinthető, és X^{**} elemeinek pontonkénti konvergenciája (és a topológia, amiből származik) átmásolható X-re. Ezt a konvergenciát *gyenge konvergenciá*nak, a topológiát, amiből származik, *gyenge topológiá*nak szokás nevezni. Ha az $x \mapsto F_x$ leképezés az X^{**}-ra képez le, akkor X-et reflexívnek nevezzük, és X-et X^{**}-gal azonosíthatjuk. Reflexív terek esetén (speciálisan Hilbert-tereknél) a gyenge és gyenge* topológia megegyezik.

A gyenge és gyenge* topológiák vizsgálatával a topologikus vektorterek elmélete foglalkozik. A legegyszerűbb tényeket illetően lásd Losonczi [83] jegyzetét. Részletes hivatkozások találhatók Zeidler [147] könyvében. Megjegyezzük, hogy a lineáris operátorok terében is fontos a pontonkénti konvergencia, amelyet néha erős konvergenciának szokás nevezni.

$>$

Bizonyítás. Legyen $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$, és alkalmazzuk a tételt.

- 153/−9 :

$<$

hogy $x = tx_0 + a$-ra $t > 0$ esetén $f(x) > d$, holott $|t| < \varepsilon$ esetén $x \in A + \mathbb{U}_\varepsilon(0)$.

$>$

hogy $x = tx_0 + a$-ra $t > 0$ esetén $f(x) > d$, holott $|t| < \varepsilon$ esetén $x \in A + \mathbb{U}_\varepsilon(0)$.

* **5.44.1. Definíció:** Ha X normált tér, akkor $Y \subset X$ *annullátor*a az

$$^{\perp}Y = \big\{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ minden } x \in Y\text{-ra}\big\}$$

halmaz, ami nyilván zárt lineáris altér. Ha $Y \subset X^*$, akkor Y *annulláltj*a az

$$Y^{\perp} = \big\{x \in X : f(x) = 0 \text{ minden } f \in Y\text{-ra}\big\}$$

halmaz, ami nyilván zárt lineáris altér.

* **Tétel:** *Ha X normált tér, $Y \subset X$, akkor $^{\perp}(X^{\perp})$ az Y lineáris burkának a lezártja.*

Bizonyítás. Minden $f \in X^{\perp}$ nulltere zárt és tartalmazza Y-t, tehát Y lineáris burkának a lezártja része a metszetüknek. Így csak azt kell észrevennünk, hogy ha x nincs az Y lineáris burkának Z lezártjában, akkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan $c \in \mathbb{R}$ és f valós lineáris folytonos funkcionál, hogy $f(Z) \leq c < f(x)$; mivel $f(Z)$ az $\mathbb{R}$ altere, $f(Z) = \{0\}$ és $0 < f(x) \neq 0$, így $x \notin {}^{\perp}(Y^{\perp})$. Ha X komplex tér, tekintsük az $f(x) - if(ix)$ funkcionált.

* **5.44.2. Tétel:** *Ha X normált tér és X^* szeparábilis, akkor X is.*

Bizonyítás. Legyen $f_n \in X^*$ egy megszámlálható sűrű halmaz, és válasszunk minden n-re egy $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ elemet, amelyre $|f_n(x_n)| > \|f_n\|/2$. Megmutatjuk, hogy az x_n-ek lineáris burka sűrű X-ben. Az előző tétel szerint elég azt megmutatnunk, hogy ha egy $f \in X^*$ lineáris funkcionál nulla minden x_n-en, akkor nulla mindenütt. Tegyük fel, hogy nem, és van olyan $f \in X^*$, amelyre $f(x_n) = 0$ minden n-re, de $\|f\| = 1$. Mivel az f_n-ek sűrű halmazt alkotnak, van olyan f_n, amelyre $\|f - f_n\| < 1/3$. De ekkor $1/3 > \big|(f - f_n)(x_n)\big| = \big|(f_n(x_n)\big| > 1/2$.

* **5.44.3. Második konjugált tér.** Bármely X normált térre X^* Banach-tér. Képezhetjük a további konjugált tereket is: $X^{**} = (X^*)^*$, $X^{***} = (X^{**})^*$, stb. Az X és X^{**} között fontos kapcsolat van: ha $x \in X$ rögzített, legyen $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$. A definícióból azonnal adódik, hogy F_x lineáris funkcionál X^*-on. F_x korlátos is, mert $\big|F_x(f)\big| = \big|f(x)\big| \leq \|f\|\|x\|$, amiből következik, hogy $\|F_x\| \leq \|x\|$. Továbbá a Hahn–Banach-tétel következménye miatt van olyan $f \in X^*$, amelyre $\|f\| = 1$, és $f(x) = \|x\|$. Erre az f-re $\big|F_x(f)\big| = \|x\|$, így $\|F_x\| = \|x\|$. Így az $F : x \mapsto F_x$ leképezése X-nek X^{**}-ba normatartó, tehát izometria. Ezt az F leképezést

az X normált tér X^{**}-ba való *természetes leképezésének* nevezzük. A definíció alapján azonnal következik, hogy a természetes leképezés lineáris. Ha a természetes leképezés X^{**}-ra képez, akkor X-et *reflexívnek* nevezzük. Természetesen ekkor X Banach-tér kell legyen. Egy reflexív tér konjugált tere is reflexív: ha $G : f \mapsto G_f$ az X^* természetes leképezése X^{***}-ba, akkor tetszőleges $g \in X^{***}$ az értékkészletben van, mert az $f(x) = g(F_x)$ funkcionálra $G_f(F_x) = F_x(f) = f(x)$. Nyilvánvaló példák reflexív terekre a Hilbert-terek. Feladatként szerepelt az is, hogy az $\mathbb{L}^p$-terek reflexívek $1 < p < \infty$ esetén, konjugált terük $\mathbb{L}^q$, ahol $1/p + 1/q = 1$. Példa nem reflexív térre $\mathcal{C}[0,1]$: minden $x \in [0,1]$-re az $f \mapsto f(x)$ funkcionálok a konjugált térben vannak, és távolságuk páronként 2, így a konjugált tér nem szeparábilis, tehát az előző tétel szerint a tér nem lehet reflexív. Az $\mathbf{l}^1$ tér sem reflexív, mert konjugált tere $\mathbf{l}^\infty$, ami nem szeparábilis. Ugyancsak nem reflexívek a $\mathbf{c}_0$ és $\mathbf{c}$ terek, mert konjugált terük $\mathbf{l}^1$, amint az nemsokára belátjuk.

* **5.44.4. Tétel:** *Ha Y az X reflexív Banach-tér zárt lineáris altere, akkor Y is reflexív.*

Bizonyítás. Az $f \mapsto f|_Y$ leképezés a Hahn–Banach-tétel szerint X^*-ot Y^*-ra képezi. Tetszőleges $\alpha \in Y^{**}$-ra legyen $\beta(f) = \alpha(f|_Y)$. Mivel X reflexív, ez az eleme X^{**}-nak előáll F_x alakban valamely $x \in X$-re, ahol F a természetes leképezése X-nek X^{**}-ra, azaz $\beta(f) = f(x)$. Megmutatjuk, hogy $x \in Y$. Mivel minden $f \in Y^\perp$-re $f(x) = 0$, azt kapjuk, hogy x az Y lineáris burkának a lezártjában van.

* **5.44.5. Következmény:** *Ha X Banach-tér és X^* reflexív, akkor X is.*

Bizonyítás. Mivel X^* reflexív, X^{**} is. A $J : X \to X^{**}$ természetes beágyazás izometria, így $J(X)$ zárt altere a reflexív X^{**} térnek, így reflexív, azaz X is reflexív.

- 155/5 :

  <

amiből következik az állítás.

* **5.50. Tétel.** *Ha az $y = (y_1, y_2, \dots)$ számsorozatra bármely $x = (x_1, x_2, \dots)$ konvergens sorozat esetén a $\sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ sor konvergens, akkor $y \in \mathbf{l}^1$, azaz $\sum_{k=1}^\infty |y_k| < \infty$, és $f(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ korlátos lineáris funkcionál a konvergens sorozatok terén, amelynek normája $\|f\| = \|y\|_1$.*

>

amiből következik az állítás.

* **5.49.1. Gyenge és gyenge* topológia.** Ha X tetszőleges halmaz, Y metrikus tér, (vagy általánosabban, ha topologikus tér), az Y^X függvénytérben és ennek altereiben értelmezve van a függvénysorozatok pontonkénti konvergenciája. (Ez a konvergencia származik a szorzattopológiából.) Ha $Y = \mathbb{K}$ és X normált tér $\mathbb{K}$ felett (általánosabban, ha topologikus vektortér), akkor a folytonos lineáris funkcionálok terén ezt a konvergenciát — tehát a pontonkénti konvergenciát — *gyenge* konvergenciának* (egyes szerzők gyenge konvergenciának) szokták nevezni. A szorzattopológia megszorítása X^*-ra úgy is megadható, mint az összes olyan topológiák

metszete, amelyekre minden $f \mapsto f(x)$, $x \in X$ függvény folytonos; ezt *gyenge* topológiá*nak nevezzük. Ebből a topológiából a gyenge* konvergencia származik. Jelentőségét a *Banach–Alaoglu-tétel* adja: egy X Banach-tér X^* konjugált terének egységgömbjét ebben a topológiában tekintve az kompakt (megmutatható, hogy ha X szeparábilis volt, akkor metrizálható is). Ezt a konvergenciát használva a normából származó konvergencia helyett, elkerülhető azoknak a nehézségeknek egy része, amelyek a variációszámításban és a parciális differenciálegyenleteknél az egységgömb kompaktságának hiánya okoz. Ezért vezette be Hilbert ezt a konvergenciát.

Ha X Hilbert-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján X^* elemeit X elemeivel azonosíthatjuk, és így a gyenge* topológiát átmásolhatjuk X-re. Általánosabban, ha X normált tér, akkor X-nek X^{**}-ba való F természetes leképezése izometria, amely minden $x \in X$-hez hozzárendel egy $F_x \in X^{**}$ lineáris funkcionált az $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$ összefüggéssel. Így X minden eleme egy X^*-on értelmezett funkcionálnak tekinthető, és X^{**} elemeinek pontonkénti konvergenciája (és a topológia, amiből származik) átmásolható X-re. Ezt a konvergenciát *gyenge konvergenciá*nak, a topológiát, amiből származik, *gyenge topológiá*nak szokás nevezni. Nyilván reflexív terek esetén (speciálisan Hilbert-tereknél) a gyenge és gyenge* topológia megegyezik.

A gyenge és gyenge* topológiák vizsgálatával a topologikus vektorterek elmélete foglalkozik. A legegyszerűbb tényeket illetően lásd Losonczi [83] jegyzetét. Részletes hivatkozások találhatók Zeidler [147] könyvében. Megjegyezzük, hogy a lineáris operátorok terében is fontos a pontonkénti konvergencia, amelyet néha erős konvergenciának szokás nevezni.

* **5.49.2. Feladat [9]:** Bizonyítsuk be a *Banach–Alaoglu-tétel*t: egy X normált tér X^* konjugált terének egységgömbje a gyenge* topológiában kompakt.

* **5.49.3. Feladat [9]:** Mutassuk meg, hogy egy X szeparábilis normált térre X^* egységgömbjén a gyenge* topológia metrizálható.

* **5.49.4. Gyenge és gyenge* konvergencia.** Ha X normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a gyenge és gyenge* topológiáról mondottak szerint egy $x_n \in X$ sorozat *gyengén konvergál* $x \in X$-hez, jelölésben $x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$, ha $f(x_n) \to f(x)$ minden $f \in X^*$-ra, és egy $f_n \in X^*$ sorozat *gyenge* konvergál* $f \in X^*$-hoz, jelölésben $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, ha $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re. Egy példa: Hilbert-térben egy végtelen ortonormált sorozat gyengén konvergál nullához. A gyenge és gyenge* konvergencia jelentőségét a kiválasztási tételek adják.

* **5.49.5. Feladat: kiválasztási tétel gyenge* konvergenciára [9]:** Bizonyítsuk be, hogy ha X szeparábilis normált tér, akkor minden korlátos $f_n \in X^*$ sorozatnak van gyenge* konvergens részsorozata.

* **5.49.6. Kiválasztási tétel gyenge konvergenciára:** *Ha x_n egy korlátos sorozat egy X reflexív Banach-térben, akkor van olyan részsorozata, amely gyengén konvergál.*

Ez a tulajdonság jellemzi is a reflexív Banach-tereket, ez Eberlein (1947) és Šmuljam (1940) tétele; lásd Yosida [144], V. fejezet.

Bizonyítás. Legyen Y az x_n-ek lineáris burkának a lezártja. Mivel X reflexív, Y is, és mivel Y szeparábilis, Y^* is. Legyen f_n az Y^* egy megszámlálható sűrű részhalmaza. A diagonális eljárással kiválasztható olyan $z_n = x_{j_n}$ részsorozata az x_n sorozatnak, amelyre minden k-ra $f_k(z_n)$ konvergál valamely $\alpha_k \in \mathbb{K}$-hoz, ha $n \to \infty$. Innen bármely $f \in Y^*$-ra $f(z_n) - f(z_m)$ kicsi, ha n, m elég nagyok, azaz $f(z_n)$ Cauchy-sorozat, tehát konvergál valamely $\alpha(f) \in \mathbb{K}$-hoz. Az α funkcionál nyilván lineáris és $\big|\alpha(f)\big| \le \|f\| \sup_n \|x_n\|$. Mivel Y reflexív, van olyan $x \in Y$, hogy $\alpha(f) = f(x)$ minden $f \in Y^*$-ra, azaz $f(x_n) \to f(x)$. Mivel minden $f \in X^*$ megszorítása Y-ra az Y^* egy eleme, ez minden $f \in X^*$-ra is teljesül.

* **5.49.7. Egyenletes konvexség:** Az X normált teret *lokálisan egyenletesen konvexnek* nevezzük, ha minden $x \in X$, $\|x\| \le 1$ eleméhez és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $y \in X$-re, amelyre $\|y\| \le 1$ és $\|x + y\| \ge 2 - \delta$, teljesül, hogy $\|x - y\| \le \varepsilon$. Ha δ az x-től függetlennek választható, akkor azt mondjuk, hogy a tér *egyenletesen konvex*. A Hilbert-terek nyilván egyenletesen konvexek a paralelogramma-azonosság miatt. Megmutatható, hogy $1 < p < \infty$ esetén az $\mathbb{L}^p$ tér is egyenletesen konvex. A lokálisan egyenletes konvexségből következik a szigorú konvexség. Megmutatható, hogy egy reflexív Banach-térben mindig bevezethető egy, az eredeti normával ekvivalens norma, amelyre X és X^* már lokálisan egyenletesen konvexek. (Kadec (1959) és Troyanski (1971) tétele.)

* **5.49.8. A gyenge konvergencia alaptulajdonságai:** *Legyen X Banach-tér, $x_n \in X$. Ekkor*

(1) ha $x_n \to x$, akkor $x_n \rightharpoonup x$;

(2) ha X véges dimenziós és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $x_n \to x$;

(3) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor x_n korlátos és $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} x_n$;

(4) ha X lokálisan egyenletesen konvex, $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \to \|x\|$, akkor $x_n \to x$ (Radon–Riesz-tulajdonság);

(5) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor a $\{x_n\}$ halmaz zárt konvex burkában van olyan y_n sorozat, hogy $y_n \to x$ (Mazur tétele);

(6) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor x a $\{x_n\}$ halmaz zárt konvex burkában van;

(7) ha x_n korlátos és van olyan $D \subset X^*$ sűrű halmaz, hogy $f(x_n) \to f(x)$ minden $f \in D$-re, akkor $x_n \rightharpoonup x$;

(8) ha X reflexív és $f(x_n)$ konvergál minden $f \in X^*$-ra, akkor van olyan x, hogy $x_n \rightharpoonup x$;

(9) ha x_n minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely egy adott x-hez konvergál gyengén, akkor $x_n \rightharpoonup x$;

(10) ha $x_n \rightharpoonup x$ és $f_n \to f$ az X^*-ban, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$;

(11) ha X reflexív, $x_n \to x$ és $f_n \rightharpoonup f$ az X^*-ban, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$.

Bizonyítás. (1) és (2) triviálisak, (3) az egyenletes korátosság tétele következményének speciális esete. (4) Nyilvánvaló, ha $x = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor legyen $y = x/\|x\|$ és $y_n = y_n/\|y_n\|$ valahonnan kezdve. Ekkor $\|y\| = \|y_n\| = 1$, $y_n \rightharpoonup y$, és (3) szerint, mivel $y_n + y \rightharpoonup 2y$,

$$2 = \|2y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|y_n + y\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|y_n + y\| \leq 2,$$

így $\|y_n + y\| \to 2$, ahonnan következik az állítás. (5)-höz legyen C az x_n-ek zárt konvex burka. Tegyük fel indirekt, hogy $d(x, C) > 0$. Ekkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan f valós folytonos lineáris funkcionál és $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(C) \leq c < f(x)$, ami ellentmondás; a komplex esetben használjuk az $f(x) - if(ix)$ funkcionált. (6) nyilván következik (5)-ből. (7) következik a Banach–Steinhaus-tételből. (8)-hoz legyen $\alpha(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, ha $f \in X^*$; α nyilván lineáris és az egyenletes korlátosság tételének következménye szerint korlátos is, azaz $\alpha \in X^{**}$. Mivel X reflexív, $\alpha(f) = f(x)$ valamely $x \in X$-re, és $x_n \rightharpoonup x$. (9)-et indirekt bizonyítjuk: ha nem lenne igaz, akkor létezne olyan $f \in X^*$ és $\varepsilon > 0$, amelyre $\big|f(x_{n_k}) - f(x)\big| \geq \varepsilon$ teljesülne valamely részsorozatra. (10) és (11) nyilvánvalóak, mivel a gyenge konvergenciából következik a korlátosság.

* **5.49.9. Feladat [6]:** Bizonyítsuk be, hogy reflexív Banach-téren zárt konvex halmaztól való távolság felvétetik.

* **5.49.10. A gyenge* konvergencia alaptulajdonságai:** *Legyen X Banach-tér, $f_n \in X^*$. Ekkor*

(1) ha $f_n \to f$, akkor $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(2) ha $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, akkor f_n korlátos és $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} f_n$;

(3) ha f_n korlátos és van olyan $D \subset X$ sűrű halmaz, hogy $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in D$-re, akkor $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(4) ha minden $x \in X$-re $f_n(x)$ konvergál minden, akkor van olyan f, hogy $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(5) ha $x_n \rightharpoonup x$ az X-ben és $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$.

Bizonyítás. Minden úgy bizonyítható, mint a gyenge konvergencia esetében.

* **5.50. Tétel.** *Ha az $y = (y_1, y_2, \dots)$ számsorozatra bármely $x = (x_1, x_2, \dots)$ nullsorozat esetén a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ sor konvergens, akkor $y \in \mathbf{l}^1$, azaz $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$, és $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ korlátos lineáris funkcionál a $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{l}^\infty$ tereken, amelynek normája $\|f\| = \|y\|_1$.*

- 155/−14 :

<

nevezzük. Például az $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ sorozat Cesaro-limesze 1/2.

>

nevezzük. Például az $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ sorozat Cesaro-limesze $1/2$. Ez az $r = 1$ speciális esete az r-ed rendű Cesaro-limesznek ($r > -1$), ahol

$$a_{j,k} = \frac{\binom{j-k+r-1}{j-k}}{\binom{r}{j}}.$$

Az r-ed rendű Hölder-limesz mátrixa a Casaro-limesz márixának r-edik hatványa ($r \in \mathbb{N}$).

- 155/−9 :

  $<$

  5.52. Toeplitz tétele. *Az előző definíció jelöléseivel, az A mátrixszal*

  $>$

  5.52. Töplitz tétele. *Az előző definíció jelöléseivel, az A mátrixszal*

- 156/15 :

  $<$

éppen (3)-at adják.

  $>$

éppen (3)-at adják.

Feladat [9]. Alkalmazzunk Casaro- és Hölder-féle limitálási eljárásokat az alábbi sorok részletösszegeire. Hasonlítsuk össze az eredményeket az Abel folytonossági tétele segítségével kapott határértékekkel.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$;
(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$;
(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$;
(4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$.

Feladat: Tauber tétele [11]. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegei Cesaro-limitálhatók és $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, akkor a sor konvergens.

- 164/−0 :

  $<$

  $>$

5.73. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy a

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(t)\,dt$$

összefüggés zárt lineáris operátort definiál $\mathcal{C}[0,1]$-en.

5.74. Feladat [2]. Adjunk meg $\mathbf{l}^2$-n olyan normát, amely nem ekvivalens az eredetivel.

- 166/−3 :

$<$

tosan akkor Hilber-tér, ha minden H_j Hilber-tér.

$>$

tosan akkor Hilber-tér, ha minden H_j Hilber-tér.

6.5.5. Feladat [6]. Legyenek $\big(H_j, \langle\ .\ \rangle_j\big)$, $j \in J$ belső szorzat terek,

$$H = \Big\{x \in \times_{j\in J} H_j : \sum_{j\in J} \|x_j\|^2 < \infty\Big\}$$

és legyen $\langle x, y\rangle = \sum_{j\in J} \langle x_j, y_j\rangle_j$. Mutassuk meg, hogy H belső szorzat tér, a *belső szorzat terek szorzata*, és H pontosan akkor Hilbert-tér, ha minden H_j Hilbert-tér.

- 173/−8 :

$<$

rendszert.

$>$

rendszert.

6.32.2. Feladat [8]. Ortonormáljuk $\mathbb{L}^2[-1, 1]$-ben az $1, x, x^2$ függvényrendszert.

6.32.4. Feladat [9]. Ortonormáljuk a megadott függvényrendszert a megadott súlyfüggvényre a megadott intervallumon:

(1) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty[$;

(2) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$;

(3) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = \sin \pi x$, $x \in [0, 1]$.

6.32.6. Feladat [9]. Határozzuk meg az alábbi távolságokat:

(1) x távolsága x^2, x^3 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0, 1]$-ben;

(2) 1 távolsága $\sin x, \cos x$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[-\pi, \pi]$-ben;

(3) x^3 távolsága $1, x, x^2$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0, 1]$-ben;

(4) x^3 távolsága x, x^2 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0, 1]$-ben.

6.32.8. Feladat [9]. Fejtsük sorba a Legendre-polinomok szerint a $\sin \pi x$ függvényt $\mathbb{L}^2[-1, 1]$-ben.

* **6.32.9. Feladat [17].** Legyen φ_n, $n = 1, 2, \ldots$ egy teljes ortonormált rendszer egy H Hilbert-térben, és ψ_n egy ortonormált rendszer H-ban. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|^2 < \infty$. Mutassuk meg, ψ_n is teljes.

- 174/2 :

$<$

ortogonális alterei, akkor $M+N$ is zárt altér.

$\rightarrow$ **6.36. Feladat** [7]**.** Igazoljuk, hogy az alábbi függvények korlátos lineáris funkcionálok $\mathbb{L}^2[0,1]$-en, és határozzuk meg a normájukat:

(1) $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin t\,dt$;

(2) $f(x)=\int_0^{1/2} tx(t^2)\,dt$;

(3) $f(x)=\int_0^1 x(t)(t-1/2)\,dt$.

$\rightarrow$ **6.37. Feladat** [9]**.** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi funkcionálok az egész $\mathbf{l}^2$-n értelmezhetők-e, folytonosak-e, lineárisak-e, és határozzuk meg a normájukat ($x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in\mathbf{l}^2$):

(1) $f(x)=\sum_{k=1}^\infty \xi_k\sin k$;

(2) $f(x)=\sup_k|\xi_k|$;

(3) $f(x)=\xi_n$;

(4) $f(x)=\xi_{n+1}-\xi_n$;

(5) $f(x)=\sum_{k=1}^\infty \xi_{k^2}$;

(6) $f(x)=\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2$.

$>$

ortogonális alterei, akkor $M+N$ is zárt altér.

6.35.3. Feladat [7]**.** Mutassuk meg, hogy az $M=\{x=(\xi_1,0,\xi_2,0,\dots)\in\mathbf{l}^2\}$ és $N=\{y=(\eta_1,\eta_1,\eta_3,\eta_3/3,\dots)\in\mathbf{l}^2\}$ alterek összege nem $\mathbf{l}^2$, de sűrű $\mathbf{l}^2$-ben.

6.35.6. Feladat [7]**.** Mutassuk meg, hogy ha M_γ, $\gamma\in\Gamma$ zárt alterek egy rendszere egy H Hilbert-térben, akkor

$$\Big(\cap_{\gamma\in\Gamma}M_\gamma\Big)^\perp=\overline{\cup_{\gamma\in\Gamma}M_\gamma^\perp}$$

és

$$\Big(\cup_{\gamma\in\Gamma}M_\gamma\Big)^\perp=\cap_{\gamma\in\Gamma}M_\gamma^p erp$$

$\rightarrow$ **6.36. Feladat** [7]**.** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi funkcionálok az egész $\mathbb{L}^2[0,1]$-en értelmezhetők-e, folytonosak-e, lineárisak-e, és határozzuk meg a normájukat:

(1) $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin t\,dt$;

(2) $f(x)=\int_0^{1/2} tx(t^2)\,dt$;

(3) $f(x)=|x(1/2)|$;

(4) $f(x)=x'(1/2)$;

(5) $f(x)=\int_0^1 x(t)(t-1/2)\,dt$;

(6) $f(x)=\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}x(e^{-t})\,dt$.

$\rightarrow$ **6.37. Feladat** [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi funkcionálok az egész $\mathbf{l}^2$-n értelmezhetők-e, folytonosak-e, lineárisak-e, és határozzuk meg a normájukat ($x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbf{l}^2$):

(1) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k$;

(2) $f(x) = \sup_k |\xi_k|$;

(3) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$;

(4) $f_n(x) = \xi_n$;

(5) $f_n(x) = \xi_{n+1} - \xi_n$;

(6) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \operatorname{sgn}(k-n)$;

(7) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{k^2}$;

(8) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$.

6.37.3. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy ha φ_n, $n = 1, 2, \dots$ zárt rendszer $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben, akkor

$$\Phi_0 \equiv 1, \quad \Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\, dt$$

lineáris burka sűrű $\mathcal{C}[0,1]$-ben.

6.37.6. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, $f(t+1) = f(t)$, ha $t \geq 0$, $f(t) = -f(t + 1/2)$, ha $0 < t < 1/2$, és $\int_0^1 f^2(t)\, dt < \infty$, akkor $\varphi_n(t) = f(2^n t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ortogonális rendszer $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben.

- $191/-13$:

$<$

Ha T nem feltétlenül korlátos, de sűrű halmazon van definiálva, akkor azon

$>$

Ha $T \in X \rightarrow Y$ lineáris, nem feltétlenül korlátos, de sűrű halmazon van definiálva, akkor azon

- $191/-9$:

$<$

(A kiterjesztés egyértelműségéhez szükséges, hogy $\operatorname{dmn}(T)$ sűrű legyen H-ban.) Könnyű kiszámolni, hogy $T^* \in Y \rightarrow X$ lineáris operátor; T^* a T *adjungált*ja. Nyilvánvaló, hogy ha T korlátos, akkor T^* mindenütt értelmezve van. Az is nyilvánvaló, hogy ha $T \subset S$, akkor $S^* \subset T^*$. Ha $TT^* = \mathbb{I}$ és $T^*T = \mathbb{I}$, akkor T-t *unitér*nek nevezzük.

$>$

(A kiterjesztés egyértelműségéhez szükséges, hogy $\operatorname{dmn}(T)$ sűrű legyen X-ben.) Könnyű kiszámolni, hogy $T^* \in Y \rightarrow X$ lineáris operátor; T^* a T *adjungált*ja. Nyilvánvaló, hogy ha T korlátos, akkor T^* mindenütt értelmezve van. Az is nyilvánvaló, hogy ha $T \subset S$, akkor $S^* \subset T^*$. Ha $T^*T = \mathbb{I}_X$ és $TT^* = \mathbb{I}_Y$, akkor T-t *unitér*nek nevezzük.

- 193/19 :

$<$

$\mathcal{L}(H;H)$, ahol H egy komplex Hilbert-tér, az adjungáltképzéssel.

$>$

$\mathcal{L}(H;H)$, ahol H egy komplex Hilbert-tér, az adjungáltképzéssel. Ha egy $*$-algebra egy x elemére $x = x^*$ illetve $xx^* = x^*x$, akkor x-et *önadjungált*nak illetve *normális*nak nevezzük. Ha egy egységelemes $*$-algebra egy x elemére $xx^* = x^*x = e$, akkor azt mondjuk, hogy x *unitér*. Csak az egységelemes B*-algebrák fontosak.

- 193/-17 :

$<$

zetének utolsó fejezetét.

$>$

zetének utolsó fejezetét.

* **7.33.5. Feladat** [**7**]**.** Legyen X egy egységelemes B*-algebra. Mutassuk meg, hogy

(1) $e^* = e$;

(2) tetszőleges $x \in X$-re $\|x^*\| = \|x\|$;

(3) tetszőleges $x \in X$-re $x_r = (x + x^*)/2$ és $x_i = (x - x^*)/(2i)$ önadjungáltak és $x = x_r + ix_i$;

(4) ha x invertálható, akkor x^* is és $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$;

(5) ha x normális, akkor $r(x) = \|x\|$.

- 193/-5 :

$<$

perátor.

$>$

perátor.

* **7.34.5. Feladat** [**8**]**.** Legyen H Hilbert-tér és $P, Q \in \mathcal{L}(H;H)$ önadjungált projekció. Mutassuk meg, hogy

(1) PQ pontosan akkor önadjungált projekció, ha $PQ = QP$;

(2) $P + Q$ pontosan akkor önadjungált projekció, ha $PQ = 0$;

(3) az előző feltétel azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{rng}(P) \perp \mathrm{rng}(Q)$;

(4) $P - Q$ pontosan akkor önadjungált projekció, ha $PQ = Q$;

(3) az előző feltétel azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{rng}(Q) \subset \mathrm{rng}(P)$.

- 194/8 :

$<$

(2) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ *bármely* $x, y \in H$*-ra;*

(3) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\|Ux\| = \|x\|$ *bármely* $x \in H$*-ra.*

$>$

(2) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$, *U lineáris és $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ bármely $x, y \in H$-ra;*

(3) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$, *U lineáris és $\|Ux\| = \|x\|$ bármely $x \in H$-ra.*

- 194/8 :

$<$

7.37. Tétel. *Legyen X komplex Hilbert-tér. Ha a $T \in \mathcal{L}(H; H)$ operátor önadjungált, akkor a spektruma valós. Ha T nemnegatív operátor, akkor*

$>$

* **7.36.5. Feladat [14].** Mutassuk meg, hogy az előző tétel feltételei akkor is ekvivalensek, ha X, Y valós Hilbert-terek, valamint ekkor (és csak ekkor) ekvivalensek az alábbi feltétellel:

(4) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$, $U(0) = 0$ és U távolságtartó.

7.37. Tétel. *Legyen H komplex Hilbert-tér. Ha a $T \in \mathcal{L}(H; H)$ operátor önadjungált, akkor a spektruma valós. Ha $T \in \mathcal{L}(H; H)$ nemnegatív operátor, akkor*

- 195/15 :

$<$

becslésből pedig, hogy inverze mindenütt értelmezett korlátos operátor.

$>$

becslésből pedig, hogy inverze mindenütt értelmezett korlátos operátor.

$\to$ **7.37.5. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, akkor $T \in \mathcal{L}(H; H)$ pontosan akkor önadjungált, ha $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ minden $x \in H$-ra.

- 197/−8 :

$<$

$x(0) = x(1)$, vagy az $x(0) = x(1) = 0$ peremfeltételt kielégítő függvényei. Mindhárom esetben vizsgáljuk meg, hogy az operátor szimmetrikus-e, határozzuk meg a lezártját, az adjungáltját, és annak az adjungáltját.

$>$

$x(0) = x(1)$, vagy az $x(0) = x(1) = 0$, végül az $\big|x(0)\big| = \big|x(1)\big| \neq 0$ peremfeltételt kielégítő függvényei. Mindhárom esetben vizsgáljuk meg, hogy az operátor szimmetrikus-e, határozzuk meg a lezártját, az adjungáltját, és annak az adjungáltját. Ugyanezt az operátort vizsgáljuk az $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tér $\mathcal{K}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ alterén értelmezve, illetve az $\mathbb{L}^2\big([0, \infty[; \mathbb{C}\big)$ tér $\mathcal{K}\big([0, \infty[; \mathbb{C}\big)$ alterén értelmezve, illetve ezen altér $x(0) = 0$ feltételnek eleget tevő függvényein értelmezve.

$\to$ **7.54.5. Feladat [8].** Egy H Hilbert-tér egy M zárt altere *invariáns* egy $T \in \mathcal{L}(H; H)$-ra, ha $T(M) \subset M$. Az M *redukál*ja T-t, ha M és $M^\perp$ is invariáns T-re. Bizonyítsuk be, hogy

(1) M pontosan akkor invariáns T-re, ha $M\perp$ invariáns T^*-ra;

(2) M pontosan akkor redukálja T-t, ha invariáns T-re és T^*-ra is;

(3) ha zárt alterek egy M_γ, $\gamma \in \Gamma$ rendszere invariáns T-re illetve redukálja T-t, akkor

$$\cap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \quad \text{és} \quad \overline{\cup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma}$$

is invariáns T-re illetve redukálja T-t.

- 216/12 :

<

$[0, \infty)$.

>

$[0, \infty[$.

7.82.3. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H; H)$ normális és $T^2 = T$, akkor T önadjungált.

7.82.6. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H; H)$ normális, akkor T pontosan akkor invertálható, ha van olyan $c > 0$, hogy $\|Tx\| \geq c\|x\|$ minden $x \in H$-ra.

- 217/−4 :

<

T önadjungált.

>

T önadjungált.

7.101.5. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $U \in \mathcal{L}(H; H)$ unitér és $U - \mathbb{I}$ invertálható, akkor a $T = i(U + \mathbb{I})(U - \mathbb{I})^{-1}$ operátor önadjungált.

- 220/−11 :

<

tömege, $\approx 9, 10939 \cdot 10^{-28}$g. (Ha a mag mozgását is figyelembe akarjuk venni,

>

tömege, $\approx 9{,}10939 \cdot 10^{-28}$g. (Ha a mag mozgását is figyelembe akarjuk venni,

- 223/−6 :

<

Úgy is tekinthető, mint a relaxáció egy esete. A részleteket illetően lásd

>

Úgy is tekinthető, mint a relaxáció egy esete. A részleteket illetően lásd a

- 227/−0 :

<

>

8.7.2. Feladat [6]. Legyen $T \in \mathcal{L}(X; X)$ az X végtelen dimenziós Banach-tér egy kompakt operátora. Mutassuk meg, hogy nem reguláris.

8.7.4. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy a $(Tx)(t) = tx(t)$ összefüggéssel definiált operátor nem kompakt $\mathcal{C}[0,1]$-en.

8.7.6. Feladat [10]. Legyen $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ az X végtelen dimenziós Banach-tér egy kompakt leképezése az Y normált térbe. Mutassuk meg, hogy van olyan normált x_n sorozat X-ben, amelyre $Tx_n \to 0$.

8.7.8. Feladat [10]. Legyen X szeparábilis Hilbert-tér az x_n teljes ortonormált rendszerrel, $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ az X egy kompakt leképezése az Y normált térbe. Mutassuk meg, hogy $Tx_n \to 0$.

- $236/-1$:

$<$

teleinek?

$>$

teleinek?

* **8.36. Lemma.** *Legyen X egy metrikus tér, T pedig X egy zárt részhalmazának folytonos leképezése X egy kompakt részhalmazába. Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan x_ε, hogy*

$$d\big(T(x_\varepsilon), x_\varepsilon\big) < \varepsilon. \tag{1}$$

Ekkor T-nek van fixpontja.

Az (1) feltételnek eleget tévő x_ε pontokat a T leképezés ε-*fixpont*jainak nevezzük.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T az F zárt részhalmazt a K kompakt halmazba képezi le. Mivel $T(x_\varepsilon) \in K$, feltehetjük, hogy valamely $\varepsilon_n \to 0$ sorozatra $T(x_{\varepsilon_n}) \to x \in K$. Az (1) feltétel szerint $x_{\varepsilon_n} \to x$, így $x \in F$. Tehát $T(x)$ definiálva van, és $T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_{\varepsilon_n}) = \lim_{n\to\infty} T(x_{\varepsilon_n}) = x$.

* **8.37. Lemma: Schauder-projekció.** *Ha K az X normált tér kompakt részhalmaza és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan Y véges reszhalmaza K-nak és P folytonos leképezése K-nak Y konvex burkába, hogy $\big\|P(x) - x\big\| < \varepsilon$ minden $x \in K$-ra.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $\{y_1, \dots, y_n\} = Y$ véges ε-hálót K-ban. Legyen

$$f_i(x) = \max\big\{0, \varepsilon - \|x - y_i\|\big\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nyilván $f_i(x) \neq 0$ pontosan akkor, ha $\|x - y_i\| < \varepsilon$. Így minden $x \in K$-ra valamelyik $f_i(x)$ nem nulla. Legyen

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x) y_i}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in K.$$

Nyilván P folytonos, és mivel $P(x)$ az x-hez ε-nál közelebb lévő pontok konvex kombinációja, $\big\|P(x) - x\big\| < \varepsilon$.

* **8.38. Schauder második fixponttétele.** *Legyen C az X normált tér egy nem üres konvex részhalmaza. Legyen T a C egy folytonos leképezése egy $K \subset C$ kompakt halmazba. Ekkor T-nek van fixpontja.*

Bizonyítás. Tekintsük $n = 1, 2, \ldots$-re a $P_n \circ T$ leképezést, ahol P_n az előző lemma szerint $\varepsilon = 1/n$-hez tartozó leképezés. Mivel $Y \subset K \subset C$, az Y halmaz konvex burka is része C-nek. Mivel Y konvex burka véges dimenziós kompakt konvex halmaz és $P_n \circ T$ ezt folytonosan képezi le önmagába, a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik egy x_n fixpontja. A $P_n\big(T(x_n)\big) = x_n$ összefüggésből $\big\|T(x_n) - x_n\big\| < 1/n$. Így T-nek van fixpontja.

* **8.39. Következmény: Schauder első fixponttétele.** *Egy normált tér bármely nem üres kompakt konvex részhalmaza fixpont-tulajdonságú.*

* **8.40. Feladat [9].** Bizonyítsuk be Peano tételét Schauder második fixponttétele segítségével.

- 243/−9 :

$<$

általános eset bizonyítása megtalálható Zeidler [149] könyvében, 4.14. Egy jóval általánosabb változat bizonyítása található Páles [100] jegyzetében.

$>$

általánosabb változatot később bizonyítjuk.

- 255/−16 :

$<$

nem sikerült, akkor t_1 és t_2 abszolút értékét csökkenteni kell. t_1 értékének jó

$>$

nem sikerült, akkor t_1 és t_2 abszolút értékét csökkenteni kell; t_1 értékének jó

- 257/16 :

$<$

Időnként újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

$>$

Időnként újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

A *fékezett Newton-módszer*nél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletből meghatározzuk Δx_n-et, de $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \Delta x_n$, ahol az $0 < \alpha_n \leq 1$ *relaxációs paraméter*t úgy választjuk, hogy $\big\|f(x_{n+1})\big\|^2 < \big\|f(x_n)\big\|^2$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha az egyenlet megoldható és a norma belső szorzatból származik: Az $\|f\|^2$-nek a Δx_n irány menti deriváltja az x_n helyen

$$2\big\langle f(x_n), f'(x_n)\Delta x_n \big\rangle = -2\big\|f(x_n)\big\|^2,$$

így

$$\frac{\big\|f(x_n+\alpha\Delta x_n)\big\|^2-\big\|f(x_n)\big\|^2}{\alpha\big\|f(x_n)\big\|^2}\to -2,$$

ha $\alpha\to 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1-\sigma$ valamely $0<\sigma<1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5}\le\sigma\le 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n=1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük α_n-et, rendszerint szorozzuk ϱ-val, ahol $0<\varrho<1$, általában $0{,}3\le\varrho\le 0{,}8$.

A módosított Newton-módszerből is képezhető fékezett változat, de itt már nem biztos, hogy a feltétel teljesíthető, esetleg újra kell számolni a deriváltat.

- $259/-16$:

$<$

nem sikerült, akkor t_1 és t_2 abszolút értékét csökkenteni kell. t_1 értékének jó

$>$

nem sikerült, akkor t_1 és t_2 abszolút értékét csökkenteni kell; t_1 értékének jó

- $259/-1$:

$<$

* **9.53. Algebrai egyenletek megoldása.** A Newton-módszer minden további nélkül alkalmazható komplex változós, komplex értékű f függvényre is. Hogy a konvergenciát biztosabbá tegyük, kezdetben alkalmazhatjuk a gradiens módszert az $|f|$ függvényre. Ennek gradiense $f(x)/f'(x)$ irányú, ha $f(x)\ne 0$ és $f'(x)\ne 0$. Így az $x_{n+1}=x_n-tf(x_n)/f'(x_n)$ alakban kell keresnünk a következő közelítést, ahol t pozitív valós szám. Eljárhatunk úgy, hogy először $t=1$-el próbálkozunk, ami a Newton-módszernek felel meg. Ha az így kapott x_{n+1}-re $\big|f(x_{n+1})\big|<\big|f(x_n)\big|$, akkor ezt választjuk következő közelítésnek, egyébként t-t csökkentjük. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n)=0$.

$>$

* **9.53. Algebrai egyenletek megoldása.** A fékezett Newton-módszer minden további nélkül alkalmazható komplex változós, komplex értékű f függvényre is. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n)=0$.

- $269/-3$:

$<$

$g_{ij}=\langle\partial_i r,\partial_j r\rangle$, $1\le i,j\le 2$. A $g_{i,j}$ számokat *első alapmennyiségek*nek

$>$

$g_{ij}=\langle\partial_i r,\partial_j r\rangle$, $1\le i,j\le 2$. A g_{ij} számokat *első alapmennyiségek*nek

- $276/-1$:

$<$

összeggörbülete nulla.

$>$

összeggörbülete nulla.

* **10.31. Térkép, atlasz, sokaság.** Egy m-dimenziós *térkép* vagy *koordinátarendszer* egy X metrikus tér egy nyílt részhalmazát $\mathbb{R}^m$ egy nyílt részhalmazára képező φ homeomorfizmus. A φ és ψ m-dimenziós térképek $\mathcal{C}^r$*-összeférhetőek* $(0 \leq r \leq \infty)$, ha $\varphi \circ \psi^{-1}$ és $\psi \circ \varphi^{-1}$ is $\mathcal{C}^r$-leképezések (ezek a φ és ψ értelmezési tartománya metszetének φ és ψ általi képeit képezik le egymásra). Egy *m-dimenziós $\mathcal{C}^r$-atlasz* az X m-dimenziós térképeinek egy $\mathcal{C}^r$-összeférhető φ_i, $i \in I$ családja úgy, hogy a φ_i térképek értelmezési tartományai lefedik X-et. Egy m-dimenziós *$\mathcal{C}^r$-sokaság* egy M szeparábilis metrikus tér amelyen meg van adva egy m-dimenziós $\mathcal{C}^r$-atlasz. A $\mathcal{C}^r$-atlaszhoz M akárhány további m-dimenziós térképét hozzávehetjük, ha azok $\mathcal{C}^r$-összeférhetőek az eredeti atlasz térképeivel, mert ekkor egymással is $\mathcal{C}^r$-összeférhetőek lesznek. Gyakran érdemes technikai okokból egy atlaszhoz hozzávenni az összes vele $\mathcal{C}^r$-összeférhető térképet; az így kapott atlaszt az adott atlaszhoz tartozó *telített atlasz*nak nevezzük. A $\mathcal{C}^\infty$-sokaságokat *sima sokaság*oknak is nevezzük.

* **10.32. Példa.** Bármely nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek az identikus leképezés által megadott egyetlen térképből álló atlasszal egy sima sokaság. Ha mást nem mondunk, $\mathbb{R}^m$ nyílt részhalmazain mindig erre a sokaság-struktúrára gondolunk.

* **10.33. Példa.** Az identikus leképezés által megadott térkép valamint a $\varphi(x) = \sin(x)$ leképezés által megadott térkép $\mathcal{C}^\infty$-összeférhetőek $]-\pi/2, \pi/2[$-n.

* **10.34. Példa.** Az identikus leképezés $\mathbb{R}$-en, az $\varphi(x) = x$, ha $x \leq 0$ és $\varphi(x) = 2x$, ha $x > 0$, valamint a $\psi(x) = x^3$, ha $x \in \mathbb{R}$ leképezések által megadott térképek páronként nem összeférhetőek, bár külön-külön mindegyik egy-egy sima sokaság struktúrát definiál $\mathbb{R}$-en.

* **10.35. Feladat [7].** Tekintsük az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ halmazba képező

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

és

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

függvények (polár koordináták) inverzeit. Mutassuk meg, hogy az eredeti atlasszal $\mathcal{C}^\infty$-összeférhető atlaszt alkotnak.

* **10.36. Feladat [7].** Milyen térképeket kapunk $\mathbb{R}^3$-ban a henger, illetve gömbi koordinátákból?

* **10.37. Példa.** Legyen $\mathbb{R}^{m+1}$ szokásos ortonormált bázisa $e_0, e_1, \ldots, e_m$. Tekintsük az $\mathbb{S}_m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$ gömbfelületet. Az $e_1, \ldots, e_m$ által kifeszített altereт $\mathbb{R}^m$-mel azonosítva, ha $x \in \mathbb{S}_m$ koordinátái $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^m$, legyen $y = \varphi_1(x) = (x - \xi^0 e_0)/(1 - \xi^0)$, ha $x \neq e_0$ (sztereografikus projekció e_0-ból). A leképezés inverze

$$x = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1}.$$

Hasonlóan, legyen $\varphi_2(x) = (x+\xi^0 e_0)/(1+\xi^0)$, ha $x \neq -e_0$ (sztereografikus projekció $-e_0$-ból). Ekkor $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(y) = y/\|y\|^2$ egy $\mathcal{C}^\infty$-leképezés, és az inverze is, így φ_1, φ_2 egy sima sokaság struktúrát definiál $\mathbb{S}_m$-en.

* **10.38. Példák.** Henger, tórusz, Möbius-szalag, Klein-féle kancsó, projektív sík, gömb fogantyúkkal és Möbius-szalagokkal, stb.

* **10.39. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{S}_m$ nem homeomorf $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával semmilyen n-re sem.

* **10.40. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{m+1}$ és

$$\{x = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_0 \geq 0\}$$

nem homeomorfak.

* **10.41. Feladat [8].** Adjunk meg két térképből álló atlaszt a

$$(\varphi, z) \mapsto (\cos(2\pi\varphi), \sin(2\pi\varphi), z),$$

$0 \leq \varphi \leq 1$, $0 < z < 1$ leképezés értékkészletén, egy hengerfelületen.

* **10.42. Feladat [9].** Adjunk meg két térképből álló atlaszt a

$$(\varphi, r) \mapsto \Big(\big(1 + r\cos(\pi\varphi)\big)\cos(2\pi\varphi), \big(1 + r\cos(\pi\varphi)\big)\sin(2\pi\varphi), r\sin(\pi\varphi)\Big),$$

$0 \leq \varphi \leq 1$, $-1/2 \leq r \leq 1/2$ leképezés értékkészletén, egy Möbius-szalagon.

* **10.43. Feladat [10].** Adjunk meg három térképből álló atlaszt a

$$(\varphi, \vartheta) \mapsto \Big(\big(2 + \cos(2\pi\vartheta)\big)\cos(2\pi\varphi), \big(2 + \cos(2\pi\vartheta)\big)\sin(2\pi\varphi), \sin(2\pi\vartheta)\Big),$$

$0 \leq \varphi \leq 1$, $0 < \vartheta < 1$ leképezés értékkészletén, egy tóruszon.

* **10.44. Feladat [11].** Adjunk meg három térképből álló atlaszt a Klein-féle kancsón.

* **10.45. Feladat [11].** Adjunk meg atlaszt a projektív síkon.

* **10.46. Sima leképezések.** Legyenek M és N sima sokaságok. Egy $f : M \to N$ leképezést *$\mathcal{C}^r$-leképezés*nek ($0 \leq r \leq \infty$) nevezünk, ha az M atlaszának bármely φ és az N atlaszának bármely ψ térképére $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ egy $\mathcal{C}^r$-leképezés. Az ilyen leképezések osztályát $\mathcal{C}^r(M; N)$ jelöli. A $\mathcal{C}^\infty$-leképezéseket *sima leképezés*eknek is nevezzük. Ha mást nem mondunk, *$\mathcal{C}^r$-függvény*, illetve *sima függvény* alatt $\mathcal{C}^r(M; \mathbb{R})$ illetve $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ elemeit értjük. Az M és N sima sokaságok *diffeomorf*ak, ha létezik olyan $f : M \to N$ kölcsönösen egyértelmű leképezése M-nek N-re, amelyre f és f^{-1} is sima; egy ilyen f-et *diffeomorfizmus*nak nevezünk.

* **10.47. Tétel.** *Ha K, M, N sima sokaságok és $f : K \to M$ valamint $g : M \to N$ is $\mathcal{C}^r$-leképezések, akkor $g \circ f : K \to N$ is $\mathcal{C}^r$-leképezés.*

* **Bizonyítás.** Bármely φ, ψ térképekre K-ban illetve N-ben, ha x a $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ leképezés értelmezési tartományának tetszőleges pontja és χ az M atlaszának egy olyan térképe, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza $y = f(x)$-et, a $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ leképezés a $\varphi(x)$ pont valamely környezetében megegyezik a $\psi \circ g \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ f \circ \varphi^{-1}$ leképezéssel, így $\mathcal{C}^r$-leképezés. Mivel ez $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ értelmezési tartományának bármely pontjára teljesül, $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ egy $\mathcal{C}^r$-leképezés.

* **10.48. Példák.** (1) Az $f : x \mapsto 2x/\big(1 - \|x\|^2\big)$ leképezés sima diffeomorfizmusa $\mathbb{R}^m$ nyílt $K_1(0)$ egységgömbjének $\mathbb{R}^m$-re, az inverze $y \mapsto y/\big(1 + \sqrt{1 + \|y\|^2}\big)$.

(2) A $g : x \mapsto x/\|x\|^2$ leképezés sima diffeomorfizmusa $K_1(0) \setminus \{0\}$-nak $K_1(0)$ külsejére, inverze saját maga.

(3) A $g \circ f$ leképezés sima diffeomorfizmusa $K_1(0)$ külsejének $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$-ra.

* **10.49. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy a 10.34 példában megadott sokaságok diffeomorfak.

* **10.50. Görbék érintkezése.** Legyen M egy sima sokaság. A $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to M$ $\mathcal{C}^1$-görbékre azt mondjuk, hogy a $t_0 \in \mathbb{R}$ pontban *érintkeznek*, ha $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ és van olyan φ térkép, amelynek értelmezési tartományában benne van $x = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ és

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(t_0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(t_0).$$

Legyen N egy másik sima sokaság, és $f : M \to N$ egy $\mathcal{C}^1$-leképezés. Ekkor az $f \circ \gamma_1$ és $f \circ \gamma_2$ görbék $\mathcal{C}^1$-görbék és érintkeznek t_0-ban: az $y = f(x)$ jelöléssel $f \circ \gamma_1(t_0) = y = f \circ \gamma_2(t_0)$ és az y-t tartalmazó értelmezési tartományú bármely ψ térképre

$$\frac{d(\psi \circ f \circ \gamma_i)}{dt}(t_0) = \frac{d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_i)}{dt}(t_0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'\big(\varphi(x)\big)\frac{d(\varphi \circ \gamma_i)}{dt}(t_0),$$

ha $i = 1, 2$, így megegyeznek.

Speciálisan, $N = M$-et, f-nek pedig az identikus leképezést választva, kapjuk, hogy a görbék érintkezése t_0-ban nem függ a térkép választásától: ha van olyan térkép, amelyre érintkeznek, akkor minden x-et tartalmazó térképre érintkeznek, és így az is teljesül, hogy ha t_0-ban γ_1 érintkezik γ_2-vel, továbbá γ_2 érintkezik γ_3-mal, akkor γ_1 is érintkezik γ_3-mal.

* **10.51. Érintővektorok.** Egy M sima sokaság egy *érintővektora az $x \in M$ pontban* azon $\mathcal{C}^1$-beli $\gamma : \mathbb{R} \to M$ görbék osztálya, amelyekre $\gamma(0) = x$ és érintkeznek a 0-ban. Az M sokaság x-beli érintővektorainak halmazát T_xM-mel jelöljük, azt az érintővektort pedig, amelyhez egy adott γ tartozik, $\gamma'(0)$-val. A

$$\theta_\varphi : \gamma'(0) \mapsto \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0)$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi le T_xM-et $\mathbb{R}^n$-re. Az inverz leképezés a $h \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz a

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) + th\big)$$

sima görbével érintkező görbék osztályát rendeli, mert

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d\big(\varphi(x) + th\big)}{dt}(0) = h.$$

A

$$\theta_\varphi^{-1}(h_1) + \theta_\varphi^{-1}(h_2) = \theta_\varphi^{-1}(h_1 + h_2), \quad \alpha\theta_\varphi^{-1}(h) = \theta_\varphi^{-1}(\alpha h)$$

definícióval elláthatjuk T_xM-et egy vektortér-struktúrával. Ha ψ egy másik térkép, amelynek értelmezési tartományában szintén benne van x, akkor

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) + th\big)$$

jelöléssel

$$\theta_\psi \circ \theta_\varphi^{-1} : h \mapsto \frac{d(\psi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d\big(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma\big)}{dt}(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'\big(\varphi(x)\big)h.$$

Ez azt jelenti, hogy $\theta_\psi \circ \theta_\varphi^{-1}$ bijektív lineáris leképezés, így a vektortér-struktúra nem függ a térkép választásától.

* **10.52. Az érintőleképezés.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f : M \to N$ egy sima leképezés, $x \in M$ és $y = f(x) \in N$. Egy $\gamma'(0) \in T_xM$ érintővektorhoz rendeljük hozzá a $(f \circ \gamma)'(0)$ érintővektort; mint a 10.44 pontban megmutattuk, ez nem függ az érintővektor reprezentánsának választásától. Jelölje ezt a $T_xM \to T_yN$ leképezést T_xf. Ez az f *érintőleképezés*e az x pontban. Megmutatjuk, hogy lineáris. Valóban, mint a 10.44 pontban már kiszámoltuk, ha φ az x-ben, a ψ pedig az y-ban értelmezett térkép, akkor $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jelöléssel

$$\frac{d(\psi \circ f \circ \gamma)}{dt}(0) = F'\big(\varphi(x)\big)\frac{d(\varphi \circ \gamma_i)}{dt}(0),$$

így mivel a θ_ψ és θ_φ leképezések lineáris bijekciók, a $T_xf = \theta_\psi^{-1} \circ F'\big(\varphi(x)\big) \circ \theta_\varphi$ leképezés is lineáris, sőt, rangja megegyezik $F'\big(\varphi(x)\big)$ rangjával. Így definiálhatjuk a T_xf érintőleképezés rangját. Ezt a rangot $\mathrm{rg}_x\, f$-fel is fogjuk jelölni.

* **10.53. Tétel.** *Ha K, M, N sima sokaságok, $f : K \to M$ és $g : M \to N$ sima leképezések, $x \in K$ és $y = f(x)$, akkor $T_x(g \circ f) = T_yg \circ T_xf$.*

* **10.54. Az érintővektorok mint funkcionálok.** Legyen M egy sima sokaság és $X = \gamma'(0) \in T_xM$. Minden M-en értelmezett sima f függvényhez az

$$f \mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$$

leképezés egy számot rendel, amely csak az $X = \gamma'(0)$ érintővektortól függ. Ezt a számot Xf-fel is jelöljük. Nyilván ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és f, g sima függvények, akkor $X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg$, azaz a funkcionál lineáris, és a szorzás differenciálási szabálya alapján $X(fg) = f(x)Xg + g(x)Xf$. Az érintővektorokat ezen tulajdonságok segítségével is be lehet vezetni. Meg lehet mutatni, hogy két érintővektor pontosan akkor egyenlő, ha minden sima függvényre ugyanúgy hatnak.

Legyen most $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ egy x-ben értelmezett térkép, és

$$X^1, X^2, \dots, X^m$$

az X érintővektor koordinátái a $\theta_\varphi^{-1}(e_i)$, $i = 1, 2, \dots m$ bázisban, ahol $e_1, e_2, \dots, e_m$ az $\mathbb{R}^m$ szokásos bázisa. (Ez a bázis a T_xM érintőtérnek a φ térképhez tartozó természetes bázisa.) Ekkor

$$\begin{aligned} Xf &= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\big(\varphi(x)\big)\frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}. \end{aligned}$$

Ennek megfelelően X hagyományos felírása ebben a koordinátarendszerben

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

* **10.55. Az érintőleképezés lokális koordinátákban.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f : M \to N$ egy sima leképezés, $x \in M$ és $y = f(x)$. Ha $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m)$ az x-ben $\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ pedig az y-ban értelmezett térkép, akkor az

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

érintővektorra

$$Y = (T_xf)(X) = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial \psi^j},$$

ahol

$$Y^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i}\big(\varphi(x)\big)X^i,$$

mivel az $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jelöléssel az $F : (\varphi^1 \varphi^2, \dots \varphi^m) \to (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ leképezés deriváltjának mátrixa

$$\frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i}\big(\varphi(x)\big).$$

Speciálisan, ha $N = M$ és f az identikus leképezés, azt kapjuk, hogy térképcserénél X koordinátái a fenti módon transzformálódnak.

* **10.56. Feladat** [8]. Az $\mathbb{S}_2$ gömbfelületen gömbi koordinátákban legyen egy vektormező

$$\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

és nulla egyébként. Számoljuk át az $(1,0,0)$ pontból való vetítés által adott koordinátákba.

* **10.57. Érintőnyaláb.** Egy M sima sokaság érintőtereinek (diszjunkt) unióját a sokaság *érintőnyaláb*jának nevezzük. Ez is sima sokasággá tehető egy természetes módon, de ezzel nem foglalkozunk.

* **10.58. Példa.** Egy csavarvonal egy darabja.

* **10.59. Immerzió, szubmerzió, szubimmerzió és beágyazás.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f : M \to N$ egy sima leképezés. Ha $T_x f$ kölcsönösen egyértelmű minden $x \in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *immerzió*. Ha $T_x f$ a $T_{f(x)}N$-re képez minden $x \in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *szubmerzió*. Ha $T_x f$ rangja ugyanannyi $x \in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *szubimmerzió*. Ha f immerzió, kölcsönösen egyértelmű és homeomorfizmus M és $f(M)$ között, akkor azt mondjuk, hogy *beágyazás*.

* **10.60. Példák.** $x \mapsto (x,0)$, $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto (x,0,0)$, $]0,2\pi[\ \ni t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto (\cos x, \sin x)$.

* **10.61. Részsokaság.** Egy M egy sokaság egy K részhalmaza az M egy k-dimenziós *részsokaság*a, ha minden $x \in K$-hoz van olyan $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ térkép az M atlaszához tartozó telített atlaszban, amelynek U értelmezési tartományában benne van x és amelyre

$$\varphi(U \cap K) = \big\{(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m) \in \varphi(U) : \varphi^{k+1} = \cdots = \varphi^m = 0\big\}.$$

Egy nyílt részhalmaz nyilván mindig részsokaság.

* **10.62. Tétel.** *Egy részsokaságon egyetlen olyan sima telített atlasz létezik, amelyre az identikus leképezése K-nak M-be beágyazás. Megfordítva, ha $f : K \to M$ egy beágyazás, akkor $f(K)$ egy részsokaság, amely diffeomorf K-val.*

* **10.63. Whitney tétele.** *Minden m-dimenziós sima sokaság beágyazható az $\mathbb{R}^{2m+1}$ sokaságba sima részsokaságként.*

* **10.64. Tétel.** *Legyen $f : M \to N$ egy szubimmerzió, $x \in M$ és $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y)$ egy zárt részsokasága M-nek és $T_x f^{-1}(y)$ a $T_x f$ magja.*

* **10.65. Példa.** Az $\mathbb{S}_m$ gömb mint az $x \mapsto \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ leképezésnél az 1 őssképe.

* **10.66. Vektormező.** Egy m-dimenziós M sima sokaságon értelmezett $X : x \mapsto X(x) \in T_x M$ leképezést *vektormező*nek nevezünk. Nyilván ha X, Y vektormezők,

$\alpha \in \mathbb{R}$ és f függvény M-en, akkor $X+Y$, αX és fX is vektormezők. Az X vektormezőt *sima vektormezőnek* nevezzük, ha minden f sima függvényre $x \mapsto X(x)f$ sima függvény; ezt a függvényt Xf-fel jelöljük. Megmutatható, hogy X pontosan akkor sima vektormező, ha bármely φ térképre az

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} X^i(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

előállításában szereplő X^i koordinátafüggvények simák.

* **10.67. Sima vektormezők Lie-zárójele.** Legyen M egy m-dimenziós sima sokaság, X és Y pedig sima vektormezők M-en. Megmutatható, hogy létezik (és csak egy) $[X, Y]$ vektormező amelyre bármely f sima függvényre

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Mivel Xf és Yf, és így $X(Yf)$ valamint $Y(Xf)$ is sima függvények, $[X, Y]$ sima vektormező.

Legyen a φ térkép az x-ben értelmezve. Ekkor

$$X(x)f = \sum_{j=1}^{m} X^j(x) \frac{\partial f}{\partial \varphi^j},$$

így

$$\begin{aligned} Y(Xf) &= \sum_{i=1}^{m} Y^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i} \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j}, \end{aligned}$$

tehát

$$[X, Y]f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i} \Big) \frac{\partial f}{\partial \varphi^j},$$

amiből

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i} \Big) \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

* **10.68. Feladat [6].** Mutassuk meg, ha X, Y sima vektormezők és f sima függvény, akkor

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y.$$

* **10.69. Feladat [8].** Az $\mathbb{S}_2$ gömbfelületen gömbi koordinátákban legyen egy vektormező

$$\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

egy másik pedig

$$\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Számoljuk ki a Lie-zárójelüket.

* **10.70. Feladat [11].** Az előző feladatban szereplő vektormezőket számoljuk át az $(1,0,0)$ pontból való vetítés által adott koordinátákba, majd számoljuk ki a Lie-zárójelüket. Ellenőrizzük eredményünket a Lie-zárójel transzformálásával.

* **10.71. Lie-algebra.** Egy V vektorteret $\mathbb{K}$ felett egy $(x,y) \mapsto [x,y]$ kétváltozós művelettel *Lie-algebrá*nak nevezünk, ha

(1) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z]$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ és $x,y,z \in V$-re;

(2) $[x,y] = -[y,x]$ minden $x,y \in V$-re;

(3) $\big[[x,y],z\big] + \big[[z,x],y\big] + \big[[y,z],x\big] = 0$ minden $x,y,z \in V$-re (*Jacobi-azonosság*).

* **10.72. Tétel.** *Egy M sima sokaság sima vektormezői a vektormezők Lie-zárójelével Lie-algebrát alkotnak $\mathbb{R}$ felett.*

Bizonyítás. Kiszámoljuk.

* **10.73. Iránymező, teljes integrál.** Legyen M egy m-dimenziós sima sokaság és $0 \le k \le m$. Egy $S : x \mapsto S_x$ hozzárendelést, ahol S_x a T_xM egy k-dimenziós altere, *k-iránymező*nek nevezünk. (A k-dimenziós *disztribúció* elnevezés is szokásos; mi ez utóbbit nem használjuk, mert a disztribúció szó másik értelme sokkal elterjedtebb.) Egy k-iránymezőre azt mondjuk, hogy *sima iránymező*, ha bármely $x \in M$-hez léteznek olyan $X_1, X_2, \dots, X_k$ sima vektormezők, hogy valamely U környezetére x-nek $X_1(y), X_2(y), \dots, X_k(y)$ bázisa T_yM-nek, ha $y \in U$.

Egy S sima k-iránymezőre legyen $\mathcal{E}(S)$ az összes olyan sima vektormezők halmaza, amelyekre $X(x) \in S(x)$, ha $x \in M$; ez az S-hez tartozó *differenciálrendszer*. Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{E}(S)$-ből nem vezet ki a sima függvényekkel való szorzás és az összeadás, sőt, még a lokálisan véges vektormező-rendszerek összeadása sem. Egy sima k-iránymezőt *involutív*nak nevezünk, ha $\mathcal{E}(S)$-re $X, Y \in \mathcal{E}(S)$ esetén $[X,Y] \in \mathcal{E}(S)$.

Ha egy k-dimenziós K sima sokaság egy $f : K \to M$ immerziójára $(T_xf)(T_xK) = S_{f(x)}$ minden $x \in K$-ra, akkor azt mondjuk, hogy a (K,f) pár az S egy *teljes integrál*ja; az $f(K)$ halmazt a *teljes integrál képé*nek nevezzük. Ha az M sokaság minden pontja rajta van valamely teljes integrál képén, akkor azt mondjuk, hogy S *teljesen integrálható*.

* **10.74. Frobenius tétele.** *Az előző definíció jelöléseivel, egy S sima iránymező pontosan akkor teljesen integrálható, ha involutív.*

* **10.75. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy sima 1-iránymező mindig teljesen integrálható.

* **10.76. Feladat [9].** Legyen az $\mathbb{R}^3$ sokaságon a szokásos koordinátákban

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial \varphi^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial \varphi^3}$$

egy sima vektormező, amely sehol sem tűnik el, és $S(x) = X(x)^{\perp}$ a szokásos belső szorzatban. Mutassuk meg, hogy S pontosan akkor involutív, ha $X \perp \operatorname{rot} X$.

- 286/14 :

$<$

* **A Riemann-integrál intervallum additivitása [7].** Tegyük

$>$

* **Feladat: A Riemann-integrál intervallum additivitása [7].** Tegyük

- 286/16 :

$<$

lyik oldalának kettéosztásával kaptuk. Egy $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$>$

lyik oldalának kettéosztásával kaptuk. Mutassuk meg, hogy egy $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre

- 288/1 :

$<$

* **Feladat: Darboux tétele.** A többváltozós Riemann-integrál

$>$

* **Feladat: Darboux tétele [10].** A többváltozós Riemann-integrál

- 291/6 :

$<$

a másik a végpontja. Ívszerűen összefüggő tér mindig összefüggő is. Egy tartományt *egyszeresen összefüggő tartomány*nak nevezünk, ha benne minden

$>$

a másik a végpontja. Ívszerűen összefüggő tér mindig összefüggő is. Egy halmazt *egyszeresen összefüggő halmaz*nak nevezünk, ha benne minden

- 291/14 :

$<$

egy $D \subset X$ tartomány *csillagszerű*, azaz van benne olyan c pont, úgynevezett *csillagpont*, hogy minden $z \in D$-re, a c és z pontokat összekötő szakasz D-ben van, akkor D egyszeresen összefüggő. Speciálisan, minden konvex tartomány

$>$

egy $D \subset X$ halmaz *csillagszerű*, azaz van benne olyan c pont, úgynevezett *csillagpont*, hogy minden $z \in D$-re, a c és z pontokat összekötő szakasz D-ben van, akkor D egyszeresen összefüggő. Speciálisan, minden konvex halmaz

- 323/9 :

$<$

$$f\Big(\gamma\big(\psi(t)\big)\Big) pa_1(\gamma \circ \psi)(t) \cdots \partial_{m-1}(\gamma \circ \psi)(t)$$

$>$

$$f\Big(\gamma\big(\psi(t)\big)\Big) \partial_1(\gamma \circ \psi)(t) \cdots \partial_{m-1}(\gamma \circ \psi)(t)$$

- 329/−12 :

  $<$

  Emlékeztetünk a szokásos jelölésre: $\mathbb{K}$ vagy $\mathbb{R}$, vagy $\mathbb{C}$.

  $>$

  Az $\mathbb{U}_1(0) \subset \mathbb{C}$ nyílt körlapra a $\mathbb{D}$ jelölést is fogjuk használni.

- 340/−16 :

  $<$

  nesen vannak, így törtlineáris leképezés „*körtartó*”.

  $>$

  nesen vannak, így törtlineáris leképezés „*körtartó*”.

  13.34.5 Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy körre vagy egyenesre szimmetrikus pontpár képe törtlineáris leképezésnél szimmetrikus a kör vagy egyenes képére.

tett komplex síkot *Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. A Riemann-féle
tett komplex síkot *Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. Az f függvényt vizsgálatát a ∞ pontban a $z \mapsto f(1/z)$ függvény origóban való vizsgálatára vezethetjük vissza. A Riemann-féle

- 340/−11 :

  $<$

tett komplex síkot *Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. A Riemann-féle

  $>$

tett komplex síkot

*Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. Az f függvényt vizsgálatát a ∞ pontban a $z \mapsto f(1/z)$ függvény origóban való vizsgálatára vezethetjük vissza. A Riemann-féle

- 340/−8 :

  $<$

is fontos szerepet játszanak. Mivel ezen kérdések elegáns tárgyalása a komplex differenciálható sokaságok segítségével oldható meg, itt nem foglalkozunk velük.

  $>$

is fontos szerepet játszanak. Ezen kérdések elegáns tárgyalása a komplex differenciálható sokaságok segítségével oldható meg. Például a komplex számgömbön a $z \mapsto z$ és $z \mapsto 1/z$ térképekből álló atlaszt vezetjük be. Itt nem foglalkozunk részletesen ezekkel a kérdésekkel.

- 344/2 :

  $<$

programozásban egy kulcs-cím leképezés, alkalmazása keresések gyorsítására.

  $>$

programozásban egy kulcs-cím leképezés, hash-transzformáció alkalmazása keresések gyorsítására.

- 344/−9 :

$<$

* **13.48. Definíció.** Néha a generátorfüggvényt használjuk fel egy számsorozat definiálására. például a b_n, $n = 0, 1, \dots$ Bernoulli-számok sorozatát azzal definiáltuk, hogy exponenciális generátorfüggvénye a $z \mapsto z/(e^z - 1)$ függvény.

$>$

* **13.48. Feladat** [9]**.** Néha a generátorfüggvényt használjuk fel egy számsorozat definiálására. Mutassuk meg, hogy például a b_n, $n = 0, 1, \dots$ Bernoulli-számok sorozatát azzal is definiálhatnánk, hogy exponenciális generátorfüggvénye a $z \mapsto z/(e^z - 1)$ függvény.

- 344/−4 :

$<$

* **13.50. Feladat** [7]**.** Mutassuk meg, hogy $z \mapsto z/2 + z/(e^z - 1)$ páratlan

$>$

* **13.50. Feladat** [7]**.** Mutassuk meg, hogy $z \mapsto z/2 + z/(e^z - 1)$ páros

- 344/−2 :

$<$

* **13.51. Feladat** [8]**.** Mutassuk meg, hogy a b_k Bernoulli-számokra, ha $n > 1$, akkor $\sum_{k=0}^{n} b_k = b_n$.

$>$

* **13.51. Feladat** [6]**.** Mutassuk meg, hogy a ζ függvény sora egyenletesen konvergens minden $\Re(z) \geq \alpha$, $\alpha > 1$ félsíkon.

- 347/12 :

$<$

$\mathrm{ind}(c, \gamma)$ egész. Ha $n = \mathrm{ind}(c, \gamma)$, akkor γ egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben a $t \mapsto e^{2\pi i n t}$,

$>$

$\mathrm{ind}(c, \gamma)$ egész. Ha $n = \mathrm{ind}(c, \gamma)$, akkor γ egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben a $t \mapsto c + e^{2\pi i n t}$,

- 347/15 :

$<$

konvex halmazban, akkor ez a konstans nulla $\mathbb{C} \setminus B$-n.

$>$

egyszeresen összefüggő halmazban, akkor ez a konstans nulla $\mathbb{C} \setminus B$-n.

- 347/−2 :

$<$

ha $\gamma(I)$ benne van valamely B konvex halmazban, és $c \in \mathbb{C} \setminus B$, akkor γ össze-

$>$

ha $\gamma(I)$ benne van valamely B egyszeresen összefüggő halmazban, és $c \in \mathbb{C} \setminus B$, akkor γ össze-

- 349/7 :

  <

amiből következik az állítás.

  >

amiből következik az állítás.

14.12.5 Morera tétele. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, f folytonos komplex függvény D-n. Ha minden γ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszög-lappal együtt D-ben van, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, akkor f holomorf D-n.*

Bizonyítás. Az f-nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így f is analitikus.

14.12.7 Weierstrass példája. *Legyen $0 < b < 1$ és a páratlan egész úgy, hogy $ab > 1 + 3\pi/2$ teljesüljön. A $\sum_{k=0}^{\infty} b^k z^{a^k}$ hatványsor egyenletesen abszolút konvergens a zárt egységkörlapon, analitikus a belsejében, de nincs olyan bővebb tartomány, amire analitikusan kiterjeszthető.*

Bizonyítás. Tekintsük a $t \mapsto e^{i\pi t}$ függvény és a hatványsor összetételével keletkező függvényt. Elég megmutatni, hogy ennek az $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos a^k \pi t$ valós része sehol sem differenciálható. Legyen $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \cos a^k \pi t$. Rögzítsünk egy t-t. Bármeny n-re és $h > 0$-ra a differenciahányadosnak megfelelő összeget bontsuk két részre: a 0-tól $n-1$-ig terjedő rész legyen s_n, a többi r_n. A két koszinusz különbségét a középérték-tétellel becsülve, azt kapjuk, hogy $|s_n| < \pi a^n b^n/(ab-1)$. Legyen $a^n t = \alpha_n + \beta_n$, ahol α_n egész és $-1/2 \le \beta_n < 1/2$. Legyen $h_n = (1-\beta_n)/a^n$. Ha $k \ge n$, akkor $a^k\pi(t+h_n) = a^{k-n}\pi(1+\alpha_n)$, így mivel a páratlan, $\cos a^k\pi(t+h_n) = (-1)^{1+\alpha_n}$. Másrészt

$$\begin{aligned}
-\cos a^k\pi t &= \cos a^{k-n}\pi(\alpha_n+\beta_n) = -\cos a^{k-n}\pi\alpha_n \cdot \cos a^{k-n}\pi\beta_n) \\
&= (-1)^{1+\alpha_n}\cos a^{k-n}\pi\beta_n .
\end{aligned}$$

A $h = h_n$ helyettesítéssel r_n-re azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|r_n| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n} + (-1)^{1+\alpha_n}\cos a^{k-n}\pi\beta_n}{h_n} \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \sum_{k=n}^{\infty} b^k (1+\cos a^{k-n}\pi\beta_n) \ge \frac{b^n}{h_n} \ge \frac{2a^n b^n}{3},
\end{aligned}$$

mivel $\cos\pi\beta_n \ge 0$. A két becslést kombinálva,

$$\left| \frac{f(t+h_n) - f(t)}{h_n} \right| \ge |r_n| - |s_n| > \frac{2a^n b^n}{3} - \frac{\pi a^n b^n}{ab-1} = a^n b^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right).$$

Mivel a zárójelben álló kifejezés pozitív konstans, a jobb oldali differenciahányadosoknak vagy a limesz szuperiorja, vagy a limesz inferiorja nem véges.

- 351/13 :

$<$

* **14.20. Schwarz-lemma.** *Legyen f a nyílt komplex egységkör önmagába való analitikus leképezése, amelyre $f(0) = 0$. Ekkor $|f(z)| \le |z|$, és ha valamely $z \ne 0$ pontban egyenlőség teljesül, akkor $f(z) = cz$.*

Bizonyítás. f felírható $f(z) = zg(z)$ alakban, és g is analitikus. Ha $0 < r < 1$, akkor $|z| = r$ esetén $|g(z)| \le 1/r$. A maximumelv miatt $|z| \le r$ esetén is $\big|g(z)\big| \le 1/r$. Ebből $r \uparrow 1$ határátmenettel $|g| \le 1$ az egész körön, amiből kapjuk az egyenlőtlenséget. Ha valahol egyenlőség teljesül, akkor ott $|g|$-nek lokális maximuma van, így konstans.

$>$

* **14.20. Schwarz-lemma.** *Legyen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf leképezés, amelyre $f(0) = 0$. Ekkor $|f(z)| \le |z|$, $\big|f'(0)\big| \le 1$, és ha valamely $z \ne 0$ pontban egyenlőség teljesül vagy $\big|f'(0)\big| = 1$, akkor $f(z) = cz$.*

Bizonyítás. Az f felírható $f(z) = zg(z)$ alakban, és g is analitikus. Ha $0 < r < 1$, akkor $|z| = r$ esetén $|g(z)| \le 1/r$. A maximumelv miatt $|z| \le r$ esetén is $\big|g(z)\big| \le 1/r$. Ebből $r \uparrow 1$ határátmenettel $|g| \le 1$ az egész körlapon, amiből kapjuk az egyenlőtlenséget. Ha valahol egyenlőség teljesül vagy $\big|f'(0)\big| = \big|g(0)\big| = 1$, akkor ott $|g|$-nek lokális maximuma van, így konstans.

- 352/16 :

$<$

tő le konform módon egy korlátos tartományra. A következő tétel mutatja, hogy az egyszeresen összefüggő tartományok csak két ekvivalenciaosztályt alkotnak. Nem egyszeresen összefüggő tartományok körében a helyzet bonyolultabb.

Riemann tétele. *Ha $D, E \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$-től különböző egyszeresen összefüggő tartományok, akkor konform ekvivalensek.*

A bizonyítás megtalálható Szőkefalvi-Nagy [135] jegyzetében.

$>$

tő le konform módon egy korlátos tartományra. Riemann tétele mutatja, hogy a nem üres és $\mathbb{C}$-től különböző egyszeresen összefüggő tartományok mind komform ekvivalensek. Nem egyszeresen összefüggő tartományok körében a helyzet bonyolultabb.

- 354/−7 :

$<$

14.12.5 Morera tétele. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, f folytonos komplex függvény D-n. Ha minden γ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszög-lappal együtt D-ben van, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, akkor f holomorf D-n.*

Bizonyítás. Az f-nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így f is analitikus.

$>$

* **14.37.1. Vitali tétele.** *Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{C}$ tartományon ugyanazzal a K korláttal korlátos komplex értékű holomorf függvények egy f_n sorozata egy C halmaz pontjaiban konvergál, és C-nek van torlódási pontja D-ben. Ekkor f_n lokálisan egyenletesen konvergens D-n.*

Bizonyítás. Legyen c a C egy torlódási pontja, és tegyük fel, hogy $r > 0$-ra $\mathbb{B}_r(c) \subset D$. Először megmutatjuk, hogy f_n egyenletesen konvergens $\mathbb{B}_{r/2}(c)$-n. Feltehetjük, hogy $c = 0$. Legyen

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \cdots, \quad \text{ha} \quad |z| \le r. \tag{1}$$

Mivel $\bigl|f_n(z) - f_n(0)\bigr| \le 2K$, a Schwarz-lemma miatt

$$\bigl|f_n(z) - f_n(0)\bigr| \le \frac{2K|z|}{r}, \quad \text{ha} \quad |z| \le r.$$

Legyen $0 \ne w \in C$. Ekkor

$$\begin{aligned}\bigl|f_n(0) - f_m(0)\bigr| &\le \bigl|f_n(0) - f_n(w)\bigr| + \bigl|f_n(w) - f_m(w)\bigr| + \bigl|f_m(w) - f_m(0)\bigr| \\ &\le 4K|w|/r + \bigl|f_n(w) - f_m(w)\bigr|.\end{aligned}$$

Először úgy választva w-t, hogy az első tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$, majd olyan N-et választva, hogy $n, m \ge N$ esetén a második tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$, kapjuk, hogy $f_n(0) = a_0^{(n)}$ konvergens.

Tekintsük most a

$$g_n(z) = a_1^{(n)} + a_2^{(n)} z + \cdots, \quad \text{ha} \quad |z| \le r$$

függvényeket. Mivel $g_n(z) = \bigl(f_n(z) - f_n(0)\bigr)/z$, ha $z \ne 0$, ezek is konvergensek C pontjaiban, mert, mint megmutattuk, $f_n(0)$ konvergens. Továbbá $\bigl|g_n(z)\bigr| \le 2K/r$: ez teljesül, ha $|z| = r$, és így $|z| \le r$ esetén is. Megismételve az előző gondolatmenetet, kapjuk, hogy $a_1^{(n)}$ konvergens. Teljes indukcióval kapjuk, hogy minden j-re $a_j^{(n)}$ konvergens, $a_j^{(n)} \to a_j$. Az együtthatókra jobb korlátot is kaphatunk: a Cauchy-egyenlőtlenségekből $|a_j^{(n)}| \le K/r^j$. Ha

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots,$$

akkor

$$\bigl|f_n(z) - f(z)\bigr| \le \sum_{j=0}^{k} |a_j^{(n)} - a_j| \frac{r^j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2K}{2^j}, \quad \text{ha} \quad |z| \le r/2.$$

Rögzítve egy elég nagy k-t, a második összeg kisebb, mint $\varepsilon/2$, és az első is, ha n elég nagy.

Innen már következik az állítás: a konvergenciapontok halmazának belseje nem üres nyílt halmaz, de minden torlódási pontját tartalmazza, így zárt is, tehát az egész D, és pontjaiban a konvergencia lokálisan egyenletes. $\square$

* **14.37.2. Vitali–Montel kiválasztási tétel.** *Ha a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf komplex értékű függvények egy f_n sorozata lokálisan ugyanazzal a korláttal korlátos, akkor kiválaszható belőle egy lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.*

Bizonyítás. Vegyünk egy S megszámlálható sűrű halmazt D-ben, és átlós eljárással válasszunk egy részsorozatot, amely S minden pontjában konvergens. Lokálisan alkalmazva az előző tételt, kapjuk az állítást. $\square$

* **14.37.3. Hurwitz tétele.** *Ha a $D \subset \mathbb{C}$ tartományon holomorf komplex értékű függvények egy f_n sorozata lokálisan egyenletesen konvergál egy nem konstans f függvényhez és $c \in D$ az f zérushelye, akkor c bármely környezetében elég nagy n-re f_n-nek is van zérushelye.*

Bizonyítás. A zérushelyek izoláltsága miatt van olyan $r > 0$, hogy $\mathbb{B}_r(c)$-ben nincs más zérushelye f-nek. Mivel ha n nagy, akkor $f_n - f$ abszolút értéke kicsi a c középpontú r sugarú körpályán, az állítás következik a (később bizonyítandó) Rouché-tételből. $\square$

* **14.37.4. Következmény.** *Ha az f_n-ek konform leképezések és f nem konstans, akkor konform.*

Bizonyítás. Ha $f(z) = f(w)$ lenne $z \neq w$-re, akkor elég nagy n-re f_n sem lenne konform. Így f kölcsönösen egyértelmű, amiből a nyílt leképezések tétele szerint következik, hogy f' sehol sem nulla. $\square$

* **14.37.5. Tétel: holomorf függvény logaritmusa.** *Ha az f holomorf komplex értékű függvény sehol sem nulla a D egyszeresen összefüggő tartományon, akkor van olyan g holomorf függvény D-n, hogy $f(z) = \exp\big(g(z)\big)$ minden $z \in D$-re.*

Bizonyítás. Mivel f'/f holomorf, minden D-beli zárt görbe mentén nulla az integrálja, így van primitív függvénye. Legyen g_0 egy primitív függvény. Ekkor

$$\Big(f(z)\exp\big(-g_0(z)\big)\Big)' = f'(z)\exp\big(-g_0(z)\big) - f(z)g_0'(z)\exp\big(-g_0(z)\big) \equiv 0.$$

Innen $f(z)\exp\big(-g_0(z)\big)$ egy nem nulla konstans, ami felírható $\exp(c)$ alakban, és $g = g_0 + c$-re teljesül az állítás.

14.37.8. Riemann tétele. *Ha $D, E \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$-től különböző nem üres egyszeresen összefüggő tartományok, akkor konform ekvivalensek.*

Bizonyítás. A tétel következik az alábbi, valamivel precízebb változatból.

* **14.37.9. Konform leképezések alaptétele.** *Legyen $\emptyset \neq D \subsetneq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $c \in D$. Ekkor egyetlen olyan $f : D \to \mathbb{D}$ konform ráképezés létezik, amelyre $f(c) = 0$, $f'(c) > 0$.*

Bizonyítás. Az egyértelműség bizonyításával kezdjük. Ha g egy másik, D-t $\mathbb{D}$-be képező holomorf leképezés amelyre $g(c) = 0$ és $g'(c) > 0$, akkor $g \circ f^{-1}$ az egységkör önmagába való holomorf leképezése, ami a nullát nullába viszi, így a

Schwarz-lemma szerint $\left|g'(c)/f'(c)\right| \le 1$, azaz $g'(c) \le f'(c)$. Ha g is eleget tesz a tétel állításának, akkor $f'(c) \le g'(c)$ is teljesül, így a Schwarz-lemma szerint $(g \circ f^{-1})(z) \equiv z$, azaz $f = g$.

Ezek szerint az f függvényt az tünteti ki a D-t $\mathbb{D}$-be képező, $g(c) = 0$, $g'(c) > 0$ tulajdonságú g konform leképezések $\mathcal{F}$ halmazában, hogy a c-beli deriváltja a lehető legnagyobb. Ez a létezés bizonyításának alapja. Legyen $s = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(c)$.

Először megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}$ nem üres. Legyen $a \in \mathbb{C} \setminus D$, és tekintsük a $z \mapsto \sqrt{z-a}$ függvényt. Pontosabban, tekintsünk egy olyan, az előző tétel szerint létező g holomorf függvényt, amelyre $z - a = \exp\bigl(g(z)\bigr)$, ha $z \in D$ és legyen $f_1(z) = \exp\bigl(\frac{1}{2}g(z)\bigr)$. Ha $f_1(z_1) = \pm f_1(z_2)$, akkor $z_1 - a = f_1(z_1)^2 = f_1(z_2)^2 = z_2 - a$. Innen egyrészt f_1 kölcsönösen egyértelmű, tehát konform, másrészt ha valamilyen w értéket felvesz, akkor $-w$-t nem. Mivel nyílt leképezés, értékkészlete tartalmaz valamely $-w \ne 0$ körüli valamely $r > 0$ sugarú zárt körlapot. Az $f_2(z) = r/\bigl(f_1(z) - w\bigr)$ leképezés szintén konform, és már $\mathbb{D}$-be képez. Végül

$$f_3(z) = \frac{\left|f_2'(c)\right|}{2f_2'(c)}\bigl(f_2(z) - f_2(c)\bigr) \in \mathcal{F}.$$

Második lépésként megmutatjuk, hogy van olyan $f \in \mathcal{F}$, amelyre $f'(c) = s$. Válasszunk olyan $f_n \in \mathcal{F}$ sorozatot, amelyre $f_n'(c) \to s$. A Vitali–Montel kiválasztási tétel szerint ennek van olyan részsorozata, amely lokálisan egyenletes konvergál egy f függvényhez. Az egyszerűbb jelölések kedvéért feltehetjük, hogy ez mindjárt f_n. Weierstrass tétele szerint f holomorf és $f_n' \to f'$ lokálisan egyenletesen, így $f'(c) = s$. Nyilván $|f| \le 1$. Ha valahol egyenlőség állna, akkor f konstans lenne, de $f'(c) > 0$. Mivel f konform leképezések lokálisan egyenletesen konvergens sorozatának a határértéke, és nem konstans, maga is konform.

Azt kell még megmutatnunk, hogy f értékkészlete $\mathbb{D}$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $d \in \mathbb{D}$, amely nincs az értékkészletben. A $t_1(z) = (z-d)/(1-z\overline{d})$ törtlineáris leképezés a d-t 0-ba képezi, és

$$\left|t_1(z)\right|^2 = \frac{|z|^2 + |d|^2 - 2\Re(z\overline{d})}{1 + |z|^2|d|^2 - 2\Re(z\overline{d})}.$$

Mivel $|d|^2 < 1$, nyilván $0 \le \bigl(1 - |d|^2\bigr)(1 - |z|^2)$, ha $|z| \le 1$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|z| = 1$. Innen a számláló pontosan akkor egyenlő a nevezővel, ha $|z| = 1$, egyébként kisebb, tehát t_1 a $\mathbb{D}$-t $\mathbb{D}$-be, $\mathbb{D}$ határát pedig a $\mathbb{D}$ határába képezi. Mivel $t_1^{-1}(w) = (w+d)/(1+w\overline{d})$ is ugyanilyen tulajdonságú, a $\mathbb{D}$ és a határa is önmagára képeződik kölcsönösen egyértelműen. Tekintsük most a $t_1 \circ f$ leképezés négyzetgyökét. Pontosabban, legyen g olyan leképezés, amelyre $(t_1 \circ f)(z) = \exp\bigl(g(z)\bigr)$, ha $z \in D$, és legyen $f_1(z) = \exp\bigl(\frac{1}{2}g(z)\bigr)$, ha $z \in D$. Ugyanúgy mint az első lépésben adódik, hogy f_1 kölcsönösen egyértelmű. Alkalmazzunk még egy t_1-hez hasonló t_2 törtlineáris leképezést, amivel visszavisszük $f_1(c)$-t az origóba, de a törtet szorozzuk meg egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal is. Ezzel elérhetjük, hogy $f_2 = t_2 \circ f_1$-re $f_2'(c) > 0$ legyen. Ha $|w| < 1$-re $h(w) = t_1^{-1}\bigl(t_2^{-1}(w)^2\bigr)$, akkor $f = h \circ f_2$. A h holomorf függvény, $\bigl|h(w)\bigr| < 1$, ha $|w| < 1$ és $h(0) = 0$. A Schwarz-lemmából $\bigl|h'(0)\bigr| \le 1$. Egyenlőség csak akkor lehetne, ha h egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal való szorzás lenne. Ez azonban lehetetlen, mert h nem kölcsönösen egyértelmű. Így $\bigl|h'(0)\bigr| < 1$. Innen $s = f'(c) = h'(0)f_2'(c) < f_2'(c) \le s$, ami ellentmondás.

- 359/2 :

$<$

$r' < |z-a| < R' < R$ teljesüljön, és legyen

$>$

$r' < |z-a| < R' < R$ teljesüljön, és legyen először

- 360/12 :

$<$

konvergens. Legyen $\gamma : I \to D$ egy zárt pálya, amelyre $r' < \bigl|\gamma(t) - a\bigr| < R'$

$>$

konvergens. Legyen most $\gamma : I \to D$ egy tetszőleges zárt pálya, amelyre $r' < \bigl|\gamma(t) - a\bigr| < R'$

- 361/16 :

$<$

c_{-1} az f *reziduuma* a-ban, jelölése $\mathrm{Res}(a, f)$.

$>$

c_{-1} az f *reziduuma* a-ban, jelölése $\mathrm{Res}(a, f)$.

15.2.5. Casorati–Weierstrass-tétel. *Ha a a komplex értékű f függvény lényeges szingularitása, akkor az a bármely környezetében vett értékkészlete f-nek sűrű $\mathbb{C}$-ben.*

A tétel mutatja, hogy lényeges szingularitás környezetében a függvény sokkal csúnyábban viselkedik, mintha rendje véges a-ban. Egyébként ennél több is igaz: Picard tétele szerint a függvény az a minden környezetében legfeljebb egy érték kivételével minden $\mathbb{C}$-beli értéket felvesz.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy valamely $w \in \mathbb{C}$-re és $\delta, \varepsilon > 0$-ra $\mathbb{U}_\varepsilon(w)$ nincs az $\mathbb{U}_\delta(a) \setminus \{a\}$-n vett értékkészletben. Ekkor a $z \mapsto 1/\bigl(f(z) - w\bigr)$ függvény korlátos, így megszüntethető szingularitása van. Innen a reciproka, a $z \mapsto f(z) - w$ függvény véges rendű lenne.

- 367/−12 :

$<$

ciójánál használt jelölésekkel $\mathbb{R}^m$-ben $\lambda^m\bigl(\mathbb{B}_1(0)\bigr) = \boldsymbol{\alpha}(m)$.

$>$

ciójánál használt jelölésekkel $\mathbb{R}^m$-ben $\lambda^m\bigl(\mathbb{B}_1(0)\bigr) = \boldsymbol{\alpha}(m) \to 0$, ha $m \to \infty$.

15.25.5. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}\, dx = \zeta(z)\mathbf{\Gamma}(z),$$

ha $\Re(z) > 1$.

- 378/−4 :

$<$

ahol $f(x+)$ és $f(x-)$ a jobb és bal oldali határértékek x-ben. Minden $[c, d] \subset$

$>$

ahol $f(x+)$ és $f(x-)$ a jobb és bal oldali határértékek x-ben. Ha f folytonos is, akkor minden $[c, d] \subset$

- 386/8 :

$<$

Fourier-sorát:

(1) $|\sin x|$;

(2) $\operatorname{sgn} \sin x$;

(3) $x - \lfloor x \rfloor$;

(4) $f(x)$ az x távolsága a legközelebbi egésztől.

$>$

Fourier-sorát:

(1) $|\sin x|$;

(2) $\sin^4 x$;

(3) $\operatorname{sgn}(\sin x)$;

(4) $\operatorname{sgn}(\cos x)$;

(5) $(1 - a^2)/(1 - 2a\cos x + a^2)$, $|a| < 1$;

(6) $(1 - a\cos x)/(1 - 2a\cos x + a^2)$, $|a| < 1$;

(7) $x - \lfloor x \rfloor$;

(8) $f(x)$ az x távolsága a legközelebbi egésztől;

(9) $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$;

(10) $\lfloor 4x \rfloor - 3\lfloor 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor$;

(11) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \, dx$;

(12) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 4x \rfloor - 3\lfloor 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor \, dx$;

(13) $\ln\big|\sin(x/2)\big|$.

16.28.5. Feladat [8]. Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát $]-\pi,\pi[$-n:

(1) $\operatorname{sgn}(x)$;
(2) $|x|$;
(3) x;
(4) xe^{x^2};
(5) $\operatorname{sgn}(x)(\pi-|x|)$;
(6) x^2;
(7) $\operatorname{sgn}(x)\cos x$;
(8) $\big(1+\operatorname{sgn}(x)\big)\sin x$;
(9) $\cos ax$;
(10) $\sin ax$.

16.28.7. Feladat [8]. Az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sora $]-\pi,\pi[$-n mely pontokban konvergens és mi az összege:

(1) $\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$;
(2) $\sin(1/x)$;
(3) $x\sin(1/x)$;
(4) $\sin(x)/x$.

16.28.9. Feladat [8]. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n+1)^2$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n+1)^4$;
(5) $\sum_{\mathrm{lnko}(n,6)=1} 1/n^4$.

- $386/-12$:

$<$

talma, attól függően, hogy a húrt hol pendítjük meg?

$>$

talma, attól függően, hogy a húrt hol pendítjük meg?

16.31.2. Feladat [11]. Határozzuk meg az alábbi Fourier-sorok összegét:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1};$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n};$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2-1};$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n};$$

(5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

16.31.4. Feladat [10]. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n$ részletösszegei egyenletesen korlátosak.

16.31.6. Feladat [8]. Bizonyítsuk be, hogy ha a b_n-ek egy $f \in \mathbb{L}^1[0, 2\pi]$ függvény Fourier-együtthatói, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)\, dx.$$

16.31.7. Feladat [11]. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi trigonometrikus sorok mindenütt konvergensek, de nem Fourier-sorai egyetlen $f \in \mathbb{L}^1[-\pi, \pi]$ függvénynek sem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n \ln \ln n}.$$

16.31.9. Feladat: Gibbs-féle jelenség [12]. Bizonyítsuk be, hogy az $x - \lfloor x \rfloor$ függvény Fourier-sorának részletösszegei a szakadás közelében mintegy 9% „túllövést" tartalmaznak, azaz ennyivel a függvény alá illetve fölé mennek. Igaz-e ez más szakadásos függvényekre? Van-e „túllövés" a Fejér-közepeknél?

- $412/-15$:

  $<$

Így csak egy helyen van szükség f' kiszámítására, de a konvergencia lelassul. A két utóbbi módszer Banach-terekre való általánosítását a differenciálszámításnál tárgyaljuk.

* **17.27. Egy példa: a konvergencia rendje.** Tekintsük a $2\sin x - x = 0$ egyenletet, és határozzuk meg egyetlen pozitív gyökét. Az ismertetett eljárásokkal a táblázatokban látható eredményeket kapjuk.

Látjuk, hogy a húrmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben ugyanannyival nő, amit úgy szokás kifejezni, hogy a módszer *elsőrendben konvergens*. A Newton-féle érintőmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben kb. megduplázódik, a Newton-módszer *másodrendben konvergens*. A szelőmódszernél minden lépésben a helyes jegyek száma kb. 1,6-szeresére nő, a szelő módszer *konvergencia rendje* $\approx 1{,}6$.

Megjegyezzük, hogy a módosított Newton-módszer is elsőrendben konvergens, és többszörös gyökök esetében, tehát ha nem csak $f(\alpha) = 0$, hanem $f'(\alpha) = 0$ is teljesül, akkor a Newton-módszer is csak elsőrendben konvergens.

$>$

Így csak egy helyen van szükség f' kiszámítására, de a konvergencia lelassul.

A Newton-módszer és a módosított Newton-módszer is speciális esete az

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{Q_n}$$

iterációval dolgozó *kvázi Newton-módszer*nek, amelynél α_n minden lépésben változtatható paraméter, Q_n pedig $f'(x_n)$ egy közelítése. Megtehetjük például, hogy $f'(x_n)$-et egy

$$Q_n = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n}$$

differenciával közelítjük, ekkor egyáltalán nem kell deriváltat számolni. Ha $h_n = x_n - x_{n-1}$, akkor a szelőmódszert kapjuk vissza. Ha h_n ennél lényegesen kisebb abszolút értékű, akkor az eljárás felgyorsul, azonban a kerekítési hibák megnőhetnek.

Természetesen fixpontmódszerek is használhatók, és a módszerek kombinálhatók is.

Leállási kritériumként (egy adott iterációszám túllépésén kívül) annak vizsgálata kínálkozik, hogy $\big|f(x_n)\big| < \varepsilon$ valamely előre megadott $\varepsilon > 0$-ra. Ha a gyök közelében $|f'| \ll 1$, akkor ez túl hamar történő leállást eredményezhet, míg $|f'| \gg 1$ esetén az iteráció túl soká tarthat. Ezért inkább az $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ kritériumot alkalmazzuk. Ez csak nagyon lassan konvergáló fixpontmódszer esetén (azaz ha a kontrakcióra a Lipschitz-konstans nagyon közel van egyhez) hátrányos; ezt észrevehetjük Aitken Δ^2-módszerével.

A módszerek Banach-terekre való általánosítását a differenciálszámításnál tárgyaljuk.

* **17.27. Egy példa.** Tekintsük a $2\sin x - x = 0$ egyenletet, és határozzuk meg egyetlen pozitív gyökét. Az ismertetett eljárásokkal a táblázatokban látható eredményeket kapjuk.

* **17.27.5. A konvergencia rendje.** Mint az előző példából látjuk, a húrmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben ugyanannyival nő, amit úgy szokás kifejezni, hogy a módszer *elsőrendben konvergens*. A Newton-féle érintőmódszernél a

helyes jegyek száma minden lépésben kb. megduplázódik, a Newton-módszer *másodrendben konvergens*; ezt jóval általánosabb esetben, a differenciálszámításnál bizonyítjuk. A szelőmódszernél minden lépésben a helyes jegyek száma kb. 1,6-szeresére nő, megmutatható hogy a szelő módszer *konvergencia rendje* $(\sqrt{5}+1)/2 \approx 1{,}6$.

Megjegyezzük, hogy a módosított Newton-módszer is elsőrendben konvergens, és többszörös gyökök esetében, tehát ha nem csak $f(\alpha) = 0$, hanem $f'(\alpha) = 0$ is teljesül, akkor a Newton-módszer is csak elsőrendben konvergens: Valóban, az általánosabb kvázi Newton módszerre (de $f'(x)$-et használva), ha $f(x) = 0$, azaz x a gyök, és $f^{(m)}(x)$ az első el nem tűnő derivált, f pedig lokálisan $\mathcal{C}^m$-ben van, akkor a Taylor-formulából

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x_n - x)^m \quad \text{és} \quad f'(x_n) \approx \frac{f^{(m)}(\xi')}{(m-1)!}(x_n - x)^{m-1},$$

így

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \approx x_n - \alpha_n \frac{x_n - x}{m},$$

ahonnan $x_{n+1} - x \approx (1 - \alpha_n/m)(x_n - x)$, azaz $\alpha_n = \alpha \neq m$ esetén a konvergencia lineáris, a hiba $x_n - x \approx cq^n$ a $q = 1 - \alpha/m$ értékkel. Megmutatható, hogy $\alpha = m$ esetén a konvergencia másodrendű lesz. Ha nem ismerjük m értékét, akkor az Aitken-módszernél leírtak szerint q — és így m is — minden második lépésben újra becsülhető; így kapjuk az *adaptív Newton-módszer*t.

- 414/4 :

<

gyökeiből, interpolációval.

>

gyökeiből, interpolációval.

* **17.31.1. Feladat [11].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a tanult módszerekkel és megállási kritériumokkal:

(1) $\cos^2(2x) - x^2 = 0$;

(2) $\prod_{k=1}^{10}(x+k) = 0$;

(3) $x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$;

(4) $e^{-x} - \eta = 0$, $\eta = 10^{-9}$;

(5) $(x^2-1)^{m-1}\ln x = 0$, $m = 3, 5, 7$.

* **17.31.2. Feladat [9].** Határozzuk meg 1 mól CO_2 térfogatát 300 K°-on 10 atm (1013250 Pa) nyomáson a van der Waals-állapotegyenletből:

$$\big(p + a(n/V)^2\big)(V/n - b) = nRT,$$

ahol n a mólok száma. A van der Waals-állandók CO_2-ra $a/(\mathrm{Pa\,m^6K^\circ/mól^2}) = 188{,}33$ és $b/(\mathrm{m^3K^\circ/mól}) = 9{,}77 \cdot 10^{-4}$. Vessük össze az eredményt a tökéletes gázra kapott eredménnyel.

* **17.31.3. Feladat [9].** Egy alagútdióda karakterisztikája

$$I = \alpha(e^{U/\beta} - 1) - \mu U(U - \gamma),$$

ahol $\alpha/A = 10^{-12}$, $\beta/V = 25 \cdot 10^{-3}$, $\mu/(A/V^2) = 10^{-3}$ és $\gamma/V = 0{,}4$. Sorbakötjük egy 3333 Ω-os ellenállással egy 0,4 V-os feszültségforrásra. Határozzuk meg a kialakuló munkapontokat. Mi a helyzet, ha a feszültség 0,6 V, az ellenállás pedig 12 kΩ?

- 428/9 :

  <

értelmezett függvény, és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen az f függvény $\tau_x f$ *eltolt*ja és $\check{f}$ *megfordítás*a a

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x) \quad \text{illetve} \quad \check{f}(y) = f(-y)$$

  >

értelmezett függvény, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \neq s \in \mathbb{R}$, akkor legyen az f függvény $\tau_x f$ *eltolt*ja, $\sigma_s(f)$ *nyújtott*ja illetve $\check{f}$ *megfordítás*a a

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x), \quad \sigma_s(f)(y) = f(y/s), \quad \text{illetve} \quad \check{f}(y) = f(-y)$$

- 428/−5 :

  <

$$\hat{f}(t/2\pi) = \int f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dx$$

  >

$$\hat{f}\Big(\frac{t}{2\pi}\Big) = \int f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dx$$

- 428/−2 :

  <

jelölésünknél frekvencia. A definícióból azonnal következik, hogy a Fourier-

  >

jelölésünknél frekvencia. A Fourier-transzformált egyszerű kapcsolatban van a $t \mapsto \int f(x) e^{-\langle t,x\rangle}\, dx$ Laplace-transzformálttal is, hiszen

$$\hat{f}\Big(\frac{t}{2\pi i}\Big) = \int f(x) e^{-\langle t,x\rangle}\, dx$$

A definícióból azonnal következik, hogy a Fourier-

- 429/1 :

  <

(1) $|\hat{f}| \le \|f\|_1$;

(2) $(\tau_x f)\check{}= \mathbf{e}_{-x}\hat{f}$;

(3) $(\mathbf{e}_x f)\check{}= \tau_x \hat{f}$;

(4) ha $\varepsilon > 0$ és $g(x) = f(\varepsilon x)$, akkor $\hat{g}(t) = \hat{f}(t/\varepsilon)/\varepsilon^n$.

  >

(1) $|\hat{f}| \le \|f\|_1$;

(2) $\overline{\hat{f}} = \check{\overline{f}}$ (konjugálás);

(3) $(\tau_x f)\hat{}= \mathbf{e}_{-x}\hat{f}$ (eltolás);

(4) $(\mathbf{e}_x f)\hat{}= \tau_x \hat{f}$ (modulálás);

(5) $(\sigma_s(f))\hat{}= |s|^n \sigma_{1/s}(\hat{f})$ (nyújtás).

- 429/−16 :

  <

  Egy metrikus téren értelmezett, skalár értékű h függvényre azt mondjuk,

  >

  Egy metrikus téren értelmezett, normált térbeli értékű h függvényre azt mondjuk,

- 432/−15 :

  <

transzformáltját.

  >

transzformáltját.

18.11.1. Feladat [7]. Számítsuk ki az $f(x) = \cos x$, ha $|x| \le \pi/2$, $f(x) = 0$ egyébként függvény Fourier-transzformáltját.

- 433/6 :

  <

fel. Megadunk egy ilyen, kompakt tartójú és síma függvényt. A L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy a

  >

fel. Megadunk egy ilyen, kompakt tartójú és síma függvényt. A 12.6 lemma bizonyításában a L'Hospital-szabály alkalmazásával megmutattuk, hogy a

- 437/−4 :

  <

leképpen terjeszthető ki egy $\mathbb{L}^2$-t önmagára képező izometriává.

  >

leképpen terjeszthető ki egy $\mathbb{L}^2$-t önmagára képező izometriává.

18.22.1. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, akkor $\hat{f}$ és az f függvény $\mathbb{L}^2$-beli Fourier-transzformáltja megegyeznek.

- 437/−1 :
  $<$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin(ax)/x)^4 \, dx = 2a^3\pi/3.$$

$>$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin(ax)/x)^4 \, dx = 2a^3\pi/3.$$

18.25. Feladat[8]. Határozzuk meg $x \mapsto 1/(1+x^2)$ Fourier-transzformáltját és $\int_{-\infty}^{+\infty} 1/(1+t^2)^2 \, dt$ értékét.

18.26. Ablak Fourier-transzformált. Legyen a $0 \neq \varrho \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ *ablak függvény* rögzített. Ha $\operatorname{spt}(\varrho) \subset [-T, 0]$, akkor azt mondjuk, hogy az ablak-függvény *kauzális*. Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ függvény erre vonatkozó *ablak Fourier-transzformált*ja (angol rövidítéssel: WFT-je) az $(\nu, t) \mapsto \tilde{f}(\nu, t) = (f_t)\hat{}$ függvény, ahol $f_t(x) = \overline{\varrho}(x-t)f(x)$. A $\varrho_{\nu,t}(x) = g(x-t)e^{2\pi i\nu x}$ jelöléssel $\tilde{f}(\nu,t) = \langle f, g_{\nu,t}\rangle$. Az ablak Fourier transzformáltat Gábor Dénes Nobel-díjas magyar fizikus vezette be, ezért *Gábor-transzformált*nak is szokás nevezni. Ő az $x \mapsto e^{-x^2/2}$ *Gauss-függvény*t használta ablaknak. Néha csak az ezzel az ablakkal vett transzformáltat nevezik Gábor-transzformáltnak.

18.27. Példa. Az $x \mapsto \sin(2\pi x^2)$ „zirp” jel a

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x), & \text{ha } -1/2 \le x \le 1/2, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

*Hanning-ablak*kal. Más függvények, amelyeket $[-1/2, 1/2]$-re megszorítva ablaknak használnak: 1 (négyzet-ablak); $x \mapsto 0{,}54 + 0{,}46\cos(2\pi x)$ (*Hamming-ablak*); $x \mapsto e^{-18x^2}$ (*Gauss-ablak*); $x \mapsto 0{,}42 + 0{,}5\cos(2\pi x) + 0{,}08\cos(4\pi x)$ (*Blackman-ablak*).

18.28. Megjegyzés. A fenti „időablakozásnak” megfelel egy „frekvenciaablakozás”: a Plancherel-tétel szerint $\tilde{f}(\nu,t) = \langle f, \varrho_{\nu,t}\rangle = \big\langle \hat{f}, (\varrho_{\nu,t})\hat{}\big\rangle$, ahol $\varrho_{\nu,t} = (\tau_t\varrho)\mathbf{e}_\nu$ miatt $(\varrho_{\nu,t})\hat{} = \tau_\nu\big((\tau_t\varrho)\hat{}\big) = \tau_\nu(\hat{\varrho}\mathbf{e}_{-t})$, így

$$\tilde{f}(\nu,t) = e^{-2\pi i t\nu}\langle \hat{f}, \hat{\varrho}_{-t,\nu}\rangle.$$

Nyilván célszerű, ha az ablakfüggvény abszolútértékének négyzetét sűrűségfüggvénynek tekintve, a szórásnégyzete és a Fourier-transzformáltjának a szórásnégyzete is minél kisebb. A kettő azonban egyszerre nem csökkenthető tetszőlegesen.

18.29. Tétel: bizonytalansági reláció. *Tegyük fel, hogy $\varrho \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\|\varrho\|_2 = 1$, továbbá*

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \big|\varrho(t)\big|^2\, dt \quad \textit{és} \quad \int_{\mathbb{R}} \nu^2 \big|\hat{\varrho}(\nu)\big|^2\, d\nu$$

végesek. Ekkor

$$t_0 := \int_{\mathbb{R}} t \big|\varrho(t)\big|^2\, dt \quad \textit{és} \quad \nu_0 := \int_{\mathbb{R}} \nu \big|\hat{\varrho}(\nu)\big|^2\, d\nu$$

valamint

$$T^2 := \int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^2 \big|\varrho(t)\big|^2\, dt \quad \textit{és} \quad N^2 := \int_{\mathbb{R}} (\nu-\nu_0)^2 \big|\hat{\varrho}(\nu)\big|^2\, d\nu$$

léteznek és végesek és $4\pi NT \geq 1$.

Bizonyítás. Mivel $\sqrt{2}|t| \leq 1 + t^2$ és $\sqrt{2}|\nu| \leq 1 + \nu^2$, létezik t_0 és ν_0. Megfelelő eltolást és modulációt alkalmazva, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $t_0 = 0$ és $\nu_0 = 0$. Tegyük fel, hogy vr minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és ϱ' négyzetesen integrálható. Először megmutatjuk, hogy $x\big|\varrho(x)\big|^2 \to 0$, ha $x \to \pm\infty$. A $t \mapsto t\varrho(t)\overline{\varrho(t)} = t\big|\varrho(t)\big|^2$ függvény minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és

$$\frac{d}{dt} t\big|\varrho(t)\big|^2 = \big|\varrho(t)\big|^2 + t\varrho'(t)\overline{\varrho(t)} + t\varrho(t)\overline{\varrho'(t)} = \big|\varrho(t)\big|^2 + 2\Re\big(t\varrho'(t)\overline{\varrho(t)}\big).$$

Mindkét oldalt integrálva

$$2\Re \int_0^x t\varrho'(t)\overline{\varrho(t)}\, dt + \int_0^x \big|\varrho(t)\big|^2\, dt = x\big|\varrho(x)\big|^2.$$

Ha $x \to +\infty$, a bal oldalon lévő integrálok konvergálnak, minkettő két négyzetesen integrálható függvény belső szorzatához $[0, +\infty[$-en. Innen a $\lim_{x\to+\infty} x\big|\varrho(x)\big|^2$ határérték létezik. Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{x\to-\infty} x\big|\varrho(x)\big|^2$ is létezik. Mivel $t \mapsto t\big|\varrho(t)\big|^2$ integrálható, a határértékek csak végesek lehetnek.

Másodszor megmutatjuk, hogy ϱ' Fourier-transzformáltja az $f : \nu \mapsto 2\pi i\nu\hat{\varrho}(\nu)$ függvény. Parciális integrálással

$$\int_{-n}^{n} \varrho'(t)e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \varrho(n)e^{-2\pi i n\nu} - \varrho(-n)e^{2\pi i n\nu} + 2\pi i\nu \int_{-n}^{n} \varrho(t)e^{-2\pi i\nu t}\, dt.$$

A bal oldalon álló integrál $\varrho'\xi_{[-n,n]}$, a jobb oldalon álló pedig $\varrho\xi_{[-n,n]}$ Fourier-transzformáltja. Részsorozatra áttérve elérhetjük, hogy a bal oldali integrálok majdnem mindenütt tartsanak ϱ' Fourier-transzformáltjához. Mégegyszer részsorozatra áttérve, elérhetjük, hogy a jobb oldalon álló integrálok majdnem mindenütt tartsanak ϱ Fourier-transzformáltjához.

Térjünk rá az egyenlőtlenség bizonyítására:

$$\begin{aligned}
4\pi^2T^2N^2 &= 4\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\nu^2\big|\hat\varrho(\nu)\big|^2\,d\nu\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\big|2\pi i\nu\hat\varrho(\nu)\big|^2\,d\nu\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\big|\varrho'(t)\big|^2\,dt\\
&\geq \Big(\int_{-\infty}^{\infty}|t|\big|\varrho(t)\big|\big|\varrho'(t)\big|\,dt\Big)^2 \geq \Big(\Re\int_{-\infty}^{\infty} t\varrho(t)\varrho'(t)\,dt\Big)^2\\
&\geq \Big(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{d}{dt}\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\Big)^2.
\end{aligned}$$

Innen parciális integrálással — felhasználva, hogy $x\big|\varrho(x)\big|^2 \to 0$, ha $x\to\pm\infty$ — kapjuk, hogy $4\pi^2T^2N^2 \geq 1/4$.

A bizonyítás teljes lesz, ha megmutatjuk, hogy a tétel feltételeiből következik, hogy ϱ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és ϱ' négyzetesen integrálható. Disztribúciókkal fogunk dolgozni; a definíciókat és alaptulajdonságokat lásd azok részletes tárgyalásánál. Ha $\varphi\in\mathcal{S}$, akkor

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\nu\hat\varrho(\nu)\varphi(\nu)\,d\nu = -\int_{-\infty}^{\infty}\varrho\hat\varphi' = T'_\varrho(\hat\varphi),$$

ahol T'_ϱ a T_ϱ disztribúció deriváltja. Innen $T_{\hat f}(\varphi) = T'_\varrho(\check\varphi)$ minden $\varphi\in\mathcal{S}$-re. Ez azt jelenti, hogy T'_ϱ reguláris disztribúció, az $\hat f$ négyzetesen integrálható függvény megfordítása reprezentálja. Megmutatjuk, hogy ϱ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és $\hat f$ megfordításának a deriváltja majdnem mindenütt. Legyen $g(x)=\int_0^x \hat f(-t)\,dt$. A g abszolút folytonos minden kompakt intervallumon és

$$T'_g(\varphi) = T_{g'}(\varphi) = T_{\hat f}(\check\varphi) = T'_\varrho(\varphi),$$

így $T'_{\varrho-g}(\varphi) = 0$ minden $\varphi\in\mathcal{D}$-re. A DuBois-Reymond-lemma bizonyításában megmutatjuk, hogy $T_{\varrho-g}$ konstanssal reprezentálható, így $\varrho = g + c$ majdnem mindenütt, tehát ϱ is abszolút folytonos minden kompakt intervallumon és $\varrho' = g'$ az $\hat f$ megfordítása négyzetesen integrálható.

18.30. Példa. Ha $\varrho(t) = \sqrt[4]{2a}e^{-\pi t^2 a}$, akkor $\hat\varrho(\nu) = \sqrt[4]{2/a}e^{-\pi\nu^2/a}$, $t_0=\nu_0=0$ és $T = 1/\sqrt{4\pi a}$, $N = \sqrt{a}/\sqrt{4\pi}$.

18.31. Feladat [11]. Bizonyítsuk be a példában szereplő állításokat.

18.32. Feladat [13]. Határozzuk meg a példaként felsorolt ablakok Fourier-transzformáltját, ha kell, numerikusan.

18.33. Tétel: rekonstrukciós formula. *Ha ϱ egy ablak függvény, akkor a hozzá tartozó ablak Fourier-transzformáltra bármely $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-re*

$$f(x) = \frac{1}{\|\varrho\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(.,t)(-x)\varrho(x-t)\,dt$$

majdnem minden x-re, ahol az $\mathbb{L}^2$-beli Fourier-transzformált a kipontozott frekvencia változóban értendő.

Bizonyítás. Mivel $\tilde{f}$ a három változójában mérhető

$$(x,\nu,t) \mapsto \overline{\varrho}(x-t)f(x)e^{-2\pi i\nu x}$$

függvény x szerinti integrálja, mérhető. Mivel az $(x,t) \mapsto \overline{\varrho}(x-t)f(x)$ függvény minden t-re négyzetesen integrálható, $\hat{\tilde{f}}(.,t)$ az $f\tau_t\overline{\varrho}$ megfordítása majdnem mindenütt, azaz $\hat{\tilde{f}}(.,t)(-x) = f(x)\overline{\varrho}(x-t)$ majdnem minden x-re. Szorozva $\varrho(x-t)$-vel és integrálva t szerint, kapjuk a bizonyítandó állítást.

18.34. Tétel. *Legyen $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ egy ablak függvény. Ekkor bármely $h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$-re, ha*

$$f_h = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega,t} h(\omega,t)\,dt\,d\omega,$$

akkor bármely $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-re, amelyre $f \neq f_h$, teljesül, hogy $\|h - \tilde{f}\|_2 > \|h - \tilde{f}_h\|_2$.

A továbbiakban olyan formulákat keresünk, amelyek a Gábor-transzformált diszkrét helyeken vett értékeiből állítják vissza a függvényt. Az ilyen formulák őse a mintavételi tétel:

18.35. Mintavételi tétel. *Legyen $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ folytonos függvény, amely „sávhatárolt N-nel", azaz amelyre $\hat{f}(\nu) = 0$, ha $\nu \notin [-N,N]$. Ekkor $t_n = n/(2N)$ jelöléssel*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin\bigl(2\pi N(t-t_n)\bigr)}{2\pi N(t-t_n)} \hat{f}(t_n);$$

itt $t = t_n$ esetén a tört értékének a határértéke $(= 1)$ veendő.

Bizonyítás. Mivel $\hat{f}$ sávhatárolt, $\hat{f} \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, és az inverziós tétel szerint

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\nu)e^{2\pi it\nu}\,d\nu \int_{-N}^{N} \hat{f}(\nu)e^{2\pi it\nu}\,d\nu.$$

Mivel $\hat{f} \in \mathbb{L}^2[-N,N]$, Fourier-sorba fejthető,

$$\hat{f}(\nu) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\pi i n\nu/N},$$

ahol

$$c_n = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\nu) e^{-\pi i n \nu}\, d\nu.$$

A fentiek szerint az integrál $f\big(-n/(2N)\big)$, így $c_n = f\big(-n/(2N)\big)/(2N)$. A Fourier-sort behelyettesítve az inverziós formulába

$$f(t) = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i t \nu}\, d\nu = \langle \hat{f}, \mathbf{e}_{-t} \rangle = \Big\langle \sum c_n \mathbf{e}_{n/(2N)}, \mathbf{e}_{-t} \Big\rangle.$$

Mivel a belső szorzat folytonos,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big) \int_{-N}^{N} e^{\pi i n \nu/N} e^{2\pi i t \nu}\, d\nu \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big) \int_{0}^{N} \cos \pi\nu(2t + n/N)\, d\nu \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big) \left[\frac{\sin \pi\nu(2t+n/N)}{\pi(2t+n/N)}\right]_0^N \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big) \frac{\sin \pi(2Nt+n)}{\pi(2Nt+n)}.
\end{aligned}$$

18.36. Diszkrét rekonstrukciós formula. *Legyen $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ egy kompakt tartójú ablak függvény, amely eltűnik egy $1/\nu$ hosszúságú intervallumon kívül. Legyen*

$$H_\tau(x) = \tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|g(x - n\tau)\big|^2.$$

(Ha g majdnem mindenütt folytonos, akkor $\tau \downarrow 0$ esetén $H_\tau(x) \to \|g\|_2^2$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.) Tegyük fel, hogy

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}} H_\tau(x) \quad \textit{és} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} H_\tau(x) < \infty.$$

(Ez csak $\nu\tau \le 1$ esetén lehetséges.) Ekkor

$$f(t) = \nu\tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{g_{m\nu,m\tau}(t)}{H_\tau(t)} \tilde{f}(m\nu, n\tau).$$

A továbbiakban skálafüggetlen módszert keresünk.

18.37. Definíció. Legyen $p \in \overline{\mathbb{R}}$ rögzített, és egy $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényre legyen $\psi_s(x) = |s|^{-1/p}\psi(x/s)$ és $\psi_{s,t}(x) = |s|^{-1/p}\psi\big((x-t)/s\big)$; ez a ψ *anyawavelet*hez tartozó *waveletcsalád* (itt $1/\infty = 0$). Ha $1 \le q < \infty$, akkor

$$\|\psi_{s,t}\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} |s|^{-q/p}\Big|\psi\big((x-t)/s\big)\Big|^q \, dx = |s|^{-q/p}\int_{\mathbb{R}}\big|\psi(y)\big|^q |s| \, dy = |s|^{1-q/p}\|\psi\|_q^q,$$

így $p = q$ esetén a norma nem változik; $q = \infty$-re $\|\psi_{s,t}\|_\infty = |s|^{-1/p}\|\psi\|_\infty$.

18.38. Példa. Anyawaveletnek alkalmas például $\psi(x) = xe^{-x^2}$ vagy a deriváltja, a $\psi(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ „mexikói kalap”.

18.39. Feladat [8]. Számoljuk ki az előző példában szereplő anyawaveletek Fourier-transzformáltját.

18.40. Definíció. Legyen $p \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rögzített. Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény *folytonos wavelet transzformált*ja az

$$\tilde{f}(s,t) = \langle f, \psi_{s,t}\rangle = \big\langle \hat{f}, (\psi_{s,t})\hat{}\,\big\rangle$$

függvény. Egyszerű számolással $(\psi_{s,t})\hat{}(\omega) = |s|^{1-1/p}e^{-2\pi i\omega t}\hat{\psi}(s\omega)$, így $\tilde{f}(s,t)$ az $\omega \mapsto |s|^{1-1/p}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}}(s\omega)$ függvény Fourier-transzformáltja a $-t$ helyen.

18.41. Szimmetrikus rekonstrukciós formula. *Az előző definíció jelöléseivel, tegyük fel, hogy*

$$0 < C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\big|\hat{\psi}(\xi)\big|^2}{|\xi|} \, d\xi < \infty.$$

Ekkor tetszőleges $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ visszaállítható $\tilde{f}$-ból:

$$f = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2/p-3}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s,t)\psi_{s,t} \, dt \, ds.$$

18.42. Megjegyzés. Ha $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, akkor $\hat{\psi}$ folytonos, így a feltételből $\hat{\psi}(0) = 0$, azaz $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, dx = 0$.

18.43. Asszimmetrikus rekonstrukciós formula. *Az előző definíció jelöléseivel, tegyük fel, hogy*

$$0 < C_+ = \int_0^{\infty} \frac{\big|\hat{\psi}(\xi)\big|^2}{|\xi|} \, d\xi < \infty$$

és

$$0 < C_- = \int_{-\infty}^{0} \frac{\big|\hat{\psi}(\xi)\big|^2}{|\xi|} \, d\xi < \infty.$$

Legyen

$$\eta(u) = \frac{\eta_+(u)}{C_+} + \frac{\eta_-(u)}{C_-},$$

ahol

$$\eta_+(u) = \int_0^\infty \hat{\psi}(\omega) e^{2\pi i \omega u}\, d\omega \quad \textit{és} \quad \eta_-(u) = \int_{-\infty}^0 \hat{\psi}(\omega) e^{2\pi i \omega u}\, d\omega.$$

Ekkor

$$f = \int_0^\infty |s|^{2/p-3} \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(s,t) \eta_{s,t}\, dt\, ds.$$

18.44. Megjegyzés. Ha $C_- = 0$ vagy $C_+ = 0$, akkor $\tilde{f}(s,t)$, $s > 0$ nem tartalmaz információt $\hat{f}$ egyik feléről. Ez nem fordulhat elő, ha ψ valós, mert ekkor $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}}(\omega)$.

18.45. Megjegyzés. Diszkrét visszaállítás is lehetséges, ekkor $s = \pm\sigma^m$, $t = n\sigma^m\tau$, $m, n \in \mathbb{Z}$. A folytonos és a diszkrét esetnek, valamint az ablak Fourier-transzformáltnak van közös általánosítása, a különböző „frame"-ek.

18.46. Hardy-tér a felső és alsó (illetve bal és jobb) félsíkon. Jelölje $\mathbb{C}^+$ a nyílt komplex felső félsíkot, $\mathbb{C}^-$ pedig a nyílt komplex alsó félsíkot, azaz legyen $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ és $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$. Ha $1 \le p < \infty$, legyen H^p_+ azon $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ komplex függvények halmaza, amelyek analitikusak, és amelyekre

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p\, dx$$

korlátos, mint $y > 0$ függvénye. Egy $f \in H^p_+$ függvényre legyen

$$\|f\| = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Legyen H^∞_+ azon $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ komplex függvények halmaza, amelyek analitikusak és korlátosak. Egy $f \in H^\infty_+$ függvényre legyen $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}, y>0} \bigl|f(x+iy)\bigr|$. Legyen $f \in H^p_-$ pontosan akkor, ha az $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ függvény H^p_+ eleme; ezek a függvények az alsó félsíkon analitikusak. (Ha a Fourier-transzformált helyett Laplace-transzformáltat akarunk használni, akkor a felső félsíknak a bal, az alsó félsíknak a jobb félsík felel meg.)

18.47. Definíció. Ha $x \in \mathbb{R}$, jelentse $\lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z) = c$ azt, hogy minden $C > 0$-ra az f függvény $\{\xi + i\eta : \xi, \eta \in \mathbb{R}, |\xi - x| < C\eta\}$ halmazra vett megszorításának c a határértéke az x pontban; $\lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x}$ a *nemtangenciális határérték*.

18.48. Tétel. *Ha $1 \le p \le \infty$, $f \in H^p_+$, akkor $f(x) := \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ majdnem mindenütt létezik, $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, továbbá $x \mapsto \ln\bigl|f(x)\bigr|/(1+x^2)$ integrálható.*

18.49. Következmény: Poisson-formula. *Ha* $1 \le p \le \infty$, $f \in H_+^p$, *akkor* $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *esetén*

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f(t)\,dt.$$

Megfordítva, ha $h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *és*

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} h(t)\,dt$$

analitikus a felső félsíkon, akkor $f \in H_+^p$ *és* $h(x) = \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ *majdnem mindenütt. Továbbá az* $x \mapsto f(x+iy)$ *függvény* $\mathbb{L}^p$*-normája tart az* $x \mapsto f(x)$ *függvény* $\mathbb{L}^p$*-normájához, ha* $y \downarrow 0$.

18.50. Következmény. *Ha* $1 \le p < \infty$, $f \in H_+^p$, *akkor*

$$\lim_{y\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \left|f(x+iy) - f(x)\right|^p dx = 0.$$

18.51. Tétel: Cauchy-formula. *Ha* $1 \le p \le \infty$, $f \in H_+^p$, *akkor* $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *esetén*

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x+iy)}\,dt \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x-iy)}\,dt = 0$$

Megfordítva, ha $h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *és* $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *esetén*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x-iy)}\,dt = 0,$$

akkor az

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x+iy)}\,dt$$

összefüggéssel definiált függvényre $f \in H_+^p$ *és* $h(x) = \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ *majdnem mindenütt.*

18.52. Megjegyzés. A fentiek alapján úgy tekinthető, hogy $H_+^p \subset \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, ha $1 \le p \le \infty$. Megmutatható, hogy zárt altér, így maga is Banach-tér.

18.53. Paley–Wiener-tétel. *Egy* $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *függvény pontosan akkor van* H_+^2*-ben, ha a Fourier-transzformáltja majdnem mindenütt nulla a* $[0,+\infty[$ *intervallumon kívül.*

18.54. Megjegyzés. Ebből már könnyen következik, hogy egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény pontosan akkor van H^2_--ben, ha a Fourier-transzformáltja majdnem mindenütt nulla a $]-\infty, 0]$ intervallumon kívül. Mivel a Fourier-transzformáció $\mathbb{L}^2$-n belső szorzat tartó, minden $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény egyértelműen írható fel egy $f_+ \in H^2_+$ és egy $f_- \in H^2_-$ függvény ortogonális összegeként. A megfelelő $P_+ : \mathbb{L}^2 \to H^2_+$ és $P_- : \mathbb{L}^2 \to H^2_-$ ortogonális projekciókat *Riesz-projekció*nak hívjuk.

18.55. Definíció. Legyen $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rögzített. Az előző pont jelöléseivel az ehhez a függvényhez tartozó $T_\varphi : H^2_+ \to H^2_+$ *Töplitz-operátor*t a $T_\varphi f = P_+(\varphi f)$ összefüggés, a $H_\varphi : H^2_+ \to H^2_-$ *Hankel-operátor*t pedig a $H_\varphi f = P_-(\varphi f)$ összefüggés definiálja.

18.56. Nehari tétele. *Az előző definíció jelöléseivel, ha* $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, *akkor* $\|H_\varphi\| = d(\varphi, H^\infty_+)$, *ahol a* d *távolság* $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$*-ben értendő.*

- 442/13 :

$<$

19.6. Tétel. 19.4 jelöléseivel, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{C}^m(Q)$ és az $x \in M$

$>$

19.6. Tétel. 19.4 jelöléseivel, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{C}^{m+1}(Q)$ és az $x \in M$

- 447/-11 :

$<$

jelölésekkel, az $n = 1$, $m = 1$ eset vizsgálatára szorítkozunk.

$>$

jelölésekkel, az $m = 1$, $L \in \mathcal{C}^2(Q)$ eset vizsgálatára szorítkozunk.

- 447/-3 :

$<$

hogy a $\frac{d}{dt}\big(L(x,x') - x'L_{x'}(x,x')\big)$ függvény nulla, így az elsőrendű

$$L(x,x') - x'L_{x'}(x,x') = c$$

egyenletre jutunk.

$>$

hogy a $\frac{d}{dt}\big(L(x,x') - L_{x'}(x,x')x'\big)$ függvény nulla, így az elsőrendű

$$L(x,x') - L_{x'}(x,x')x' = c$$

egyenletre jutunk.

- 448/6 :

$<$

19.15. Brachisztochon-probléma. Egy tömegpont egy sima pályán

$>$

19.15. Brachisztochon-probléma [10]. Egy tömegpont egy sima pályán

- 448/−8 :

$<$

differenciálható, akkor az $u^{(m)}(x)$ szimmetrikus m-lineáris forma koordinátái

$>$

differenciálható, akkor az $u^{(m)}(x)$ szimmetrikus m-lineáris leképezés koordinátái

- 448/−66 :

$<$

ós, rögzített peremű variációs problémát.. Legyenek n, m, k pozitív termé-

$>$

ós, rögzített peremű variációs problémát. Legyenek n, m, k pozitív termé-

- 450/9 :

$<$

$$\int_G \Big(\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{\alpha} \partial^{\alpha} (L_{\partial^{\alpha} u}) \Big) v = 0,$$

$>$

$$\int_G \Big(\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} (L_{\partial^{\alpha} u}) \Big) v = 0,$$

- 452/−3 :

$<$

$$f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\arctan n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$>$

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\operatorname{arctg} n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

19.23.5 Feladat [8]**.** Tekintsünk egy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ hatványsort 1 konvergencia-sugárral és az egyszerűség kedvéért valós együtthatókkal. Mutassuk meg, hogy az összeg u valós része gradiense hosszának négyzetintegrálja a körlapon $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2$. Megfelelő együtthatósorozatot választva érjük el, hogy legyen a hatványsor egyenletesen konvergens (így u a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-probléma megoldása), de az integrál értéke végtelen.

- 454/11 :

$<$

állapot és vezérlési függvények, valamint a t_2 végpont meghatározása.

$>$

állapot és vezérlési függvények, valamint a t_1 végpont meghatározása.

- 454/−9 :

$<$

Ha a vezérlési függvény függ x'-től, akkor az $x'(t) = \tilde{w}(t)$ összefüggés

$>$

Ha az f vagy az L függvény függ x'-től, akkor az $x'(t) = \tilde{w}(t)$ összefüggés

- 455/−9 :

  $<$

Pontrjagin-függvény, akkor létezik $\lambda \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$, *nem mindkettő nulla és* $p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{m*}$ *folytonos függvény úgy, hogy*

  $>$

Pontrjagin-függvény, *akkor létezik* $\lambda \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$, *nem mindkettő nulla és* $p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n*}$ *folytonos függvény úgy, hogy*

- 455/−3 :

  $<$

transzverzalitási feltételek. Létezik továbbá olyan $p_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *folytonos*

  $>$

transzverzalitási feltétele*k. Létezik továbbá olyan* $p_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *folytonos*

- 456/3 :

  $<$

transzverzalitási feltétel. A λ *mindig választható 1-nek vagy 0-nak. Ha* $g \equiv 0$, *akkor* $\lambda = 1$.

  $>$

transzverzalitási feltétel. *A* λ *mindig választható 1-nek vagy 0-nak. Ha* $g_i \equiv 0$, *akkor* $\alpha_i = 0$ *választható.*

- 456/−14 :

  $<$

könyvének III. kötete 48. §-ára utalunk.

  $>$

könyvének III. kötete 48. §-ára utalunk.

* **19.33.1. Feladat [10].** Oldjuk meg a következő irányítási feladatot: az egyenesen kell egy tömegpontot eljuttatni −1-ből 1-be minimális idő alatt, 1-nél kisebb abszolút értékű gyorsulással.

* **19.33.2. Feladat [11].** Oldjuk meg a következő irányítási feladatot: az egyenesen x_0 helyen tartózkodó v_0 sebességű tömegpontot kell minimális idő alatt az origóban megállítani. Mutassuk meg, hogy a vezérlés felírható a pillanatnyi hely és sebesség függvényeként. Ábrázoljuk a mozgást a fázistérben.

* **19.33.3. Feladat [12].** Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket a (függőleges) „sima” Holdraszállás minimális üzemanyagfelhasználással irányítási feladatára az alábbi feltételekkel, a Hold forgását figyelmen kívül hagyva (a gyorsulás 0 és a között lehet):

(1) sem az űrhajó tömegének, sem a gravitációs mezőnek a változását nem vesszük figyelembe;

(2) csak az űrhajó tömegének változását vesszük figyelembe;

(3) mindkettőt figyelembe vesszük.

* **19.33.4. Feladat [11].** Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket a rakétaindítás feladatára homogén gravitációs térben. A rakétának minimális üzemanyagfelhasználással kell egy adott pontot elérnie, a gyorsulás 0 és a között lehet.

* **19.33.5. Feladat: visszatérés a Holdról [13].** A feladat egy űrhajó lefékezése a Föld légkörében és Föld körüli pályára állítás minimális felmelegedéssel. Legyen x_1 a sebesség, x_2 a hajlási szög a „pillanatnyi vízszinteshez”, x_3 a magasság a felszín felett R földsugár egységekben véve, w a „fékezés”, $\varrho = \varrho_0 e^{-\beta R x_3}$ a levegő sűrűsége. A kezdeti adatok $x_1(t_0) = 10{,}8$ km/s, $x_2(t_0) = 0{,}0045\pi$, $x_3(t_0) = 120$ km/R, a céladatok $x_0(t_1) = 8{,}1$ km/s, $x_2(t_1) = 0$, $x_3(t_1) = 75$ km/R. Az $x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, w)$ vezérlési feltételekben

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{F\varrho x_1^2}{2} c_1(w) - \frac{g \sin x_2}{(1+x_3)^2}, \\ f_2 &= \frac{F\varrho x_1}{2} c_2(w) + \frac{x_1 \cos x_2}{R(1+x_3)} - \frac{g \cos x_2}{x_1(1+x_3)^2}, \\ f_3 &= \frac{x_1 \sin x_2}{R}; \end{aligned}$$

itt F az űrhajó keresztmetszet/tömege, g a gravitációs gyorsulás, $c_1(w) = 1{,}174 - 0{,}9 \cos w$, $c_2(w) = 0{,}6 \sin w$, a (nem SI egységekben megadott!) aerodinamikus ellenállás illetve emelő erő. A felmelegedést kívánjuk minimalizálni, a közelítő gyakorlati formula:

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^3 \sqrt{\varrho} \to \min .$$

Az űrhajósokról feltesszük, hogy bármit kibírnak, a Föld nyugvó gömb, és a Föld középpontján átmenő síkban repülünk. Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket, határozzuk meg a vezérlést, és visszaírva az egyenletekbe, határozzuk meg a differenciálegyenleteket és a peremfeltételeket. (Az adott numerikus esetben a magasság lemegy kb. 50 km-ig, majd nő, a sebesség kezdetben kicsit nő, majd csökken, $t_1 = 224{,}9$ s.)

- 457/9 :

  $<$

  $$p' = -H_x = \lambda L_x, \quad p(t_1) = -\alpha, \quad \tilde{p}' = -H_{\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{p}(t_1) = -\tilde{\alpha},$$

  $>$

  $$p' = -H_x = \lambda L_x, \quad p(t_1) = -\alpha, \quad \tilde{p}' = -H_{\tilde{x}} = \lambda L_{\tilde{x}}, \quad \tilde{p}(t_1) = -\tilde{\alpha},$$

- 457/−4.. − 1 :

  $<$

$$L_x\big(t, x(t), x'(t)\big) \quad \text{és} \quad L_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big)x'(t) - L\big(t, x(t), x'(t)\big)$$

bal és jobboldali határértéke megegyezik, ezek a *Weierstrass–Erdmann-féle törési feltétel*ek. Figyeljük meg a Pontrjagin-függvény szoros kapcsolatát a mechanikában használatos Hamilton-függvénnyel.

$>$

$$L_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big) \quad \text{illetve} \quad L_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big)x'(t) - L\big(t, x(t), x'(t)\big)$$

bal és jobb oldali határértéke megegyezik, ezek a *Weierstrass–Erdmann-féle törési feltétel*ek. Figyeljük meg a Pontrjagin-függvény szoros kapcsolatát a mechanikában használatos Hamilton-függvénnyel.

* **19.34.1. Feladat [11].** Alkalmazzuk a Pontrjagin-féle maximumelvet a szakaszonként folytonosan differenciálható $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvényekre vonatkozó

$$\int_a^b L\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt \to \min, \quad x(a) = x_0, \quad x(b) = x_1$$

$$\int_a^b f\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt = c$$

mellékfeltételes problémára, és vezessük le a megfelelő Euler–Lagrange-egyenleteket.

* **19.34.2. Feladat [11].** Határozzuk meg két végén felfüggesztett homogén súlyos lánc alakját (láncgörbe).

- $458/-1:$

$<$

közelítés javítható. Például a Newton-módszer alkalmazásával kaphatunk jobb közelítéseket adó $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ paramétersorozatot.

$>$

közelítés javítható, és kaphatunk jobb közelítéseket adó $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ paramétersorozatot.

* **19.36. Diszkrét irányítási feladat.** Tipikus esetként tekintsünk egy gyártási folyamatot, amelyben egy x_1 kezdeti állapotból kiindulva, ha egy w_1 vezérlést választottunk, az $x_2 = \varphi_1(x_1, w_1)$ állapotba jutunk, ahol $x_1 \in \mathbb{R}^N$, $w_1 \in W_1 \subset \mathbb{R}^M$, és közben $k_1(x_1, w_1)$ költség lép fel, majd ha egy w_2 vezérlést választunk, az $x_3 = \varphi_2(x_2, w_2)$ állapotba jutunk, ahol $x_2 \in \mathbb{R}^N$, $w_2 \in W_2 \subset \mathbb{R}^M$, és közben $k_2(x_2, w_2)$ költség lép fel stb. (Például lehet x_j összesen N kémiai anyag eloszlása a j-edik lépés előtt egy vegyipari gyártási folyamatban.) A φ_j és k_j függvények adottak, és álljon

a gyártás összesen n lépésből; az utolsó költségbe annak a költségét is beleértjük, hogy a végtermék elmarad valamely „ideális" végterméktől. Legyen

$$K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) := \sum_{j=r}^{n} k_j(x_j, w_j)$$

az utolsó $n - r + 1$ lépés költsége, és

$$(r, x_r) \mapsto S_r(x_r) := \inf_{w_r, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n), \quad S_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$

az úgynevezett *Bellman-függvény*.

* **19.37. Tétel.** *Az előző pont jelöléseivel,*

(1) a Bellman-függvényre

$$S_r(x_r) = \inf_{w_r \in W_r} k_r(x_r, w_r) + S_{r+1}\big(\varphi_r(x_r, w_r)\big), \quad \textit{ha} \quad r = 1, \dots, n;$$

(2) az x_r és $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, n$ változókra a $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = r, \dots, n$ értékekkel pontosan akkor teljesül, hogy

$$S_r(x_r) = K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n),$$

ha

$$S_j(x_j) = k_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = r, \dots, n.$$

Bizonyítás. (1)-hez nyilván

$$K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) = k_r(x_r, w_r) + K_{r+1}\big(\varphi(x_r, w_r), w_{r+1}, \dots, w_n\big)$$

teljesül a költségekre. Mivel nyilván

$$\inf_{w_r, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) = \inf_{w_r} \inf_{w_{r+1}, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n),$$

kapjuk (1)-et.

(2)-höz tetszőleges $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, n$-re a megfelelő $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = r, \dots, n$ értékekkel

$$S_r(x_r) \le k_r(x_r, w_r) + S_{r+1}(x_{r+1}) \le \dots \le K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n).$$

Ha az adott értékekre egyenlőség áll, akkor mindenütt egyenlőségnek kell állnia, így kapjuk (2)-t.

* **19.38. Következmény: Bellman-féle optimum elv.** *A következő két állítás ekvivalens:*

(1) az x_1 és $w_j \in W_j$, $j = 1, \ldots, n$ változókra az $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = 1, \ldots, n$ értékekkel

$$S_1(x_1) = K_1(x_1, w_1, w_2, \ldots, w_n);$$

(2) az x_1 és $w_j \in W_j$, $j = 1, \ldots, n$ változókra az $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = 1, \ldots, n$ értékekkel

$$S_m(x_m) = K_m(x_m, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n)$$

teljesül, ha $m = 1, 2, \ldots, n$.

* **19.39. Bellman módszere.** Meghatározva az optimális vezérléseket az

$$S_j(x_j) = k_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1})$$

egyenletekből $j = n, n-1, \ldots, 1$-re x_j függvényében, kapjuk az optimális vezérlést.

A következő célunk a Lagrange-elv általánosítása Banach-terekre, egyenlőtlenség típusú feltételeket is megengedve. Az eszköz a Dubovickij–Miljutyin-elmélet lesz. A Lagrange-elv általános alakja lehetővé teszi a Pontrjagin-féle maximumelv bizonyítását is. Részben Páles [102] jegyzetét, részben Zeidler [147] könyvét követjük.

* **19.40. Konvex függvények.** Egy X valós normált tér egy részhalmazát $[-\infty, +\infty]$-be képező F függvényt *konvex*nek nevezünk, ha $0 < \alpha < 1$ esetén

$$F\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \le \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y),$$

valahányszor a jobb oldal értelmezve van. Minden ilyen függvényt kiterjeszthetünk az egész X-en konvex függvénnyé, ha az eredeti értelmezési tartományán kívül $+\infty$-nek definiáljuk. Nyilván ha F nem vette fel a $+\infty$ értéket, akkor visszakaphatjuk a kiterjesztésből. Általánosabban, azon pontok halmaza, ahol $F(x) < +\infty$, egy konvex halmaz. Ha ezen a halmazon valahol $F(x) = -\infty$, akkor az egész halmazon.

* **19.41. Állítás.** *Egy X normált teret $[-\infty, +\infty]$-be képező F függvényre az alábbiak ekvivalensek:*

(1) F folytonos x-ben;

(2) F felülről korlátos az x egy környezetében.

Továbbá ha egy U nyílt halmazon F véges és valamely pontjában folytonos, akkor az egész U-n folytonos.

Bizonyítás. Nyilván (1)-ből következik (2). A megfordításhoz feltehetjük, hogy $x = 0$, $F(x) = 0$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{U}_r(0)$-n F-nek felső korlátja M. Ha $0 < \varepsilon < 1$, akkor

$$y = (1-\varepsilon)\cdot 0 + \varepsilon \frac{y}{\varepsilon}, \quad 0 = \frac{1}{1+\varepsilon} y + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{-y}{\varepsilon},$$

így ha $y \in \mathbb{U}_{\varepsilon r}(0)$, akkor

$$F(y) \leq (1-\varepsilon)F(0) + \varepsilon F(y/\varepsilon) \leq \varepsilon M,$$

és ha $-y \in \mathbb{U}_{\varepsilon r}(0)$, akkor

$$F(y) \geq (1+\varepsilon)F(0) - \varepsilon F(-y/\varepsilon) \geq -\varepsilon M.$$

A második állítás bizonyításához feltehetjük, hogy $0 \in U$ és F a 0-ban folytonos. Az F felülről korlátos valamilyen M-mel valamely $\mathbb{U}_r(0)$-n. Legyen $x \in U$ és válasszunk olyan $\varrho > 1$-et, amelyre $\varrho x \in U$. A $h(y) = (1-1/\varrho)y + (1/\varrho)(\varrho x)$ összefüggéssel definiált h homeomorfizmusa X-nek önmagára, $h(0) = x$, így h a nulla $\mathbb{U}_r(0)$ környezetét x egy $h\big(\mathbb{U}_r(0)\big)$ környezetére képezi. Mivel

$$F\big(h(y)\big) \leq (1-1/\varrho)F(y) + \frac{1}{\varrho}F(\varrho x) \leq (1-1/\varrho)M + \frac{1}{\varrho}F(\varrho x),$$

és mivel (2)-ből következik (1), F folytonos x-ben. □

* **19.42. Következmény.** *Véges dimenziós normált tér nyílt konvex részhalmazán valós értékű konvex függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen F az eredeti U értelmezési tartományon kívül $+\infty$, és legyen $x \in U$. Feltehetjük, hogy $x = 0$. Válasszunk egy $S \subset U$ szimplexet, amely belsejében tartalmazza a 0-t, például a szokásos bázisvektorok és összegük ellentettje konvex burkának ε-szorosát egy alkalmas $\varepsilon > 0$-ra. Mivel F korlátos S-en, folytonos a belsejében, így 0-ban is. □

* **19.43. Definíció.** Egy X valós normált tér (vagy akár lineáris tér) egy K részhalmazát *kúp*nak nevezzük, ha $u \in K$, $\alpha > 0$ esetén $\alpha u \in K$.

A $K \subset X$ kúp *duális kúp*ja a

$$K^+ = \big\{ f \in X^* : f(u) \geq 0, \text{ ha } u \in K \ \big\}$$

halmaz. Nyilvánvaló, hogy K^+ konvex, zárt és nem üres kúp X^*-ban.

Legyen $U \subset X$ nyílt. A $h_0 \in X$ vektort az $F : U \to \mathbb{R}$ függvény $u_0 \in U$-beli *csökkenési irány*ának nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és V környezete h_0-nak, hogy $0 < t < \varepsilon$, $h \in V$ esetén

$$\frac{F\big(u_0 + th)\big) - F(u_0)}{t} < 0.$$

Ha $N \subset X$, a $h_0 \in X$ vektort az $u_0 \in X$-ben N-re nézve *megengedett irány*nak nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és V környezete h_0-nak, hogy $0 < t < \varepsilon$, $h \in V$ esetén $u_0 + th \in N$.

Ha $N \subset X$, a $h \in X$ vektort az $u_0 \in X$-ben N-re nézve *félérintő irány*nak nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és $t \mapsto u(t)$ görbe, hogy $u(t) = u_0 + th + \omega(t) \in N$, ha $0 < t < \varepsilon$, ahol $\lim_{t \downarrow 0} \omega(t)/t = 0$.

Világos, hogy a megengedett irányok egyben félérintő irányok is, a félérintő irányok, a megengedett irányok és a csökkenési irányok is kúpot alkotnak, és a két utóbbi nyílt.

A Dubovickij–Miljutyin-elmélet alapgondolata egyszerű: ha F-nek u_0-ban minimuma van N-nen, akkor nem lehet olyan csökkenési irány, amely megengedett irány. Pontosabban, az alábbi lemma teljesül.

* **19.44. Dubovickij–Miljutyin-lemma.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ nyílt és $F_0 : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $N_1, \dots, N_n, N_{n+1} \subset X$ tetszőleges halmazok. Az*

$$F_0(u) \to \min, \quad u \in \bigcap_{j=1}^{n+1} N_j$$

feltételes minimumfeladat u_0 megoldására

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset,$$

ahol K_0 az F_0 függvény u_0-beli csökkenési irányainak kúpja, K_j az N_j halmaz u_0-beli megengedett irányainak kúpja, K_{n+1} pedig az N_{n+1} halmaz u_0-beli félérintő irányainak kúpja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a metszet nem üres, h_0 egy eleme. Ekkor létezik egy V környezete h_0-nak, $\varepsilon > 0$, és $\omega : [0, \varepsilon[\to X$, hogy

$$F_0(u_0 + th) < F(u_0), \quad u_0 + th \in \bigcap_{j=1}^{n} N_j, \quad u_0 + th_0 + \omega(t) \in N_{n+1},$$

ha $0 < t < \varepsilon$, $h \in V$, továbbá $\lim_{t \downarrow 0} \omega(t)/t = 0$. Csökkentve ε-t, feltehetjük, hogy $h(t) = h_0 + \omega(t)/t \in V$, ha $0 < t < \varepsilon$. Ekkor $u_0 + th(t) \in N_j$, ha $j = 1, \dots, n, n+1$ és $F_0\big(u_0 + th(t)\big) < F_0(u_0)$, ha $0 < t < \varepsilon$, ami ellentmondás. $\square$

* **19.45. Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemma.** *Legyen X valós normált tér, $K_0, \dots, K_n, K_{n+1} \subset X$, $n \geq 0$ nem üres konvex kúpok, és tegyük fel, hogy $K_0, \dots, K_n$ nyíltak. Ekkor*

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$$

pontosan akkor teljesül, ha léteznek nem mind nulla $f_i \in K_i^+$ funkcionálok, hogy $f_0 + \cdots + f_n + f_{n+1} = 0$.

Bizonyítás. Az elégségesség bizonyításához vegyük észre, hogy $f_0 = 0, \dots, f_n = 0$ nem lehetséges, mert akkor minden f_j nulla lenne. Legyen $f_j \neq 0$, $f_j(v) \neq 0$. Ha u a metszet egy eleme lenne, akkor $f_j(u + \lambda v) \geq 0$ lenne, ha $|\lambda|$ elég kicsi, ahonnan $f_j(u) > 0$ következne. Mivel $f_i \in K_i^+$, minden f_i nemnegatív a metszeten, nem lehet az összegük nulla u-ban.

A szükségesség bizonyításához legyen $A = K_0 \times \cdot \times K_n$ és

$$B = \big\{(u, u, \dots, u) \in X^{n+1} : u \in K_{n+1}\big\}.$$

Az A és B diszjunk nem üres konvex kúpok X^{n+1}-ben, A nyílt. A Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan $f \neq 0$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(b) \leq c \leq f(a)$, ha $a \in A$, $b \in B$. Mivel A és B kúpok, $\lambda > 0$ esetén $\lambda f(b) \leq c \leq \lambda f(a)$ is teljesül, ahonnan $\lambda \downarrow 0$ határátmenettel $c = 0$. Legyen $f_0(u) = f(u, 0, \dots, 0), \dots, f_n(u) = (0, \dots, 0, u)$ és $f_{n+1}(u) = -f(u, u, \dots, u)$. Nyilván $f_{n+1}(u) \geq 0$, ha $u \in K_{n+1}$. Mivel f nem nulla, és $f(u_0, u_1, \dots, u_n) = f_0(u_0) + f_1(u_1) + \dots + f_n(u_n)$, a jobb oldalon szereplő funkcionálok valamelyike nem nulla. Ha $u_i \in K_i$ rögzített, akkor

$$(\lambda u_0, \dots, \lambda u_{j-1}, u_j, \lambda u_{j+1}, \dots, \lambda u_n) \in A,$$

így

$$\lambda f_0(u_0) + \dots + \lambda f_{j-1}(u_{j-1}) + f_j(u_j) + \lambda f_{j+1}(u_{j+1}) + \dots + \lambda f_n(u_n) \geq 0,$$

ahonnan $\lambda \downarrow 0$ határátmenettel $f_j(u_j) \geq 0$, ha $u_j \in K_j$. $\square$

* **19.46. Dubovickij–Miljutyin-tétel.** *A Dubovickij–Miljutyin-lemma jelöléseivel, az ottani feltételes minimumfeladatot kívánjuk vizsgálni. Tegyük fel, hogy* $n \geq 0$, $N_j^\circ \neq \emptyset$, *ha* $j = 1, \dots, n$, *és* $K_0, \dots, K_{n+1}$ *konvex nem üres halmazok. Ekkor*

(1) *Szükséges feltétel: ha* u_0*-ban feltételes minimum van, akkor léteznek* $f_i \in K_i^+$, $i = 0, \dots, n+1$ *nem mind nulla funkcionálok, hogy* $f_0 + \dots + f_{n+1} = 0$.

(2) *Nemelfajulás: ha*
$$\bigcap_{i \neq k} K_i \neq \emptyset,$$
akkor $f_k \neq 0$.

(3) *Elégséges feltétel: az (1)-ben szereplő szükséges feltétel elégséges is, ha még teljesül az is, hogy* $F_0 : X \to \mathbb{R}$ *konvex és folytonos, továbbá teljesül a Slater-feltétel: van olyan* h, *amelyre* $h \in N_j^\circ$, $j = 1, \dots, n$ *és* $h \in N_{n+1}$.

A szükséges feltétel nyilván lokális feltételes minimum esetén is fennáll.

Bizonyítás. A szükséges feltétel következik a Dubovickij–Miljutyin-lemmából és Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemmából.

Ha $f_k = 0$ és $\cap_{i \neq k} K_i \neq \emptyset$ lenne, akkor $f_0 + \dots + f_{n+1} = 0$ ellentmondana a Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemmának.

Az elégségesség bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy van olyan u_1, amire $F_0(u_1) < F_0(u_0)$ és $u_1 \in N_j$, $j = 1, \dots, n+1$. Legyen $u = tu_1 + (1-t)h$, ha $0 < t < 1$. A Slater-feltétel szerint $u \in N_j^\circ$ és $u \in N_{n+1}$. A K_i definíciója szerint $u - u_0 \in K_i$, ha $i \geq 1$. Ha megmutatjuk, hogy $u - u_0 \in K_0$, akkor az a Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemma miatt ellentmond (1)-nek. Az F_0 folytonossága miatt találhatunk olyan kis $t > 0$-t, hogy $F_0(u) < F_0(u_0)$. Ha $0 < \varepsilon < 1$, akkor

$$F_0\big(u_0 + \varepsilon(u - u_0)\big) \leq \varepsilon F_0(u) + (1 - \varepsilon) F_0(u_0),$$

ahonnan

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F_0\big(u_0 + \varepsilon(u - u_0)\big) - F_0(u_0)}{\varepsilon} \leq F_0(u) - F_0(u_0) < 0,$$

azaz $u - u_0 \in K_0$; a határérték létezése F_0 konvexségéből következik. $\square$

* **19.47. Definíció.** Legyen X valós vektortér, $U \subset X$ nyílt, $u_0 \in U$ és $F : U \to \mathbb{R}$. Az F csökkenési irányait az

$$\bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_0) = \limsup_{t \downarrow 0, h \to h_0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

mennyiség segítségével kívánjuk vizsgálni. A $\limsup$ úgy értendő, hogy mindazon α bővített valós számok halmazának a pontos alsó korlátja, amelyekhez van olyan $\varepsilon > 0$ és V környezete h_0-nak, hogy $0 < t < \varepsilon$ és $h \in V$ esetén

$$\frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} \leq \alpha.$$

Könnyű látni, hogy a $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h)$ leképezés pozitív homogén és felülről félig folytonos. A könnyebben kezelhető

$$\bar{\delta} F(u_0; h_0) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t}$$

mennyiséget is használni fogjuk, ami megegyezik az irány menti deriválttal, ha az létezik. Nyilván

$$\bar{\delta} F(u_0; h_0) \leq \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_0),$$

ha $h_0 \in X$. A két mennyiség gyakran megegyezik.

Ha $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h)$ konvex és van olyan $h_1 \in X$, hogy $\bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_1) < 0$, akkor a rövidség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy F *reguláris* az u_0-ban.

* **19.48. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ konvex nyílt halmaz, $u_0 \in U$ és $F : U \to \mathbb{R}$. Ha az*

(1) F folytonos konvex függvény;

(2) F Lipschitz-függvény;

(3) F differenciálható u_0-ban

feltételekből valamelyik teljesül, akkor

$$\bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_0) = \bar{\delta} F(u_0; h_0)$$

minden $h_0 \in X$-re.

Bizonyítás. Csak a $\leq$-t kell bizonyítanunk. Az (1) esetben legyen

$$\alpha > \limsup_{t \downarrow 0} \frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t}$$

tetszőleges. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\frac{F(u_0 + \varepsilon h_0) - F(u_0)}{\varepsilon} < \alpha.$$

Ha $0 < t < \varepsilon$, akkor

$$F(u_0+th) \le F\big((1-t/\varepsilon)u_0 + (t/\varepsilon)(u_0+\varepsilon h)\big) \le (1-t/\varepsilon)F(u_0) + (t/\varepsilon)F(u_0+\varepsilon h),$$

ezért

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}}F(u_0,h_0) &\le \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0} \frac{(1-t/\varepsilon)F(u_0)+(t/\varepsilon)F(u_0+\varepsilon h)}{t}\\ &= \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0} \frac{F(u_0+\varepsilon h)-F(u_0)}{\varepsilon} = \limsup_{h\to h_0} \frac{F(u_0+\varepsilon h)-F(u_0)}{\varepsilon} < \alpha;\end{aligned}$$

az utolsó lépésben a folytonosságot használtuk.

A (2) esetben, ha L egy Lipschitz-konstans, akkor

$$F(u_0+th) \le F(u_0+th_0) + tL\|h-h_0\|,$$

ha t elég kicsi. Így

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}}F(u_0,h_0) &\le \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0}\left(\frac{F(u_0+th_0)-F(u_0)}{t} + L\|h-h_0\|\right)\\ &\le \limsup_{t\downarrow 0}\frac{F(u_0+th_0)-F(u_0)}{t} + \limsup_{h\to h_0} L\|h-h_0\|\\ &= \limsup_{t\downarrow 0}\frac{F(u_0+th_0)-F(u_0)}{t}.\end{aligned}$$

Végül a (3) esetben, ha $\omega(h) = F(u_0+h)-F(u_0)-F'(u_0)h$, akkor

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}}F(u_0,h_0) &\le \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0}\frac{F'(u_0)th + \big\|\omega(th)\big\|}{t}\\ &\le \limsup_{h\to h_0} F'(u_0)h + \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0}\frac{\big\|\omega(th)\big\|}{\|th\|}\|h\|\\ &= F'(u_0)h_0. \quad \square\end{aligned}$$

* **19.49. Következmény.** *Ha F konvex és folytonos u_0-ban, akkor $h \mapsto \bar{\bar{\delta}}F(u_0;h)$ konvex és*

$$\bar{\bar{\delta}}F(u_0;h) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{F(u_0+th)-F(u_0)}{t}$$

véges.

Bizonyítás. Mivel F mindenütt folytonos, így $\bar{\bar{\delta}}F(u_0;h) = \overline{\delta}F(u_0;h)$, és mivel

$$t \mapsto \frac{F(u_0+th)-F(u_0)}{t}$$

monoton növekedő függvénye t-nek, létezik és véges a jobb oldali határérték, és nyilván megegyezik $\overline{\delta}F(u_0;h)$-val. Ha $h_1, h_2 \in X$ tetszőleges, akkor

$$F\Big(u_0 + t\big(\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2\big)\Big) \leq \alpha F\big(u_0 + th_1\big) + (1-\alpha)F\big(u_0 + th_2\big).$$

Innen

$$\overline{\delta}F\big(u_0;\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2\big) \leq \alpha\overline{\delta}F(u_0;h_1) + (1-\alpha)\overline{\delta}F(u_0;h_2). \quad \square$$

* **19.50. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ nyílt, $u_0 \in U$ és $F : U \to \mathbb{R}$. Ha h_0 az F csökkenési iránya u_0-ban, akkor $\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h_0) \leq 0$. Ha $\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h_0) < 0$ akkor h_0 az F csökkenési iránya u_0-ban. Ha F reguláris u_0-ban, akkor az utóbbi feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy h_0 csökkenési irány legyen, és a csökkenési irányok halmaza nem üres konvex kúp.*

Bizonyítás. Az első két állítás nyilvánvaló a definícióból. Az utolsó állítás bizonyításához legyen h_0 csökkenési irány. Mivel h_0 belső pontja a csökkenési irányok kúpjának, van olyan $0 < t < 1$, hogy $h' = h_0 - th_1/(1-t)$ is csökkenési irány, így $\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h') \leq 0$. A konvexitást alkalmazva

$$\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h_0) = \bar{\bar{\bar{\delta}}}F\big(u_0, th_1 + (1-t)h'\big) \leq t\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h_1) + (1-t)\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h') < 0.$$

Ezek szerint a csökkenési irányok kúpja a $\big\{h : \bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h) < 0\big\}$ nívóhalmaz, ami mint konvex függvény nívóhalmaza, konvex. $\square$

* **19.51. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ nyílt, $u_0 \in U$, $F : U \to \mathbb{R}$ és*

$$N = \big\{u \in U : F(u) \leq F(u_0)\big\}.$$

Ha h_0 az N megengedett iránya u_0-ban, akkor $\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h_0) \leq 0$. Ha $\bar{\bar{\bar{\delta}}}F(u_0;h_0) < 0$ akkor h_0 az N megengedett iránya u_0-ban. Ha F reguláris u_0-ban, akkor az utóbbi feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy h_0 megengedett irány legyen, és a megengedett irányok halmaza nem üres konvex kúp.

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint az előző tétel. $\square$

* **19.52. Lemma: korlátos jobbinverz létezése.** *Legyenek X és Y Banach-terek és A egy X-et Y-ra képező korlátos lineáris operátor. Ekkor létezik olyan $J : Y \to X$ (nem feltétlenül lineáris és nem is feltétlenül folytonos) leképezés és K valós konstans, hogy $A\big(J(y)\big) = y$ és $\big\|J(y)\big\| \leq K\|y\|$ minden $y \in Y$-ra.*

Bizonyítás. Mivel A folytonos, $\ker(A)$ zárt, így — mint könnyen látható — az $\tilde{X} = X/\ker(A)$ faktortér Banach-tér az $\|\tilde{x}\| = \inf_{x\in\tilde{x}}\|x\|$ normával és az $\tilde{A}\tilde{x} = Ax$, ha $x \in \tilde{x}$ összefüggéssel értelmezett operátor lineáris és folytonos leképezése $\tilde{X}$-nek Y-ra, amely korlátos $\|A\|$-val. Alkalmazva Banach-nak a korlátos inverzre vonatkozó tételét, $\tilde{A}$ inverze, a $\tilde{J} : Y \to \tilde{X}$ operátor korlátos. Minden $y \in Y$ esetén válasszunk egy $J(x)$-szel jelölt elemet a $\tilde{J}y$ osztályból úgy, hogy $\big\|J(x)\big\| \leq 2\|\tilde{J}y\|$ teljesüljön. $\square$

* **19.53. Következmény: zárt képtér tétel.** *Legyenek X, Y és Z Banach-terek és $A : X \to Y$, $B : X \to Z$ korlátos lineáris operátorok. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{rng}(A)$ *és* $B\big(\ker(A)\big)$ *zárt alterek. Ekkor a $Cx = (Ax, Bx)$ összefüggéssel definiált leképezés $Y \times Z$-beli képtere is zárt.*

Bizonyítás. Az $A : X \to \mathrm{rng}(A)$ leképezésnek létezik egy J jobbinverze, amelyre $\big\|J(y)\big\| \le K\|y\|$ teljesül. Ha (y, z) a $\mathrm{rng}(C)$ lezártjában van, akkor van olyan x_n sorozat, hogy $(Ax_n, Bx_n) \to (y, z)$. Mivel $y \in \mathrm{rng}(A)$, értelmezhetjük az $x_n' = J(Ax_n - y)$ sorozatot, amelyre $A(x_n - x_n') = y$ és $\|x_n'\| \le K\|Ax_n - y\| \to 0$. Innen $Bx_n' \to 0$ és így $B(x_n - x_n') \to z$. Tehát z benne van a $\{Bx : x \in X, Ax = y\}$ halmaz lezártjában, ami a $B\big(\ker(A)\big)$ zárt altér eltoltja, tehát zárt. Ezért van olyan $x \in X$, amelyre $Ax = y$ és $Bx = z$. $\square$

* **19.54. Luszternyik tétele.** *Legyenek X és Y Banach-terek, $U \subset X$ nyílt halmaz és $F : U \to Y$ folytonosan differenciálható függvény. Legyen $u_0 \in U$ és tegyük fel, hogy $F'(u_0)$ értékkészlete Y. Ekkor létezik u_0-nak egy U_0 környezete, egy K konstans és egy $\varphi : U_0 \to X$ leképezés, hogy $u \in U_0$ esetén*

$$F\big(u + \varphi(u)\big) = F(u_0) \quad \textit{és} \quad \big\|\varphi(u)\big\| \le K\big\|F(u) - F(u_0)\big\|.$$

A tételt és az első következményét elolvasva az az érzésünk támadhat, hogy az implicit függvény tétel segítségével ennél többet is be tudunk bizonyítani. A gondot az okozza, hogy a $\ker\big(F'(u_0)\big)$ zárt altér nem feltétlenül „hasítja" az X teret, azaz nem biztos, hogy van hozzá olyan zárt altér, hogy X a kettő direkt összege.

Bizonyítás. A módosított Newton-módszer alkalmazásával történik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $u_0 = 0$ és $F(u_0) = 0$. A lemma szerint az $A = F'(0)$ operátorhoz tartozó jobbinverz legyen J, és $K > 0$ a megfelelő konstans. A folytonos differenciálhatóság és a középérték-egyenlőtlenség segítségével válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, hogy U tartalmazza az ε-nál kisebb normájú elemeket és teljesüljön

$$\big\|F(u') - F(u'') - F'(0)(u' - u'')\big\| \le \frac{1}{2K}\|u' - u''\|, \tag{1}$$

ha $\|u'\| < \varepsilon$ és $\|u''\| < \varepsilon$. Válasszunk olyan $\delta > 0$-t, hogy $\|u\| < \delta$ esetén fennálljon $\|u\| + K\big\|F(u)\big\| < \varepsilon/2$. Ha $\|x\| < \delta$, akkor legyen $x_0 = x$ és

$$x_{n+1} = x_n - J\big(F(x_n)\big), \quad \text{ha} \quad n \ge 0. \tag{2}$$

Indukcióval megmutatjuk, hogy $\|x_n\| < \varepsilon$, ha $n \ge 0$. Ez $n = 0$-ra nyilvánvaló, és

$$\|x_1 - x_0\| \le \Big\|J\big(F(x_0)\big)\Big\| \le K\big\|F(x_0)\big\|,$$

ahonnan $\|x_1\| \le \|x_0\| + \|x_1 - x_0\| < \varepsilon/2$. Indukcióval, tegyük fel, hogy $\|x_i\| < \varepsilon$ teljesül, ha $i = 0, 1, \dots, k$. A (2) definíciót átrendezve és mindkét oldalra alkalmazva $F'(0)$-t,

$$F'(0)(x_{i+1} - x_i) + F(x_i) = 0, \tag{3}$$

ha $i = 0, 1, \dots, k$. Ebből, felhasználva (1)-et

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_i\| &= \Big\|J\big(F(x_i)\big)\Big\| \le K\big\|F(x_i)\big\| \\ &= K\big\|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(0)(x_i - x_{i-1})\big\| \\ &\le \frac{1}{2}\|x_i - x_{i-1}\|. \end{aligned} \tag{4}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$\|x_{i+1} - x_i\| \le \frac{\|x_1 - x_0\|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \tag{5}$$

ha $i = 0, 1, \dots, k$. A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}\| &\le \|x_{k+1} - x_k + x_k - \ldots - x_1 + x_1\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\Big) < \varepsilon, \end{aligned}$$

amivel az indukciót befejeztük.

A (4) és (5) egyenlőtlenségek ismételt felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\le \Big(\frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + 1\Big)\|x_{n+1} - x_n\| \\ &< 2\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{\|x_1 - x_0\|}{2^{n-1}} \end{aligned}.$$

A sorozat tehát Cauchy-sorozat, legyen a határértéke $\psi(x)$. Megmutatjuk, hogy a $\varphi(x) = \psi(x) - x$ függvénnyel teljesül a tétel állítása K helyett $2K$-val. Alkalmazva az (5) egyenlőtlenséget

$$\|x_n - x\| < \Big(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\Big)\|x_1 - x\| < 2\|x_1 - x\|$$

adódik, amiből $n \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\big\|\varphi(x)\big\| = \big\|\psi(x) - x\big\| \le 2\|x_1 - x\| = \Big\|J\big(F(x)\big)\Big\| \le 2K\big\|F(x)\big\|,$$

ahonnan

$$\big\|\psi(x)\big\| \le \|x\| + 2\|x_1 - x\| \le 2\Big(\|x\| + K\big\|F(x)\big\|\Big) < \varepsilon.$$

Az (1) egyenlőtlenség szerint F folytonos az ε-nál kisebb normájú pontokban, ezért $\psi(x)$-ben is. Alkalmazva (3)-at, a bizonyítandó

$$F\big(x + \varphi(x)\big) = F\big(\psi(x)\big) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = -\lim_{n\to\infty} F'(0)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

összefüggést kapjuk. $\square$

* **19.55. Következmény.** *Ha $F'(u_0)h = 0$, akkor $\|\varphi(u_0+h)\|/\|h\| \to 0$, amint $h \to 0$.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\big\|\varphi(u_0+h)\big\| &\le K\big\|F(u_0+h) - F(u_0)\big\| \\ &= \big\|F(u_0+h) - F(u_0) - F'(u_0)h\big\| \\ &\le \|h\| \sup_{\|u-u_0\|\le\varepsilon} \big\|F'(u) - F'(u_0)\big\|,\end{aligned}$$

ha $\|h\| \le \varepsilon$. $\square$

* **19.56. Következmény.** *Ha*

$$N = \big\{u \in U : F(u) = 0\big\},$$

akkor N félérintő irányainak halmaza $\ker F'(u_0)$.

Bizonyítás. Azt, hogy $\ker F'(u_0)$ elemei félérintő irányok, adja az előző következmény. Ha h_0 félérintő irány, akkor van olyan $\varepsilon > 0$ és $\omega :]0,\varepsilon[\to X$, hogy $F\big(u_0 + th_0 + \omega(t)\big) = 0$, ha $0 < t < \varepsilon$ és $\lim_{t\downarrow 0}\omega(t)/t = 0$. Mivel F differenciálható u_0-ban, $\varrho(h) = F(u_0+h) - F(u_0) - F'(u_0)h$ jelöléssel $\lim_{h\to 0}\varrho(h)/\|h\| = 0$. Mivel $F(u_0) = 0$,

$$\begin{aligned}0 = \frac{F\big(u_0 + th_0 + \omega(t)\big)}{t} &= \frac{F'(u_0)\big(th_0 + \omega(t)\big) + \varrho\big(th_0 + \omega(t)\big)}{t} \\ &= F'(u_0)\big(h_0 + \omega(t)/t\big) + \frac{\varrho\big(th_0 + \omega(t)\big)}{\big\|th_0 + \omega(t)\big\|}\big\|h_0 + \omega(t)/t\big\|.\end{aligned}$$

Innen $t \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $F'(u_0)h_0 = 0$. $\square$

* **19.57. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ felülről félig folytonos pozitív homogén és konvex függvény, amire $g(h_0) < 0$ valamely $h_0 \in X$-re. Ekkor a $K = \big\{h \in X : g(h) < 0\big\}$ kúp adjungált kúpja*

$$\big\{f \in X^* : \text{ van olyan } \lambda \ge 0, \text{ hogy } f \ge -\lambda g\ \big\}.$$

(Itt $0 \cdot \pm\infty = 0$.)

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy ennek a halmaznak az elemei K^+-ban vannak. Legyen $f \in K^+$. A K nem üres konvex nyílt halmaz. Ha f sehol sem pozitív K-n, akkor $f = 0$, és $\lambda = 0$ választható. Egyébként az $A = \big\{(h,t) \in X \times \mathbb{R} : g(h) < t\big\}$ és $B = \big\{(h,0) \in X \times \mathbb{R} : f(h) = 0\big\}$ nem üres konvex halmazok, A nyílt, B zárt. Ha (h,t) a metszetben lenne, akkor $g(h) < 0$ és $f(h) = 0$ teljesülne. Ez lehetetlen, mivel f valahol pozitív, és innen az összekötő egyenesen h felé mozogva, túljutva h-n negatívvá válna, ami ellentmond annak, hogy $f \in K^+$. Alkalmazva a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakját, olyan nem nulla $F \in (X \times \mathbb{R})^*$ lineáris funkcionált és c konstanst kapunk, amelyre $F|_B \le c \le F|_A$. Mivel B altér, feltehetjük, hogy $c = 0$. Így $F(h, 0) \le 0$, ha $f(h) = 0$ és $F(h, t) = F(h, 0) + tF(0, 1) \ge 0$, ha $g(h) < t$. Az első egyenlőtlenségből a $h \mapsto F(h, 0)$ leképezés eltűnik az f nullterén, így annak konstansszorosa, mondjuk $F(h, 0) = kf(h)$. A második egyenlőtlenségből $t \to +\infty$ határátmenettel $F(0, 1) \ge 0$, majd $t \downarrow g(h)$ határátmenettel $kf(h) + g(h)F(0, 1) \ge 0$ minden h-ra. Ha $F(0, 1) = 0$ lenne, akkor innen $F = 0$ adódna, ami ellentmondás. Mivel $g(h_0) < 0$, $kf(h_0) > 0$. Mivel f nemnegatív K-n, ez csak úgy teljesülhet, ha $k > 0$. A $\lambda = F(0, 1)/k$ választással készen vagyunk. □

* **19.58. Tétel.** *Legyenek X és Y Banach-terek A az X-et Y-ra képező korlátos lineáris operátor. Ekkor* $\ker(T)^+ = \{y^* \circ T : y^* \in Y^*\}$.

Bizonyítás. Az egyik irány nyilvánvaló. Legyen $f \in \ker(A)^+$. Ez azt jelenti, hogy f nulla $\ker(A)$-n, mivel az altér. Legyen $Cx = (Ax, fx)$, ha $x \in X$. A zárt képtér tétel feltételei teljesülnek, így C képtere zárt, azonban a $(0, 1)$ pár nincs benne. Válasszuk el C képterét a $(0, 1)$-től egy H nem nulla lineáris funkcionállal. A H nulla $\operatorname{rng}(C)$-n. Feltehetjük, hogy $H(0, 1) = -1$. Az $y^*(y) = H(y, 0)$ jelöléssel $H(Cx) = y^*\big(A(x)\big) + H(0, 1)fx$, azaz $f = y^* \circ A$. □

* **19.59. Lagrange-szorzók.** Az

$$
\begin{aligned}
&F_0(u) \to \min, \quad u \in N \\
&F_j(u) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
&F_{n+1}(u) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

feltételes minimumproblémát akarjuk tanulmányozni. Az u_0-at a feltételes minimumprobléma egy *lokális megoldás*ának fogjuk nevezni, ha van olyan U_0 környezete, hogy $F_0(u) \ge F_0(u_0)$ minden $u \in U_0$-ra, ami teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket. Szükséges és elégséges feltételt is a λ_j és y^* *Lagrange-szorzók* segítségével adhatunk:

$$
\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \bar{\bar{\delta}} F_i(u_0; u - u_0) + y^* F'_{n+1}(u_0)(u - u_0) \ge 0, \quad \text{ha} \quad u \in N;
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0, \quad y^* \in Y^* \\
&\lambda_j F_j(u_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_j(u_0) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
&F_{n+1}(u_0) = 0, \quad u_0 \in N.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

A (2) variációs egyenlőtlenség az Euler–Lagrange-egyenleteknek felel meg, (3) és (4) további feltételek. Nyilván $\lambda_j = 0$ kell legyen, ha $F_j(u_0) < 0$ ($j = 1, \dots, n$), azaz ekkor λ_j nem aktív. Figyeljük meg, hogy ha egy pozitív konstanssal megszorozzuk a Lagrange-szorzókat, (2), (3) és (4) ekvivalens feltételbe mennek át, így akár azt is feltehetjük, hogy vagy $\lambda_0 = 0$ (*elfajuló eset*), vagy $\lambda_0 = 1$ (*nemelfajuló eset*).

* **19.60. Általánosított Kuhn–Tucker-tétel.** *Az előző pont jelöléseivel, tekintsük az alábbi feltételeket:*

(5) X *és* Y *valós Banach-terek;*

(6) $U \subset X$ *nyílt környezete* u_0*-nak,* $F_i : U \to \mathbb{R}$*, a* $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h)$ *funkcionálok konvexek* $(i = 0, 1, \dots, n)$ *és* F_j *folytonos* u_0*-ban* $(j = 1, \dots, n)$*;*

(7) N *konvex részhalmaza* X*-nek, amelynek a belseje nem üres;*

(8) $F_{n+1} : U \to Y$ *folytonosan differenciálható* U*-n;*

(9) regularitás: $\operatorname{rng}\big(F'_{n+1}(u_0)\big)$ *zárt.*

Szükségesség: ha (5)–(9) teljesülnek, és u_0 *lokális megoldása (1)-nek, akkor léteznek* $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ *valós számok és* $y^* \in Y^*$*, nem mind nulla, hogy (2), (3) és (4) teljesülnek.*

Elégségesség: ha (5)–(8) teljesülnek, akkor (2), (3) és (4)-ből következik, hogy u_0 *megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:*

(10) $\lambda_0 = 1$*;*

(11) $F_0, F_1, \dots, F_n$ *és* $u \mapsto y^* F_{n+1}(u)$ *konvexek.*

Használni fogjuk az L *Lagrange-függvényt*, amelyet az

$$L(u, \lambda, y^*) = \lambda_0 F_0(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(u) + y^* F_{n+1}(u)$$

összefüggéssel definiálunk, ahol $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Bizonyítás. Az elégségességet bizonyítása teljesen elemi. Legyen

$$\varphi(t) = L(u_0 + t(u - u_0), \lambda, y^*),$$

ahol $t \in [0, 1]$ és $u \in N$ rögzített. A φ függvény konvex, valamint (2) szerint $\varphi'(0+) \geq 0$, ezért a $[0, 1]$-en φ-nek minimuma van 0-ban. Innen következik, hogy

$$L(u_0, \lambda, y^*) \leq L(u, \lambda, y^*), \quad \text{ha} \quad u \in N.$$

Mivel $\lambda_0 = 1$, a (3) és (4) feltételekből

$$F_0(u_0) = L(u_0, \lambda, y^*).$$

Minden u-ra, amely teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket,

$$L(u, \lambda, y^*) \leq F_0(u),$$

mivel $\lambda_j \geq 0$. Innen $F_0(u_0) \leq F_0(u)$.

A szükségesség a Dubovickij–Miljutyin-tételből fog következni. A bizonyítást több lépésre osztjuk.

I. Először a triviális speciális eseteket tekintjük. Ha $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F_0(u_0, h)$ nemnegatív X-en, akkor $\lambda_0 = 1$, $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $y^* = 0$ választással (2), (3) és (4) teljesül. Ha $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F_j(u_0, h)$ nemnegatív, $F_j(u_0) = 0$ valamely $1 \leq j \leq n$-re, akkor $\lambda_j = 1$, $\lambda_k = 0$, ha $k \neq j$, $y_* = 0$ választással élhetünk. Ha $\operatorname{rng}\big(F'_{n+1}(u_0)\big) \neq Y$, akkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint az értékkészlet elválasztható valamely rajta kívül fekvő ponttól egy $y^* \in Y^*$-gal, amelyre tehát $y^* F'_{n+1}(u_0) h = 0$ minden $h \in X$-re, így $\lambda_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$ választással élhetünk.

II. A továbbiakban feltesszük, hogy a triviális speciális esetek egyike sem teljesül. Ekkor az F_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ függvények regulárisak u_0-ban.

Először az F_0-hoz u_0-ban tartozó reguláris csökkenési irányok K_0 kúpjával foglalkozunk. Tudjuk, hogy ez

$$K_0 = \big\{h \in X : \bar{\bar{\delta}} F_0(u_0; h) < 0\big\}$$

és

$$K_0^+ = \big\{f \in X^* : \text{ van olyan } \lambda_0 \geq 0, \text{ hogy } f \geq -\lambda_0 \bar{\bar{\delta}} F_0(u_0; .)\ \big\}.$$

Legyen

$$N_j = \big\{u \in X : F_j(u) \leq 0\big\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és tekintsük az N_j-hez u_0-ban tartozó megengedett irányok K_j kúpját. Figyelembe véve, hogy F_j folytonos u_0-ban, kapjuk, hogy ha $F_j(u_0) < 0$, akkor $K_j = X$, és így $K_j^+ = \{0\}$. Ha $F_j(u_0) = 0$, akkor

$$K_j = \big\{h \in X : \bar{\bar{\delta}} F_j(u_0; h) < 0\big\}$$

és így

$$K_j^+ = \big\{f \in X^* : \text{ van olyan } \lambda_j \geq 0, \text{ hogy } f \geq -\lambda_j \bar{\bar{\delta}} F_j(u_0; .)\ \big\}.$$

A definícióból és a duális kúp definíciójából közvetlenül következik, hogy az N-hez az u_0-ban tartozó megengedett irányok K kúpjára

$$K = \big\{h \in X : h = \alpha(u - u_0), u \in N^\circ, \alpha > 0\big\}$$

és

$$K^+ = \big\{f \in X^* : f(u - u_0) \geq 0, \text{ ha } u \in N\ \big\}.$$

Az $N_{n+1} = f_{n+1}^{-1}(u_0)$ halmazhoz u_0-ban tartozó félérintő irányok K_{n+1} kúpjára megmutattuk, hogy az $A = F'_{n+1}(u_0)$ jelöléssel a $\operatorname{rng}(A) = Y$ esetben $K_{n+1} = \ker(A)$ és $K_{n+1}^+ = \{y^* \circ A : y^* \in Y^*\}$.

Alkalmazzuk a Dubovickij–Miljutyin-tételt. Az kapjuk, hogy léteznek nem mind nulla $f \in K^+$, $f_i \in K_i^+$, $i = 0, \ldots, n, n+1$ lineáris funkcionálok, hogy az összegük nulla, azaz

$$f = -f_0 - f_1 - \cdots - f_{n+1} \in K^+.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$-f_0(u-u_0)-f_1(u-u_0)-\cdots-f_{n+1}(u-u_0)\geq 0, \quad \text{ha} \quad u\in N,$$

így vannak olyan $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ nemnegatív valós számok és $y^*\in Y^*$, nem mind nulla, hogy

$$\begin{aligned}-f_i\leq{}&\lambda_i\bar{\bar{\delta}}F(u_0,.) \quad i=0,1,\dots,n;\\ -f_{n+1}={}&y^*\circ F'_{n+1}(u_0);\\ 0={}&\lambda_j F_j(u_0) \quad j=1,\dots,n. \quad \square\end{aligned}$$

* **19.61. Következmény: általánosítás.** *Ha még*

$$F_i: U\mapsto\mathbb{R}, \quad F_i(u_0)=0 \quad i=n+2,\dots,n+m$$

alakú feltételek is vannak, ahol minden F_i, $i=n+2,\dots,n+m$ folytonosan differenciálható U-n, azokat beolvaszthatjuk F_{n+1}-be, mivel

$$u\mapsto\big(F'_{n+1}(u_0),\dots,F'_{n+m}(u_0)\big)$$

értékkészlete zárt a zárt képtér tétel szerint. Ekkor léteznek $\lambda_i\geq 0$, $i=0,1,\dots,n$, $i=n+2,\dots,n+m$ és $y^*\in Y^*$, nem mind nulla, hogy (2) helyett

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\bar{\bar{\delta}}F_i(u_0;u-u_0)+\sum_{i=n+2}^{n+m}\lambda_i F'_i(u_0)(u-u_0)+y^*F'_{n+1}(u_0)(u-u_0)\geq 0,$$

teljesül, ha $u\in N$; (3) és (4) változatlan. $\square$

* **19.62. Következmény: speciális esetek.** *Ha nincs egyenlőség típusú feltétel, akkor $Y=\{0\}$ választással élhetünk, és a bizonyítás szerint $K_{n+1}=X$, így $K^+_{n+1}=\{0\}$, azaz feltehetjük, hogy $y^*=0$, és (2) arra redukálódik, hogy*

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\bar{\bar{\delta}}F_i(u_0;u-u_0)\geq 0, \quad \textit{ha} \quad u\in N.$$

Ha nincs $u\in N$ típusú feltétel, akkor $N=X$ választással élhetünk. Ha az $F_i: U\to\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$ függvények konvexek, akkor a

$$h\mapsto\bar{\bar{\delta}}F_i(u_0;h)=\bar{\delta}F_i(u_0;h)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{F_i(u_0+th)-F_i(u_0)}{t}$$

leképezések is konvexek, így (6) helyett csak azt kell megkövetelni, hogy F_j, $j=1,\dots,n$ folytonos u_0-ban. Ha még ezen kívül X véges dimenziós (az eredeti Kuhn–Tucker-tételben ez a két feltétel szerepelt), akkor ezt sem, mert ekkor a konvex függvények folytonosak. $\square$

* **19.63. Következmény: általános Lagrange-elv.** *Tekintsük (6) helyett a (6') U nyílt környezete u_0-nak, $F_0, F_1, \dots, F_n : U \to \mathbb{R}$ differenciálhatóak u_0-ban feltételt.*

Szükségesség: ha (5), (6'), (7)–(9) teljesülnek, és u_0 lokális megoldása (1)-nek, akkor léteznek $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ valós számok és $y^* \in Y^*$, nem mind nulla, hogy

$$(2') \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i F_i'(u_0)(u-u_0) + y^* F_{n+1}'(u_0)(u-u_0) \geq 0, \quad \text{ha} \quad u \in N,$$

továbbá (3) és (4) teljesülnek.

Elégségesség: ha (5), (6'), (7) és (8) teljesülnek, akkor (2'), (3) és (4)-ből következik, hogy u_0 megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:

(10) $\lambda_0 = 1$;

(11) $F_0, F_1, \dots, F_n$ és $u \mapsto y^* F_{n+1}(u)$ konvexek. $\square$

A (2'), (3) és (4) feltételek az L Lagrange-függvény segítségével is kifejezhetők. Könnyű kiszámolni, hogy a $\lambda \in [0, +\infty[^n$, $y^* \in Y^*$, $u_0 \in U$ esetben (2'), (3) és (4) a

$$\begin{aligned} &L_u(u_0, \lambda, y^*)(u-u_0) \geq 0, \quad \text{ha} \quad u \in N,\\ &L_\lambda(u_0, \lambda, y^*)(\mu - \lambda) \leq 0, \quad \text{ha} \quad \mu \in [0, +\infty[^n,\\ &L_{y^*}(u_0, \lambda, y^*) = 0 \end{aligned}$$

feltételekkel ekvivalensek. Valóban, (2') nyilván ekvivalens az első feltétellel, az $F_{n+1}(u_0) = 0$ feltétel pedig az utolsóval. A középső feltételben $L_\lambda(u_0, \lambda, y^*) = \big(F_1(u_0), \dots, F_n(u_0)\big)$, így μ egyik koordinátájával tartva $+\infty$-hez, a többit rögzítve $F_j(u_0) \leq 0$ adódik. Ha $F_j(u_0) = 0$, akkor nyilván $\lambda_j F_j(u_0) = 0$, ha viszont $F_j(u_0) < 0$, akkor a $\lambda_j > 0$ esetben $\mu_j = 0$, $\mu_i = \lambda_i$, ha $i \neq j$ választással ellentmondást kapnánk. Megfordítva, $F_j(u_0) \leq 0$-ból $\sum_{j=1}^n \mu_j F_j(u_0) \leq 0$, amiből levonva $\sum_{j=1}^n \lambda_j F_j(u_0) = 0$-át, kapjuk a középső egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 19.48. tételt.

* **19.64. Belső pont módszerek.** Az

$$(1) \qquad \begin{aligned} &f_0(u) \to \min, \quad u \in U\\ &f_j(u) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,\\ &f_j(u) = 0, \quad j = k+1, \dots, m \end{aligned}$$

feltételes minimumproblémát kívánjuk numerikusan megoldani. Az egyenlőség típusú feltételeket kiküszöbölhetjük, ha f_0 helyett az $f_0 + \sum_{i=k+1}^m (\lambda_i f_i)^2$ függvényt minimalizáljuk, ahol $\lambda_i \neq 0$ súlyok. Kérdés, hogyan célszerű választani a súlyokat.

Az egyenlőtlenség típusú feltételeket úgy vehetjük figyelembe, hogy a célfüggvényhez hozzáadunk egy

$$-\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{k}\ln\bigl(-f_j(u)\bigr)$$

tagot. Ez mint sorompó szerepel, az $U^- = \bigl\{u : f_j(u) < 0, j = 1,\dots,k\bigr\}$ nyílt halmaz belsejében tart minket, mert a határhoz közeledve $+\infty$-hez tart. Innen a *belső pont módszerek* elnevezés. Minél nagyobb t, annál gyengébb a sorompó, annál közelebb mehetünk a határhoz. A legegyszerűbb *sorompó módszer*nél $U^- \cap \operatorname{dmn}(f_0)$ egy pontjából indulunk. Egy adott pozitív t-re minimalizálva (például a fékezett Newton-módszerrel), ha $u_0(t)$-ben van a minimum, akkor megnövelt t-re, például t helyett μt-re a $u_0(t)$-t használhatjuk kezdőpontnak, újra minimalizálunk, stb. A tapasztalatok szerint a módszer 3 és 100 közötti μ-t választva jól működik, sebessége alig függ μ-től. Leggyakrabban μ értékét 10 és 20 között választjuk. Fontos észrevétel, hogy ha nincsenek egyenlőség típusú feltételek és $u_0(t)$ a minimumhely, akkor $u = u_0(t)$-re

$$f_0'(u) + \sum_{j=1}^{k}\frac{f_j'(u)}{-tf_j(u)} = 0,$$

így — legalábbis a reguláris esetben — a

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{-tf_j\bigl(u_0(t)\bigr)}$$

mennyiségek az $u_0(t)$-hez tartozó Lagrange-szorzók, és $-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)f_j(u)$ az $u = u_0(t)$ helyen k/t. Ez adhatja az ötletet a sokkal agresszívebb és gyorsabb primál-duál belső pont módszerhez.

Tekintsük a

$$\begin{aligned}
0 =& f_0'(u) + \sum_{j=1}^{m} v_j f_j'(u),\\
0 =& -\frac{1}{t} - v_j f_j(u), \quad j = 1,\dots,k;\\
0 =& f_j(u), \quad j = k+1,\dots,m
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, amely a $t > 0$ paramétertől függ. Ennek az (u, v) megoldását keressük $v_j > 0$, ha $j = 1,\dots,k$ feltételek mellett fékezett Newton-módszerrel. Azt várjuk, hogy t növekedésével (u, v) tart (u_0, λ)-hoz. Kiszámítjuk $\eta = -\sum_{j=1}^{k} v_j f_j(u)$ értékét, és t-t a k/η szám μ-szörösének választjuk (μ rendszerint 10 körüli). Csak egyetlen iterációs lépést teszünk, majd újraszámoljuk t-t. Az egyenes szakasz menti keresésnél kiszámítjuk azt a legnagyobb α-t, amely nem nagyobb mint 1, és amelyre $v_j + \alpha\Delta v_j \ge 0$, $j = 1,\dots,k$, majd az α kezdőértékének ennek mondjuk 0,99-szeresét vesszük, és ha kell, tovább csökkentjük α-t a fékezett Newton-módszernél leírtak szerint. Az egész program akkor áll meg, ha $\eta < \varepsilon$ és $\sum_{j=k+1}^{m} f_j(u)^2$ meg az első egyenlet jobb oldala normanégyzetének összege kisebb mint δ^2. Egy olyan $u \in U^-$ pontból indulunk, amely mindegyik függvény értelmezési tartományában benne van, v_j kezdőértéke $-1/\big(tf_j(u)\big)$, ha $j = 1, \dots, k$, a többi v_j tetszőleges, például nulla. Nincs garancia a konvergenciára, kivéve, ha az f_i, $i = 0, 1, \dots, k$ függvények szigorúan konvexek, az f_j, $j = k+1, \dots, m$ függvények pedig lineáris plusz konstans alakúak.

Ha nem tudunk pontot U^--ban, amire minden f_i értelmezve van, de ismerjük az értelmezési tartományok egy közös pontját, akkor az $f_0 \to \min$, $f_j \le s$, $j = 1, \dots, k$, $f_j = 0$, $j = k{+}1, \dots, m$, $s = 0$ problémát próbáljuk megoldani. Ha csak külön-külön tudunk egy-egy $w_i \in \operatorname{dmn}(f_i)$ pontot, akkor az $f_0(u + w_0) \to \min$, $f_j(u + w_j) \le s$, $j = 1, \dots, k$, $f_j(u + w_j) = 0$, $j = k + 1, \dots, m$, $s = 0$, $w_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, m$ problémát próbáljuk megoldani.

* **19.65. A Pontrjagin-féle maximumelv bizonyítása.** Most már rendelkezésünkre állnak azok az eszközök, amelyekkel be tudjuk bizonyítani a Pontrjagin-féle maximumelvet. Jelölje (P) a 19.32 pontban megfogalmazott irányítási problémát. Az ottani jelöléseket fogjuk használni. Az alaptrükk egy időtranszformáció bevezetése, aminek segítségével egyrészt a tetszőleges W halmazból egy N konvex halmazt kapunk, másrészt a változó $[t_0, t_1]$ intervallumból a rögzített $[0, 1]$ időintervallumot.

I. Jelölje C a $\mathcal{C}\big([0,1]; \mathbb{R}\big)$ függvényteret, C_+ pedig a C azon részhalmazát, amely olyan nemnegatív, nem azonosan nulla v függvényekből áll, amelyeknek a nullhalmaza véges sok zárt intervallum egyesítése. Vegyük észre, hogy C_+ a C konvex részhalmaza, amelynek belseje nem üres, például az azonosan 1 függvény a belsejében van. Minden $v \in C_+$ függvényhez hozzárendelünk egy időtranszformációt a

$$t(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v(\tau)\, d\tau, \quad \text{ha} \quad \tau \in [0, 1]$$

összefüggéssel. Azokon az intervallumokon, ahol $v(\tau)$ nem nulla, a transzformáció kölcsönösen egyértelmű, $t'(\tau) = v(\tau)$, de ha egy intervallumon $v(\tau)$ nulla, akkor ott t konstans. Az inverz transzformációt a

$$\tau(t^*) = \min\big\{\tau \in [0, 1] : t(\tau) = t^*\big\}$$

összefüggéssel definiáljuk. Tisztán formálisan az eredeti (P) probléma a

$$(P') \qquad \int_0^1 L\big(y(\tau), \overline{w}(\tau), t(\tau)\big) v(\tau)\, d\tau \to \min$$

problémával ekvivalens, ahol $(y, t, v) \in C^n \times C \times C_+$ és

$$\begin{aligned}
0 =& y(\tau) - a - \int_0^\tau f\big(y(\tau), \overline{w}(\tau), t(\tau)\big) v(\tau)\, d\tau,\\
0 =& t(\tau) - t_0 - \int_0^\tau v(\tau)\, d\tau,\\
0 =& g\big(t(1), y(1)\big).
\end{aligned}$$

Ezt az problémát operátorokkal felírva,

$$(P'') \qquad F_0(u) \to \min, \quad u \in N, \quad F_1(u) = 0,$$

ahol $u = (y, t, v) \in X = C^n \times C \times C$, $N = C^n \times C \times C_+$, $Y = C^n \times C \times \mathbb{R}^m$ és F_1 az X-et Y-ba képezi. Igazolnunk kell a formális eljárás jogosságát.

II. Megmutatjuk, hogy ha x, w és t_1 az eredeti (P) probléma egy megoldása és adott $w^* \in W$-re és $\overline{v} \in C_+$-ra a

$$\overline{t}(\tau) = t_0 + \int_0^\tau \overline{v}(\tau)\,d\tau, \quad \overline{y}(\tau) = x\big(\overline{t}(\tau)\big)$$

definíciókkal $\overline{u} = (\overline{y}, \overline{t}, \overline{v})$, továbbá definíció szerint

$$\overline{w}(\tau) = \begin{cases} w\big(\overline{t}(\tau)\big), & \text{ha } \overline{v}(\tau) > 0, \\ w^*, & \text{ha } \overline{v}(\tau) = 0, \end{cases}$$

akkor $\overline{u}$ megoldása (P')-nek, feltéve, hogy $\overline{v}(1) = t_1$.

Valóban, $\overline{w}$-nak csak véges sok szakadási helye van, továbbá $\overline{t} \in C$, $\overline{y} \in C^n$. Jelölje $\overline{w}$ folytonossági helyeinek halmazát S. A (P)-ből könnyen következik, hogy $\overline{u}$ teljesíti a (P')-beli mellékfeltételeket. Továbbá, új változót bevezetve,

$$(1) \qquad F_0'(\overline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(x(t), w(t), t\big)\,dt.$$

Ha most egy $u = (y, t, v)$-re teljesül (P'), akkor a

$$t(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v(\tau)\,d\tau$$

transzformációval az $y, \overline{w}$ függvényekből a

$$t \mapsto \tilde{x}(t), \quad t \mapsto \tilde{w}(t), \quad t \in [t_0, \tilde{t}_1]$$

függvényeket kapjuk, amelyek teljesítik a (P)-ben szereplő mellékfeltételeket, továbbá

$$F_0(u) = \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} L\big(\tilde{x}(t), \tilde{w}(t), t\big)\,dt.$$

Mivel x, w megoldása (P)-nek, $F_0(u) \geq F_0(\overline{u})$.

Az alábbiakban legyenek $\overline{u}, \overline{w}$ rögzítettek. Csak az utolsó lépésben fogjuk felhasználni, hogy $\overline{u}, w^*$ tetszőlegesek.

III. Harmadik lépésként a következő szükséges feltételt adjuk (P") teljesülésére: Létezik olyan $\lambda \geq 0$ és $y^* \in Y^*$, nem mindkettő nulla, hogy minden $u \in N$-re a

$$\lambda F_0'(\overline{u})(u-\overline{u}) + y^* F_1'(\overline{u})(u-\overline{u}) \geq 0 \tag{2}$$

variációs egyenlőtlenség teljesül.

Ez az általános Lagrange-elvből következik: csak azt kell megmutatnunk, hogy $\operatorname{rng}\big(F_1'(\overline{u})\big)$ zárt, mert a többi feltétel nyilván teljesül. Az

$$F_1'(\overline{u})(u-\overline{u}) = b$$

egyenlet nyilván megfelel a (P') feltételben szereplő inhomogén egyenleteknek, ha azok bal oldalát linearizáljuk, azaz

$$\begin{aligned} b_1 =& y - \overline{y} - \int_0^\tau f_x(\overline{P})\overline{v}(y-\overline{y})\,d\tau \\ & - \int_0^\tau \Big(f_t(\overline{P})\overline{v}(t-\overline{t}) + f(\overline{P})(v-\overline{v})\Big)\,d\tau, \\ b_2 =& t - \overline{t} - \int_0^\tau (v-\overline{v})\,d\tau, \end{aligned} \tag{3}$$

továbbá

$$b_3 = g_t(\overline{Q})\big(t(1)-\overline{t}(1)\big) + g_x(\overline{Q})\big(y(1)-\overline{y}(1)\big); \tag{4}$$

itt $u = (y,t,v)$, $\overline{P} = \big(\overline{y}(\tau), \overline{w}(\tau), \overline{t}(\tau)\big)$, tehát a változót nem írjuk ki, és $\overline{Q} = \big(\overline{t}(1), \overline{y}(1)\big)$. Fontos megfigyelés, hogy a (3) egyenletrendszer rögzített v-re Volterra integrálegyenlet rendszer. Valóban, $z = (y-\overline{y}, t-\overline{t})$ és alkalmas rögzített $k_1 \in C^n$, $k_2 \in C$ és $K : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}^{n+1})$ folytonos függvényekkel az egyenletrendszer $c = \big(b_1 + k_1, b_2 + k_2\big)$ jelöléssel

$$z(\tau) = c(\tau) + \int_0^\tau K(\sigma)z(\sigma)\,d\sigma$$

alakba írható. A jobb oldalon álló operátort T-vel jelölve, teljes indukcióval

$$\big|T^\ell(z_2)(\tau) - T^\ell(z_1)(\tau)\big| \leq \frac{\|K\|^\ell \tau^\ell}{\ell!}\|z_2 - z_1\|, \quad \text{ha} \quad \tau \in [0,1].$$

Innen T valamely hatványa kontrakció, így pontosan egy $(y,t) \in C^n \times C$ megoldása van (3)-nak bármely $(b_1, b_2) \in C^n \times C$-re, és ez folytonosan függ (b_1, b_2)-től.

Jelölje $h(u)$ a (4) egyenlet jobb oldalát. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{rng}\big(F_1'(\overline{u})\big)$ pontosan azokból a b-kből áll, amelyekre

$$b_1 \in C^n, \quad b_2 \in C, \quad b_3 = h\big(u(b_1, b_2)\big) + \gamma, \tag{5}$$

ahol γ az $\mathbb{R}^n$ egy rögzített Z lineáris alterén fut keresztül, $(b_1, b_2) \mapsto u(b_1, b_2)$ pedig egy bizonyos folytonos függvény $C^n \times C$-n. Mivel Z zárt, $u \mapsto h(u)$ pedig szintén folytonos, ebből már következik, hogy $\operatorname{rng}\big(F_1'(\overline{u})\big)$ zárt.

Az (5) összefüggés bizonyításához, (3)-nak a $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ homogén esethez tartozó összes u_h megoldásának halmazát jelöljük U_h-val. Az $U_h - \overline{u}$ halmaz lineáris altér, így $h(U_h - \overline{u})$ is lineáris altér, ezt jelöljük Z-vel. Továbbá rögzített (b_1, b_2)-re (3)-nak pontosan egy megoldása van a $v = \overline{v}$ esetben is, ezt jelöljük $u(b_1, b_2)$-vel. A (3) minden u megoldása $u = u(b_1, b_2) + u_h$ alakú, amivel (5) teljesülését beláttuk.

IV. Negyedik lépésként az y^* Lagrange-multiplikátort vizsgáljuk meg. Mivel $y^* \in Y^*$ és $Y = C^n \times C \times \mathbb{R}^n$,

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \alpha) \in C^{n*} \times C^* \times \mathbb{R}^{n*}.$$

Először megmutatjuk, hogy λ és α nem lehet egyszerre nulla. A bizonyítás indirekt. A $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$ választással, rögzítve $v = v_1 \equiv 1$-et, megkonstruáljuk (3) egy $u_1 = (y, t, v_1)$ megoldását. A (2) összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$y^* F_1'(\overline{u})(u_1 - \overline{u}) = 0.$$

Mivel v_1 a C_+ belsejében van, u_1 az N belsejében van. Ezért (2)-ből $\lambda = 0$ miatt

$$y^* F_1'(\overline{u})(u - \overline{u}) = 0$$

minden $u \in X$-re. Most felhasználva (5)-öt azt kapjuk, hogy $y_1^* = 0$ és $y_2^* = 0$, így $y^* = 0$, ez azonban ellentmond a III. lépésben bizonyítottaknak.

Tegyük fel, hogy g valamelyik koordinátája, mondjuk az utolsó, nulla. Hagyjuk el ezt a koordinátát. Megismételve az eddigieket, azt kapjuk, hogy a most eggyel kisebb dimenziós α-val is fennáll, hogy $\lambda = 0$ és $\alpha = 0$ egyszerre nem teljesülhet. Ez azt jelenti, hogy akár azt is feltehetjük, hogy $\alpha_n = 0$. A (2) kulcsegyenlőtlenség sem változik, az α_n szorzója úgyis nulla. Ismételve ezt a lépést, a g minden azonosan nulla koordinátájához tartozó α_i-ről feltehetjük, hogy nulla. Figyeljük meg, hogy ha minden koordináta nulla, akkor azt kapjuk, hogy $\lambda > 0$.

V. A maximumelv bizonyításához u és $\overline{u}$ specializálásával jutunk el. Ebben a lépésben u-t specializáljuk (2)-ben. Minden $v \in C_+$-hoz válasszuk a $b_1 = 0$, $b_2 = 0$-hoz tartozó egyetlen u megoldását (3)-nak. Ekkor (2)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^1 \Big(L_x(\overline{P})\overline{v}(y - \overline{y}) + L_t(\overline{P})\overline{v}(t - \overline{t}) + L(\overline{P})(v - \overline{v}) \Big)\, d\tau \\ + \alpha g_t(\overline{Q})\big(t(1) - \overline{t}(1)\big) + \alpha g_x(\overline{Q})\big(y(1) - \overline{y}(1)\big) \geq 0\end{aligned}$$

és (3) teljesül $b_1 = 0$, $b_2 = 0$-val. A (3) összefüggést differenciálhatjuk τ szerint az integrandus folytonossági pontjaiban, azaz ha $\tau \in S$. Azt kapjuk, hogy

$$y' - \overline{y}' = f_x(\overline{P})\overline{v}(y - \overline{y}) + f_t(\overline{P})\overline{v}(t - \overline{t}) + f(\overline{P})(v - \overline{v}), \quad \text{ha} \quad \tau \in S, \tag{6}$$

és

$$t' - \overline{t}' = v - \overline{v}, \quad \text{ha} \quad \tau \in [0,1], \quad y(0) = \overline{y}(0), \quad t(0) = \overline{t}(0) \equiv t_0.$$

Elhagytuk a τ-tól való függés $y'(\tau)$, $t'(\tau)$, stb. explicit kiírását.

VI. A maximumelv minden változatában fontos szerepet játszik egy trükk, amit az „adjungált állapotok bevezetésének” szokás nevezni. Bevezetjük a φ és ψ függvényeket, kiküszöbölve t-t és y-t. Célunk a

$$\int_0^1 \big(\lambda L(\overline{P}) - \psi f(\overline{P}) + \varphi\big)(v - \overline{v})\, d\tau \geq 0, \quad \text{ha} \quad v \in C_+ \tag{7}$$

egyenlőtlenség bizonyítása, ahol a φ és ψ függvényeket a $\tau \in S$ esetén fennálló

$$\begin{aligned} \psi'(\tau) &= \big(\lambda L_x(\overline{P}) - \psi(\tau) f_x(\overline{P})\big)\overline{v}(\tau), \\ \varphi'(\tau) &= -\big(\lambda L_t(\overline{P}) - \psi(\tau) f_t(\overline{P})\big)\overline{v}(\tau) \end{aligned} \tag{8}$$

differenciálegyenletekkel és a

$$\psi(1) = -\alpha g_x(\overline{Q}), \quad \varphi(1) = \alpha g_t(\overline{Q})$$

kezdeti feltételekkel vezetjük be. A φ és ψ létezése könnyen adódik, ha (8)-at integráljuk 1-től τ-ig, a kapott Volterra-integrálegyenletet megoldjuk $[0, 1]$-en, majd a kapott φ, ψ folytonos megoldásokat differenciáljuk S pontjaiban.

Ezeket a függvényeket úgy vezettük be, hogy a szorzat differenciálási szabályát lehet alkalmazni az V. lépésben szereplő integranduszra. Nevezetesen, ha $\tau \in S$, akkor

$$\begin{aligned} &\lambda\Big(L_x(\overline{P})\overline{v}(y - \overline{y}) + L_t(\overline{P})\overline{v}(t - \overline{t}) + L(\overline{P})(v - \overline{v})\Big) \\ &\quad = \big(\psi \cdot (y - \overline{y})\big)' - \big(\varphi \cdot (t - \overline{t})\big)' - \big(\psi f(\overline{P}) - \varphi\big)(v - \overline{v}). \end{aligned}$$

Figyelembe véve az V. lépésben szereplő egyenlőtlenséget integrálással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\big(\lambda L(\overline{P}) - \psi f(\overline{P}) + \varphi\big)(v - \overline{v})\, d\tau + \big[\psi \cdot (y - \overline{y}) - \varphi \cdot (t - \overline{t})\big]_{\tau=0}^{\tau=1} \\ &\quad + \alpha g_t(\overline{Q})\big(t(1) - \overline{t}(1)\big) + \alpha g_x(\overline{Q})\big(y(1) - \overline{y}(1)\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Ebből következik (7).

VII. Most a (7) integrálegyenlőtlenséget pontonkénti egyenlőtlenséggé változtatjuk. Vezessük be a Δ függvényt a

$$\Delta(\tau) = \lambda L(\overline{P}) - \psi(\tau) f(\overline{P}) + \varphi(\tau)$$

definícióval. Minden $\tau \in S$ pontban azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= 0, \quad \text{ha} \quad \overline{v}(\tau) > 0, \\ \Delta(\tau) &> 0, \quad \text{ha} \quad \overline{v}(\tau) = 0; \end{aligned} \tag{9}$$

valóban, ennek ellenkezője könnyen ellentmondásra vezet, ha megfelelő v-t választunk, mivel Δ folytonos a τ pontban.

VIII. A (8) összefüggést integrálva 1-től τ-ig azt kapjuk, hogy

$$\psi(\tau) = \psi(1) + \int_1^\tau \big(\lambda L_x(\overline{P}) - \psi f_x(\overline{P})\big)\overline{v}\, d\tau,$$
$$\varphi(\tau) = \varphi(1) - \int_1^\tau \big(\lambda L_t(\overline{P}) - \psi f_t(\overline{P})\big)\overline{v}\, d\tau.$$

Áttérve a τ változóról a $t = \overline{t}(\tau)$ változóra, amit a

$$\overline{t}(\tau) = t_0 + \int_0^\tau \overline{v}(\tau)\, d\tau$$

összefüggéssel definiálunk, kapjuk a p és p_0 függvényeket, tehát

$$p(t) = p(t_1) + \int_{t_1}^t \big(\lambda L_x(P) - p f_x(P)\big)\, dt,$$
$$p(t_1) = \psi(1) = -\alpha g_x\big(t_1, x(t_1)\big)$$

és

$$p_0(t) = p_0(t_1) - \int_1^\tau \big(\lambda L_t(P) - p f_t(P)\big)\, dt,$$
$$p_0(t_1) = \varphi(1) = \alpha g_t\big(t_1, x(t_1)\big)$$

minden $t \in [t_0, t_1]$-re, ahol $P = \big(x(t), w(t), t\big)$. Ezekből az egyenletekből következik, hogy p és p_0 folytonosak $[t_0, t_1]$-en. Differenciálással kapjuk a p-re és p_0-ra a tételben szereplő differenciálegyenletek fennállását.

IX. Most használjuk ki, hogy $\overline{w}$ függ $\overline{v} \in C_+$ és $w^* \in W$ választásától. Értelmezzük (9)-et $\overline{v}$ megfelelő választásával. Legyen $\overline{v}(\tau) \equiv t_1 - t_0$. Az időtranszformációval $\Delta(\tau) = 0$-ból a $t \mapsto w(t)$ optimális irányítás minden pontjában

$$\lambda L(P) - p(t) f(P) + p_0(t) = 0.$$

Ez megegyezik a maximumelvben szereplő

$$p_0(t) = H\big(t, x(t), w(t), p(t), \lambda\big) \tag{10}$$

összefüggéssel. Magát a maximumelvet úgy kapjuk, hogy olyan $\overline{v}$-t választunk, amelyre $\overline{t}$ egy pozitív hosszúságú intervallumon egy adott t^*-ot vesz fel értékként. Vegyük észre, hogy ez minden $t^* \in [t_0, t_1]$-re megtehető. A (9)-ben szereplő $\Delta(\tau) \geq 0$ egyenlőtlenségből — figyelembe véve $\overline{w}$ definícióját is — azt kapjuk, hogy

$$\lambda L\big(x(t^*), w^*, t^*\big) - p(t^*) f\big(x(t^*), w^*, t^*\big) + p_0(t^*) \geq 0 \tag{11}$$

minden $w^* \in W$, $t^* \in [t_0, t_1]$-re. Azonban, (10) miatt (11) éppen a

$$H\big(t^*, x(t^*), w(t^*), p(t^*), \lambda\big) \geq H\big(t^*, x(t^*), w^*, p(t^*), \lambda\big)$$

egyenlőtlenség, ami a maximumelv. $\square$

- 467/−16 :

$<$

(8) $x = at^2 + b^t + c;$

(9) $(t-a)^2 + (x-b)^2 = c^2;$

(10) $x = a\cos t,\ y = a\sin t;$

(11) $t^2 + x^2 + y^2 = a^2,\ t + x + y = b.$

$>$

(8) $x = at^2 + a^2;$

(9) $x = at^2 + bt + c;$

(10) $(t-a)^2 + (x-b)^2 = c^2;$

(11) $x = a\cos t,\ y = a\sin t;$

(12) $t^2 + x^2 + y^2 = a^2,\ t + x + y = b.$

- 469/−4 :

$<$

homogén egyenlet $y = x/t$ helyettesítéssel szeparábilisra vezethető vissza.

$>$

homogén egyenlet $y = x/t$ helyettesítéssel szeparábilisra vezethető vissza. (Néha érdemes az általánosabb $y = x^{\xi}t^{\tau}$ helyettesítéssel próbálkozni, hátha szeparábilis egyenletet kapunk.)

- 470/−13 :

$<$

(10) $(a^2 + y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\,dy = 0,\ y(a) = 0.$

$>$

(10) $(a^2 + y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\,dy = 0,\ y(a) = 0;$

(11) $2x\ln y + x^2y'/y = 0;$

(13) $y' = \sin y;$

(14) $y' = 10^y;$

(15) $y' = 10^{x+y};$

(16) $xy' + y = \sin x;$

(17) $xy^2(xy' + y) = a^2.$

- 470/−10 :

$<$

(3) $(t^2 + x^2)x' = tx;$

(4) $(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0;$

(5) $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 3xy)\,dy = 0.$

$>$

(3) $x' = (x^2 + t^2)/(2tx)$;

(4) $(t^2 + x^2)x' = tx$;

(5) $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$;

(6) $(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0$;

(7) $(x + y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$;

(8) $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 3xy)\,dy = 0$;

(9) $x^2 + xy + y^2 = x^2y'$;

(10) $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$;

(11) $2xyy' = 3x^2 - y^2$;

(12) $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$;

(13) $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0$;

(14) $(x^2 - y^4)y' = xy$;

(15) $2y' + y^2 + 1/x^2 = 0$;

(16) $x^2(y' + y^2) = a(xy - 1)$;

(17) $(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1})\,dx + 2x\,dy = 0$.

- 470/-1 :

$<$

(5) $(t + x)^2x' = a^2$.

$>$

(5) $(t + x)^2x' = a^2$;

(6) $x' = (at + bx + c)^2$.

- 471/2 :

$<$

(1) $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$;

(2) $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$;

(3) $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

$>$

(1) $y' = 2(y + 2)^2/(x + y - 1)^2$;

(2) $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$;

(3) $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$;

(4) $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

- 471/12 :

<

is bebizonyítjuk később.) Lineárisra visszavezethető az

>

is bebizonyítjuk később.) Néha az egyenlet t-ben, mint x függvényében lineáris. Lineárisra visszavezethető az

- 471/−7 :

<

(6) $y' + x^2y = x^2$, $y(0) = 1$.

>

(6) $y' + x^2y = x^2$, $y(0) = 1$;

(8) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$;

(9) $y' - 1 = e^{x+2y}$;

(10) $xy' + 1 = e^y$.

- 471/−1 :

<

(5) $y^{n-1}(ay' + y) = x$.

>

(5) $y^{n-1}(ay' + y) = x$;

(6) $y' - 3y/(2x) = 3x\sqrt{y}/2$;

(7) $3y^2y' - ay^3 = x + 1$.

- 472/5 :

<

(4) $y' = e^xy^2 - y + e^{-x}$.

>

(4) $y' = e^xy^2 - y + e^{-x}$;

(5) $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$;

(6) $y' + Ay^2 = Bx^m$;

(7) $xy' + 3y + y^2 = x^2$.

- 472/−12 :

<

(1) $t\,dt + x\,dx + (t^2 + x^2)t^2\,dt = 0$;

(2) $\operatorname{tg} x\,dt - \operatorname{ctg} t\,dx = 0$;

(3) $x(1 + tx)\,dt - t\,dx = 0$;

(4) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx - 2y\,dy = 0$;

(5) $(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0;$
(6) $xy^3\,dx + (1 + 2x^2y^2)\,dy = 0;$
(7) $(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0;$
(8) $(3y^2/x - y/x^2 + 2y)\,dx + (8y^2/x + 1/x + 3y)\,dy = 0;$
(9) $(xy + y^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0;$
(10) $(y^3 - 2x^2y)\,dx + (2xy^2 - x^3)\,dy = 0.$

$>$

(1) $(2x + y + 1)\,dx + (x + 3y + 2\,dy = 0;$
(2) $y\,dx + (2x^2y - x)\,dy = 0;$
(3) $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^2 - 3x^2y) = 0;$
(4) $t\,dt + x\,dx + (t^2 + x^2)t^2\,dt = 0;$
(5) $\operatorname{tg} x\,dt - \operatorname{ctg} t\,dx = 0;$
(6) $x(1 + tx)\,dt - t\,dx = 0;$
(7) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx - 2y\,dy = 0;$
(8) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0;$
(9) $(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0;$
(10) $xy^3\,dx + (1 + 2x^2y^2)\,dy = 0;$
(11) $(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0;$
(12) $(3y^2/x - y/x^2 + 2y)\,dx + (8y^2/x + 1/x + 3y)\,dy = 0;$
(13) $(xy + y^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0;$
(14) $(y^3 - 2x^2y)\,dx + (2xy^2 - x^3)\,dy = 0;$
(15) $(xy + y^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0;$
(16) $x(1 - y)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0;$
(17) $(y + x^2y^3)\,dx + (x^3y^2 - 2x^2y + x)\,dy = 0;$
(18) $\cos x + e^x \sin y + e^{-x}y' \cos y = 0;$
(19) $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0.$

- 474/6 :

$<$

(5) $(tx' - x)^2 - {x'}^2 - 1 = 0.$

$>$

(5) $(tx' - x)^2 - {x'}^2 - 1 = 0;$
(6) $xy' = \sqrt{1 + {y'}^2};$
(7) ${y'}^3 - 3y' + 1 = 0;$
(8) $x(1 + {y'}^2 = 1;$
(9) $y = y' \ln y';$
(10) $y = xy' + {y'}^2.$

- $474/-1:$

$<$

(11) $x''' = 2xx'$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 4.5$.

$>$

(11) $x''' = 2xx'$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 4{,}5$;

(12) $yy''^2 = 1$;

(13) $y'' = ae^y$;

(14) $x = y'' + e^{y''}$;

(15) $x = y''e^{y''}$;

(16) $y'^2 + y''^2 = 1$.

- $475/8:$

$<$

(7) $2xx'' - x'^2 = (x' - tx'')^2/3$.

$>$

(7) $y'' - 2y/x^2 = 0$;

(8) $xy'' = y' + x\sin(y'/x)$.

- $475/-2:$

$<$

(4) $x' = t^2 - x^2$, $x(0) = 1$;

(5) $x' = x^2 - t$, $x(0) = 1$.

$>$

(4) $2xx'' - x'^2 = (x' - tx'')^2/3$;

(5) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$;

(6) $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$;

(7) $x' = t^2 - x^2$, $x(0) = 1$;

(8) $x' = x^2 - t$, $x(0) = 1$.

- $485/-4:$

$<$

22.7. Grönwall-lemma. Legyenek u és v a $[0, c]$ intervallumon adott

$>$

22.6.5. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy a Peano-tétel feltételei mellett minden megoldás folytatható teljes megoldássá.

22.7. Grönwall-lemma. Legyenek u és v a $[0, c]$ intervallumon adott

- 486/−1 :

$<$

amiből $\omega(t) \le u(t) + y(t)$ miatt adódik az állítás.

$>$

amiből $\omega(t) \le u(t) + y(t)$ miatt adódik az állítás.

22.7.5. Feladat [8]. Oldjuk meg az alábbi defferenciálegyenlőtlenségeket:

(1) $y' \le 0$;

(2) $xy' \le y$;

(3) $yy' \le -x$;

(4) $0 \le (x^2 - x0y' + y = x^2$;

(5) $\cos(x-y) \le y'\bigl(1+\cos(x-y)\bigr)$.

- 495/−4 :

$<$

* **23.7. Megjegyzés.** Az eddig tárgyalt fogalmak és általános tételek

$>$

* **23.7. Megjegyzés: differenciálegyenletek Banach-térbeli értékű függvényekre.** Az eddig tárgyalt fogalmak és általános tételek

- 497/8 :

$<$

Jelölje $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorvektorokból álló négyzetes mátrix determinánsát. Ha $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jelölik $\Phi(t)$ mátrixának sorvektorait (sic!), akkor

$$\psi(t) = \bigl[\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t)\bigr]$$

és

$$A(t) = \bigl(a_{i,j}(t)\bigr)_{i,j=1}^{n}$$

jelöléssel

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \bigl[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\bigr]' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \bigl[\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i'(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\bigr] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Bigl[\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\varphi_j(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\Bigr] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) \bigl[\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_j(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\bigr] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t) \bigl[\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\bigr]
\end{aligned}$$

>

Jelölje $|x_1, x_2, \ldots, x_n|$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sorvektorokból álló négyzetes mátrix determinánsát. Ha $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jelölik $\Phi(t)$ mátrixának sorvektorait (sic!), akkor

$$\psi(t) = \left|\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)\right|$$

és

$$A(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^{n}$$

jelöléssel

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \left|\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right|' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i'(t), \varphi_{i+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{i-1}(t), \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\varphi_j(t), \varphi_{i+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) \left|\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_j(t), \varphi_{i+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t) \left|\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i(t), \varphi_{i+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\right|
\end{aligned}$$

- 499/−2 :

<

(2)
$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = -3, \\ x_2' &= -8x_1 - 3x_2, \quad x_2(0) = 2. \end{aligned}$$

>

(2)
$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = -3, \\ x_2' &= -8x_1 - 3x_2, \quad x_2(0) = 2; \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + x_2, \quad x_1(0) = -4, \\ x_2' &= -9x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

- 502/−1 :

<

(6) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0.$

>

(6) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0;$

(7) $x^2 \ln x y'' - xy' + y = 0;$

(8) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0;$

(9) $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0.$

- 503/8 :

$<$

(3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

$>$

(3) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

(4) $y'' + \omega^2 y = 0;$

(5) $y'' + 2y' + y = 0;$

(6) $y'' + y' - 2y = 0;$

(7) $y'' - 6y' = 0;$

(8) $y'' + 4y = 0;$

(9) $y'' + 4y' + 3y = 0;$

(10) $y^{(3)} - 3y' - 2y = 0;$

(11) $y^{(4)} - y = 0;$

(12) $y^{(4)} + y = 0;$

(13) $y'' + y = x^2;$

(14) $y'' - y = e^x;$

(15) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x};$

(16) $y'' - y = 2e^x - x^2;$

(17) $y'' - 3y' + 2y = \sin x;$

(18) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x};$

(19) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x};$

(20) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin x;$

(21) $y'' - 3y' + 2y = x \cos x;$

(22) $y'' + y = \hat{g}x;$

(23) $y'' + y = 1/\cos x;$

(24) $y'' + y' + y = x;$

(25) $y^{(3)} - 3y' - 2y = -8x^3.$

- 503/10 :

$<$

(1) $y'' - 2y/x^2 = 0;$

(2) $y'' - 3y'/x + 5y/x^2 = 0;$

(3) $y'' + 7y'/x + 9y/x^2 = 0.$

$>$

(1) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0;$

(2) $x^2 y'' + xy' - y = 0;$

(3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$;

(4) $y'' - 2y/x^2 = 0$;

(5) $y'' - 3y'/x + 5y/x^2 = 0$;

(6) $y'' + 7y'/x + 9y/x^2 = 0$;

(7) $xy'' + y' - y/x = 0$;

(8) $2x^2y'' - xy' + y = x^2$;

(9) $4x^2y'' + y = \sqrt{x}$;

(10) $x^2y'' + xy' - y = x^2$.

23.26.3. Feladat [10]. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték- és peremérték-problémákat:

(1) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

(2) $y'' + y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

(3) $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;

(4) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;

(5) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;

(6) $y'' + y = 2x - \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;

(7) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

23.26.7. Feladat [11]. Határozzuk meg a harmónikus rezgőmozgás, a csillapított harmónikus rezgőmozgás, a kényszerrezgés és a csillapított kényszerrezgés kitérés-idő függvényét.

- 530/10 :

$<$

megoldását adja. Ez a *különbség trükk*.

$>$

megoldását adja. Ez a *különbség trükk*. Fordítva is alkalmazható: ha inhomogén egyenletet homogén peremfeltétel mellett akarunk megoldani, és ismert az inhomogén egyenlet egy megoldása, akkor a különbség trükkel az inhomogén egyenletet homogén egyenletre vezethetjük vissza inhomogén peremfeltétellel.

- 531/-9 :

$<$

natkozó egyenletekre szorítkoztunk, azért, hogy a fellépő differenciáloperátorok szimmetrikusak legyenek. Anizotróp esetre a tárgyalás technikailag

$>$

natkozó egyenletekre szorítkoztunk. Anizotróp esetre a tárgyalás technikailag

- 541/16 :

$<$

más C-vel), akkor a disztribúciót *m-edrendűnek* nevezzük. Ha nincs ilyen m,

$>$

más C-vel), akkor a disztribúciót legfeljebb *m-edrendűnek* nevezzük. Ha nincs ilyen m,

- 552/−3 :

$<$

probléma megoldására felhasználható egy olyan $G \times \overline{G}$-n értelmezett $(x, y) \mapsto$

$>$

probléma megoldására felhasználható egy olyan $\overline{G} \times G$-n értelmezett $(x, y) \mapsto$

- 554/5 :

$<$

$$E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{2ki} \quad \text{és} \quad \overline{E}(x) = \frac{-e^{-ik|x|}}{2ki}$$

$>$

$$E(x) = \frac{-e^{ik|x|}}{2ki} \quad \text{és} \quad \overline{E}(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

- 554/5 :

$<$

$$E(x) = \frac{e^{-k|x|}}{2k} \quad \text{illetve} \quad \overline{E}(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

$>$

$$E(x) = \frac{e^{-k|x|}}{2k} \quad \text{illetve} \quad E(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

- 557/2 :

$<$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ függvényre

$>$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ függvényre

- 561/−13 :

$<$

(2) $\partial_k \delta \times \delta$;

(3) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\delta$, $t_0 \geq 0$;

(4) $\delta \times \delta'$;

(5) $\partial_k^2\delta \times \tau_{t_0}\delta$;

(6) $\partial_k\delta \times \delta'$;

(7) $\delta \times \Theta$;

(8) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\Theta$, $t_0 \geq 0$;

(9) $\tau_{x_0}\delta \times \delta' + \partial_k\tau_{x_0}\delta \times \delta$;

$>$

(2) $\delta' \times \delta$;

(3) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\delta$, $t_0 \geq 0$;

(4) $\delta \times \delta'$;

(5) $\delta'' \times \tau_{t_0}\delta$;

(6) $\delta' \times \delta'$;

(7) $\delta \times \Theta$;

(8) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\Theta$, $t_0 \geq 0$;

(9) $\tau_{x_0}\delta \times \delta' + (\tau_{x_0}\delta)' \times \delta$;

- $567/-12$:

$<$

észre, hogy az $n = 1$ eset is hasonlóan kezelhető. A lokálisn Lipschitz határú

$>$

észre, hogy az $n = 1$ eset is hasonlóan kezelhető. A lokálisan Lipschitz határú

- $572/-15$:

$<$

$$(T_E u)(v) = \langle u, v \rangle$$

$>$

$$(T_E u)(v) = \langle u, v \rangle_E$$

- $574/-14$:

$<$

$$\langle T_F u, v \rangle = \langle u, T_F v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \text{minden } u \in \mathrm{dmn}(T)\text{-re.}$$

$>$

$$\langle T_F u, v \rangle = \langle u, T_F v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \text{minden } v \in \mathrm{dmn}(T)\text{-re.}$$

- 574/−1 :

  <

  Bizonyítás. Alkalmazzuk a tételt f helyett a $\lambda u + f$ függvényre.

  >

  Bizonyítás. Alkalmazzuk a tétel bizonyítását f helyett a $\lambda u + f$ függvényre.

- 578/10 :

  <

$$\int_G |u|^2 \leq c \int_G |\nabla u|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}_0^1(G). \tag{1}$$

  >

$$\int_G u^2 \leq c \int_G |\nabla u|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}_0^1(G;\mathbb{R}). \tag{1}$$

- 578/13 :

  <

$$\varepsilon \int_{\partial G} u^2 \leq c \int_G \big(u^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|^2\big), \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}^1(G). \tag{2}$$

  >

$$\varepsilon \int_{\partial G} u^2 \leq c \int_G \big(u^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|^2\big), \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}^1(G;\mathbb{R}). \tag{2}$$

- 578/16 :

  <

$$\int_G \big(u^2 + |\nabla u|^2\big) \leq c \left(\int_G |\nabla u|^2 + \int_{\partial G} u^2 \right), \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}^1(G). \tag{3}$$

  >

$$\int_G \big(u^2 + |\nabla u|^2\big) \leq c \left(\int_G |\nabla u|^2 + \int_{\partial G} u^2 \right), \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}^1(G;\mathbb{R}). \tag{3}$$

- 578/10 :

  <

$$\int_G |u|^2 \le c \int_G |\nabla u|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}_0^1(G). \tag{1}$$

$>$

$$\int_G u^2 \le c \int_G |\nabla u|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}_0^1(G;\mathbb{R}). \tag{1}$$

- 579/4 :

$<$

Másrészt hasonló számolással, ha $p_1 \ge p - \varepsilon c_o c$, $q_1 \ge q - c_0 c/\varepsilon$, akkor

$>$

Másrészt hasonló számolással, ha $p_1 \ge p + \varepsilon c_o c$, $q_1 \ge q + c_0 c/\varepsilon$, akkor

- 579/15 :

$<$

eredeti normájával ekvivalens. Az első peremérték-feladatra ez nyilvánvaló, a második és harmadik peremérték-probléma esetén pedig következik az előző

$>$

eredeti normájával ekvivalens. Az első és második peremérték-feladatra ez nyilvánvaló, a harmadik peremérték-probléma esetén pedig következik az előző

- 580/2 :

$<$

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \quad u(-1) = u(1)$$

$>$

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \quad u(-1) = u(1) = 0$$

- 584/3 :

$<$

$(m+1)(m+2)/2$ egybevágó kis háromszögre osztva, válasszuk csomópontnak a kis háromszögek csúcsait. Ha minden csomóponthoz a függvényérték

$>$

$(m+1)^2$ egybevágó kis háromszögre osztva, válasszuk csomópontnak a kis háromszögek $(m+1)(m+2)/2$ csúcsát. Ha minden csomóponthoz a függvényérték

- 592/16 :

$<$

sajátérték-probléma sajátértékeit és sajátfüggvényeit a $G = \{x : |x| < 1, x \in \mathbb{R}^2\}$ egységkörön. Polárkoordinátákra áttérve az $(r,\varphi) \mapsto \tilde{u}(r,\varphi)$ függvényre

$>$

sajátérték-probléma sajátértékeit és sajátfüggvényeit a $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ egységkörön. Polárkoordinátákra áttérve az $(r,\varphi) \mapsto \tilde{u}(r,\varphi)$ függvényre

- 592/19 :

<

$$G : -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u}, \quad \partial G : k\tilde{u} + h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = 0;$$

>

$$G : -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u}, \quad \partial G : \tilde{k}\tilde{u} + \tilde{h}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = 0;$$

- 592/−6 :

<

$$r(rR')' + (\lambda r^2 - \kappa)R = 0, \quad kR(1) + hR'(1) = 0.$$

>

$$r(rR')' + (\lambda r^2 - \kappa)R = 0, \quad kR(1) + hR'(1) = 0, \quad \text{ha } k,\, h \text{ konstans.}$$

- 593/1 :

<

Mivel $\lambda > 0$, $\mu = \sqrt{\lambda}$ jelöléssel, bevezethetjük a $\mu r = x$

>

Ha $\lambda > 0$, akkor $\mu = \sqrt{\lambda}$ jelöléssel bevezethetjük a $\mu r = x$

- 594/9 :

<

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\vartheta \int_0^{2\pi} \tilde{u}(r,\vartheta,\varphi)\overline{\tilde{v}}(r,\vartheta,\varphi)\, d\varphi\, d\vartheta\, dr.$$

>

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 r^2 \int_0^{\pi} \sin\vartheta \int_0^{2\pi} \tilde{u}(r,\vartheta,\varphi)\overline{\tilde{v}}(r,\vartheta,\varphi)\, d\varphi\, d\vartheta\, dr.$$

- 595/3 :

<

egyenlet megoldásai $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq |m|$ esetén a

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{|m|/2} P_l^{(|m|)}(z)$$

*asszociált Legendre-függvény*ek. A mellékletben található összefüggések szerint ezek szoros kapcsolatban vannak az ultraszférikus polinomokkal:

$$ {}^{(|m|)}P_{l-|m|}(z) = \frac{2^{|m|}l!}{(l+|m|)!}(1-z^2)^{-|m|/2}P_l^m(z). \tag{2} $$

Ezt az összefüggést az ultraszférikus polinomok differenciálegyenletébe helyettesítve, kapjuk, hogy P_l^m kielégíti (1)-et $\kappa = l(l+1)$ esetén. Mivel az ultraszérikus polinomok teljes ortonormált rendszert alkotnak a $\varrho(z) = (1-z^2)^{|m|}$ súlyfüggvényre nézve, a P_l^m, $l \geq |m|$ függvények, mint a ${}^{(|m|)}P_{l-|m|}\sqrt{\varrho}$ függvények konstansszorosai, teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2]-1,1[$-ben.

>

egyenlet megoldásai $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq l$ esetén a

$$ P_l^m(z) = (1-z^2)^{m/2}P_l^{(m)}(z) $$

*asszociált Legendre-függvény*ek. Az ortogonális polinomokra vonatkozó összefüggések szerint ezek szoros kapcsolatban vannak az ultraszférikus polinomokkal:

$$ {}^{(m)}P_{l-m}(z) = \frac{2^m l!}{(l+m)!}(1-z^2)^{-m/2}P_l^m(z). \tag{2} $$

Ezt az összefüggést az ultraszférikus polinomok differenciálegyenletébe helyettesítve, kapjuk, hogy P_l^m kielégíti (1)-et $\kappa = l(l+1)$ esetén. Mivel az ultraszérikus polinomok teljes ortonormált rendszert alkotnak a $\varrho(z) = (1-z^2)^m$ súlyfüggvényre nézve, a P_l^m, $0 \leq m \leq l$ függvények, mint a ${}^{(m)}P_{l-m}\sqrt{\varrho}$ függvények konstansszorosai, teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2]-1,1[$-ben.

- $595/-13$:

<

vehetjük. Felhasználva a Legendre-polinomokra a mellékletben található

$$ P_l(z) = 2^k \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \binom{2l-2k}{l}\binom{l}{k} z^{l-2k} $$

>

vehetjük. Megmutatható, hogy Y_l^m normanégyzete

$$ \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}. $$

Mivel Y_l^0 valós, a valós részének normanégyzete ugyanennyi, míg egyébként a valós és a képzetes rész normanégyzete is ennek a fele. Felhasználva a Legendre-polinomokra vonatkozó

$$ P_l(z) = 2^k \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \binom{2l-2k}{l}\binom{l}{k} z^{l-2k} = \sum_{k=0}^{[l/2]} c_k z^{l-2k} $$

- 596/13 :

<

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta\psi - \frac{Q_e^2}{|x|}\psi, \quad \mathrm{dmn}(H) = \mathcal{D}(R^3)$$

Hamilton-operátora (lásd a 7.110 pontot) lényegében önadjungált és alulról korlátos. Továbbá

$$\sigma_c(\overline{H}) = [0,\infty[, \quad \sigma_p(\overline{H}) = \left\{-\frac{m_r Q_e^2}{2\hbar^2 n^2} : n = 1,2,\dots\right\}, \quad \sigma_r(\overline{H}) = \emptyset.$$

A $-m_r Q_e^4/(2\hbar^2 n^2)$ *sajátértékhez tartozó sajátaltér* n^2 *dimenziós, és a (gömbi koordinátákban felírt)*

$$^{(2l+1)}L_{n-l-1}\Big(\frac{2m_r Q_e^2}{\hbar^2 n}r\Big) \cdot r^l \cdot e^{-\frac{2m_r Q_e^2}{\hbar^2 n}r} \cdot Y_l^m(\vartheta,\varphi), \quad 0 \le l \le n-1, \ |m| \le l$$

sajátfüggvények feszítik ki, ahol az L *függvények általánosított Laguerre-polinomok, az* Y *függvények pedig gömbfüggvények. Az* $\overline{H}$ *operátor értelmezési tartománya a* $\mathcal{H}^2$ *Szoboljev-tér.*

>

$$(H\psi)(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta\psi - \frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}\psi, \quad \mathrm{dmn}(H) = \mathcal{D}(R^3)$$

Hamilton-operátora (lásd a 7.110 pontot) lényegében önadjungált és alulról korlátos. Továbbá

$$\sigma_c(\overline{H}) = [0,\infty[, \quad \sigma_p(\overline{H}) = \left\{-\frac{m_e Q_e^4}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2} : n = 1,2,\dots\right\}, \quad \sigma_r(\overline{H}) = \emptyset;$$

a $-m_e Q_e^4/(8h^2\varepsilon_0^2 n^2)$ *sajátértékhez tartozó sajátaltér* n^2 *dimenziós, és a (gömbi koordinátákban felírt)*

$$^{(2l+1)}L_{n-l-1}\Big(\frac{2r}{nr_0}\Big) \cdot r^l \cdot e^{-r/(nr_0)} \cdot Y_l^m(\vartheta,\varphi), \quad 0 \le l \le n-1, \ |m| \le l$$

sajátfüggvények feszítik ki, ahol $r_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(m_e Q_e^2)$ a Bohr-féle atomsugár, *az* L *függvények általánosított Laguerre-polinomok, az* Y *függvények pedig gömbfüggvények. Az* $\overline{H}$ *operátor értelmezési tartománya a* $\mathcal{H}^2$ *Szoboljev-tér.*

Ha a redukált sugárral számolunk, m_e helyére m_r kerül, és ha a mag töltése Z, akkor Q_e^2 helyére ZQ_e^2.

- 597/1 :

<

$q_3 = r\cos\vartheta$, $0 \le r < \infty$, $-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$. A ψ függvény r, ϑ, φ

>

$q_3 = r\cos\vartheta$, $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $-\pi \le \varphi \le \pi$. A ψ függvény r, ϑ, φ

- 597/−15 :

<

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{2m_r}{\hbar^2}\left(E + \frac{Q_e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0.$$

Az $r_0^2 = -\hbar^2/(2m_r E)$ jelölést bevezetve, az r változó helyett áttérünk a dimenzió nélküli $\varrho = 2r/r_0$ független változóra. Az $\overline{R}(\varrho) = R(r)$, $n = m_r Q_e^2 r_0/\hbar^2$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$\overline{R}'' + \frac{2}{\varrho}\overline{R}' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right)\overline{R} = 0. \tag{2}$$

Kis ϱ esetén hatványsor alakban keressük a megoldást: $\overline{R}(\varrho) = c_0\varrho^s + c_1\varrho^{s+1} + \cdots$. Csak a főtagokat tartva meg, és elhanyagolva a magasabb fokú tagokat, az $s(s+1) = l(l+1)$ összefüggés adódik, ebből pedig $s = l$ vagy $s = -(l+1)$, de csak az első esethez tartozik sima megoldás, így azt sejtjük, hogy kis ϱ-ra $\overline{R}(\varrho) \sim \varrho^l$.

Nagy ϱ esetén a (2) egyenletben elhanyagolva az $1/\varrho$-t és $1/\varrho^2$-et tartalmazó tagokat, az $\overline{R}'' \sim \overline{R}/4$ összefüggést kapjuk, ahonnan azt sejtjük, hogy $\overline{R}(\varrho) \sim e^{\pm\varrho/2}$, de csak $e^{-\varrho/2}$ négyzetesen integrálható. Ezek a heurisztikus meggondolások azt sugallják, hogy $\overline{R}(\varrho) = \varrho^l e^{-\varrho/2} w(\varrho)$ alakban érdemes keresni a megoldást. Visszahelyettesítve (2)-be, azt kapjuk, hogy

$$\varrho w'' + (2l + 2 - \varrho)w' + (n - l - 1)w = 0.$$

Ebből látjuk, hogy ha $n - l - 1 \geq 0$, azaz ha $n \geq l - 1$, akkor ${}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)$ megoldás, nyilván erre

$$\overline{R}(\varrho) = {}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)\varrho^l e^{-\varrho/2},$$

azaz

$$r_0^2 = \frac{\hbar^4}{m_r Q_e^4}n^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_r E}$$

miatt $E = -m_r Q_e^4/(2\hbar^2 n^2)$ és kapjuk az állítást.

>

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E + \frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0.$$

Az $\tilde{r}_0^2 = -\hbar^2/(2m_e E)$ jelölést bevezetve, az r változó helyett áttérünk a dimenzió nélküli $\varrho = 2r/\tilde{r}_0$ független változóra. Az $\tilde{R}(\varrho) = R(r)$, $n = m_e Q_e^2 \tilde{r}_0/(4\pi\varepsilon_0\hbar^2)$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$\tilde{R}'' + \frac{2}{\varrho}\tilde{R}' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right)\tilde{R} = 0. \tag{2}$$

Kis ϱ esetén hatványsor alakban keressük a megoldást: $\tilde{R}(\varrho) = c_0\varrho^s + c_1\varrho^{s+1} + \cdots$. Csak a főtagokat tartva meg, és elhanyagolva a magasabb fokú tagokat, az $s(s+1) = l(l+1)$ összefüggés adódik, ebből pedig $s = l$ vagy $s = -(l+1)$, de csak az első esethez tartozik sima megoldás, így azt sejtjük, hogy kis ϱ-ra $\tilde{R}(\varrho) \sim \varrho^l$.

Nagy ϱ esetén a (2) egyenletben elhanyagolva az $1/\varrho$-t és $1/\varrho^2$-et tartalmazó tagokat, az $\tilde{R}'' \sim \tilde{R}/4$ összefüggést kapjuk, ahonnan azt sejtük, hogy $\tilde{R}(\varrho) \sim e^{\pm\varrho/2}$, de csak $e^{-\varrho/2}$ négyzetesen integrálható. Ezek a heurisztikus meggondolások azt sugallják, hogy $\tilde{R}(\varrho) = \varrho^l e^{-\varrho/2} w(\varrho)$ alakban érdemes keresni a megoldást. Visszahelyettesítve (2)-be, azt kapjuk, hogy

$$\varrho w'' + (2l + 2 - \varrho)w' + (n - l - 1)w = 0.$$

Ebből látjuk, hogy ha $n - l - 1 \geq 0$, azaz ha $n > l$, akkor ${}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)$ megoldás, nyilván erre

$$\tilde{R}(\varrho) = {}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)\varrho^l e^{-\varrho/2},$$

azaz

$$\tilde{r}_0^2 = \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4}{m_e^2 Q_e^4} n^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_e E}$$

miatt $E = -m_e Q_e^4/(8\varepsilon_0^2 h^2 n^2)$ és kapjuk az állítást.

- 599/−11 :

$<$

Ax-el.

$>$

Ax-szel.

- 599/−3 :

$<$

Ax-el.

Az első esetben *egyparaméteres operátor félcsoport*ról, a második esetben *egyparaméteres operátor csoport*ról beszélünk, A a *generátor*.

$>$

Ax-szel.

Az első esetben *egyparaméteres lineáris operátor félcsoport*ról, a második esetben *egyparaméteres lineáris operátor csoport*ról beszélünk, A a *generátor*.

- 603/5 :

$<$

valósak, akkor a $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j$ összefüggés H egy önadjungált ope-

$>$

valósak, akkor a $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j$ összefüggés H egy önadjungált ope-

- 603/−12 :

<

véges, és $u \in \mathcal{C}(\overline{H}_T) \cap \mathcal{C}^2(H_T)$ teljesíti a diffúziós egyenletet H_T-n. Ha $f \leq 0$ a H_T hengeren, akkor vagy $u \leq 0$ a $\overline{H}_T$-on, vagy az u felveszi $\overline{H}_T$-beli

>

véges, és $u \in \mathcal{C}(\overline{H}_{T'}) \cap \mathcal{C}^2(H_{T'})$ teljesíti a diffúziós egyenletet $H_{T'}$-n valamely $T' > T$-re. Ha $q \geq 0$, $f \leq 0$ a H_T hengeren, akkor $u \leq 0$ a $\overline{H}_T$-on, vagy az u felveszi $\overline{H}_T$-beli

- 604/9 :

<

Következmény. *29.5 feltételei mellett, első peremfeltétel esetén*

>

Következmény. *29.5 feltételei mellett, $q \geq 0$ és első peremfeltétel esetén*

- 604/−13 :

<

$\tilde{g} = g - \varepsilon t/\varrho_0$ peremfeltétellel. Mivel $\tilde{f} \leq 0$ és $\tilde{g} \leq \delta$, a maximumelvet alkal-

>

$\tilde{g} = g - \varepsilon t/\varrho_0$ peremfeltétellel. Mivel $\tilde{f} \leq 0$ és $\tilde{g} \leq \delta_0$, a maximumelvet alkal-

- 605/−4 :

<

$$\begin{aligned} v'(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -AS(t-s) + S(t-s)\big(Au(s) + b(s)\big) = S(t-s)b(s). \end{aligned}$$

>

$$\begin{aligned} v'(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)\big(Au(s) + b(s)\big) = S(t-s)b(s). \end{aligned}$$

- 618/−1 :

<

megoldással.

>

megoldással.

30. Nemlineáris parciális differenciálegyenletek

* **30.1. Definíció:** Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátor

(1) *nemexpanzív*, ha $\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|$ minden $x, y \in \operatorname{dmn}(A)$-ra;

(2) *monoton*, ha $\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0$ minden $x, y \in \operatorname{dmn}(A)$-ra;

(3) *maximális monoton*, ha monoton és $\langle b - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $y \in \mathrm{dmn}(A)$ esetén $Ax = b$, azaz nincs valódi monoton kiterjesztése;

(4) *bővülő*, ha $\mathbb{I} + \mu A$ injektív, és az inverze nemexpanzív minden $\mu > 0$-ra;

(5) *maximális bővülő*, ha bővülő és $(\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$az egész H-n van értelmezve.

Vegyük észre, hogy ha A nemexpanzív, akkor $\mathbb{I} - A$ monoton, hiszen $x, y \in \mathrm{dmn}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}\big\langle (x - Ax) - (y - Ay), x - y\big\rangle &= \langle x - y, x - y\rangle - \langle Ax - Ay, x - y\rangle \\ &\geq \|x - y\|^2 - \|Ax - Ay\|\|x - y\| \geq 0.\end{aligned}$$

* **30.2. Állítás:** *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátor pontosan akkor monoton, ha bővülő.*

Bizonyítás. Nyilván

$$\big\|(x + \mu Ax) - (y + \mu Ay)\big\| = \|x - y\|^2 + 2\mu\langle Ax - Ay, x - y\rangle + \mu^2\|Ax - Ay\|^2.$$

Innen

$$\big\|(x + \mu Ax) - (y + \mu Ay)\big\| \geq \|x - y\|^2$$

minden $\mu > 0$-ra pontosan akkor teljesül, ha $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0$.

* **30.3. Állítás:** *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátorra ekvivalensek:*

(1) A monoton és $\mathrm{rng}(\mathbb{I} + A) = H$;

(2) A maximális bővülő;

(3) A maximális monoton.

Az, hogy (3)-ból következik (1), Minty tétele, és később bizonyítjuk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1) teljesül. A Banach-féle fixponttételt fogjuk használni. Az $R_\lambda = (\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$ operátor nemexpanzív, így elég megmutatni, hogy $\mathrm{rng}(\mathbb{I} + \mu A) = H$ minden $\mu > 0$-ra. Az $x + \mu Ax = z$, $x \in H$ egyenlet ekvivalens az $x = L_z x$, $x \in H$ egyenlettel, ahol $L_z x = R_\lambda\big((1 - \lambda/\mu)x + (\lambda/\mu)z\big)$. Ha $\mu > \lambda/2$, akkor $|1 - \lambda/\mu| < 1$ és $\|L_z x - L_z y\| \leq |1 - \lambda/\mu|\|x - y\|$ minden $x, y \in H$-ra, így pontosan egy fixpont van. Kezdve $\lambda = 1$-gyel és indukcióval folytatva $\mu > \lambda/2^n$-re kapjuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy A maximális bővülő. Ekkor A monoton. Tegyük fel, hogy $\langle b - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $y \in \mathrm{dmn}(A)$-ra. Legyen $y = y_t = (\mathbb{I} + A)^{-1}(u + b + tz)$, ha $t > 0$ és $z \in H$. Az $\langle x - y_t, x - y_t\rangle \geq 0$ egyenlőtlenséget hozzáadva a fentihez $\langle b - x - Ay_t - y_t, x - y_t\rangle \geq 0$, ahonnan $\langle zx - y_t\rangle \leq 0$. Ha $t \downarrow 0$, akkor innen $\big\langle z, x - (\mathbb{I} + A)^{-1}(b + x)\big\rangle \leq 0$ minden $z \in H$-ra, azaz $x = (\mathbb{I} + A)^{-1}(b + x)$.

* **30.4. Konvergenciatrükk maximális monotonitással:** *Legyen H valós Hilbert-tér, $A \in H \to H$ maximális monoton operátor. Ekkor ha $Ax_n \rightharpoonup b$ és $x_n \to x$ vagy $Ax_n \to b$ és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $Ax = b$.*

Bizonyítás. Mivel $\langle Ax_n - Ay, x_n - y\rangle \geq 0$, kapjuk, hogy $\langle b - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $y \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén.

* **30.5. Komura tétele:** *Legyen H valós Hilbert-tér, és tegyük fel, hogy $A \in H \to H$ monoton és $\operatorname{rng}(\mathbb{I}+A) = H$. Ekkor minden $u_0 \in \operatorname{dmn}(A)$-ra létezik pontosan egy $u : [0, +\infty[\to H$ folytonos függvény, amelyre $u(0) = u_0$ és $u'(t) + Au(t) = 0$, ha $0 < t < +\infty$, a deriváltat gyenge értelemben értve. Továbbá erre az egyértelmű megoldásra*

(1) $u(t) \in \operatorname{dmn}(A)$, ha $t > 0$;

(2) u Lipschitz-függvény $[0, +\infty[$-en;

(3) majdnem minden $t > 0$-ra a derivált a szokásos értelemben is létezik, és teljesül a differenciálegyenlet, valamint $\|u'(t)\| \leq \|Au_0\|$;

(4) a $t \mapsto u'(t)$ függvény általánosított deriváltja a $t \mapsto u(t)$ függvénynek, és $u' : [0, +\infty[\to H$ gyengén folytonos;

(5) minden $t \geq 0$-ra létezik az $u'_+(t)$ jobb oldali derivált és $u`_+(t) + Au(t) = 0$.

A bizonyításhoz megjegyezzük, hogy az átviteli elv metrikus teret topologikus térbe képező függvény határértékére is érvényes marad.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az A-ra kirótt feltételek azzal ekvivalensek, hogy maximális monoton, illetve maximális bővülő.

Az unicitás bizonyítása nem nehéz: Legyen $u : [0, +\infty[\to H$ egy megoldás, amelyre u folytonos és u' létezik a gyenge értelemben. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle u(t+h), u(t+h)\rangle - \langle u(t), u(t)\rangle}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, u(t) + u(t+h)\right\rangle = 2\langle u'(t), u(t)\rangle.\end{aligned}$$

Legyen v egy másik megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 &= 2\langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\rangle \\ &= 2\langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle \leq 0,\end{aligned}$$

így $u(t) = v(t)$ minden $t \geq 0$-ra.

A létezés bizonyításának a kulcsa az $R_\mu = (\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$, $\mu > 0$ nemlineáris rezolvens használata, amely a feltételek szerint egy $H \to \operatorname{dmn}(A)$ bijektív és nemexpanzív leképezés minden $\mu > 0$-ra. Ennek segítségével képezzük a nemlineáris

$$A_\mu = \frac{1}{\mu}(\mathbb{I} - R_\mu), \quad \mu > 0$$

*Yosida-közelítés*t. A bizonyítás számos lépésből áll.

I. Megmutatjuk, hogy minden $\mu > 0$-ra és $u, v \in H$-ra $A_\mu u = AR_\mu u$, $\|A_\mu u - A_\mu v\| \le 2\|u - v\|/\mu$, és $\langle A_\mu u - A_\mu v\rangle \ge 0$, azaz A_μ monoton és Lipschitz-függvény, továbbá minden $\mu > 0$-ra és $u \in \mathrm{dmn}(A)$-ra $R_\mu Au = A_\mu u$ és $\|A_\mu u\| \le \|Au\|$. Valóban, $A_\mu R_\mu^{-1}[(R_\mu^{-1} - \mathbb{I})/\mu = A$ és hasonlóan $R_\mu^{-1} A_\mu = A$. Mivel R_μ nemexpanzív,

$$\|A_\mu u - A_\mu v\| = \frac{1}{\mu}\big\|(u - v) - (R_\mu u - R_\mu v)\big\| \le \frac{2}{\mu}\|u - v\|,$$

$$\|A_\mu u\| = \frac{1}{\mu}\|u - R_\mu u\| = \frac{1}{\mu}\big\|R_\mu(\mathbb{I} - \mu A)u - R_\mu u\big\| \le \|Au\|.$$

Mivel R_μ nemexpanzív, $\mathbb{I} - R_\mu$ monoton, és így A_μ is monoton.

II. Rögzített $T > 0$-ra az A operátorból elkészítjük az $X = \mathbb{L}^2\big[0, T]; H\big)$ tér $\tilde{A}$ operátorát az $(\tilde{A}u)(t) = Au(t)$ definícióval; az $\tilde{A}$ operátor azon u függvényekre van értelmezve, amelyekre $u(t) \in \mathrm{dmn}(A)$ majdnem minden t-re és $t \mapsto Au(t)$ az X-ben van. Megmutatjuk, hogy az $\tilde{A}$ operátor maximális bővülő. Az A monotonitásából

$$\langle \tilde{A}u - \tilde{A}v, u - v\rangle_X = \int_0^T \big\langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\big\rangle\, dt \ge 0.$$

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{rng}(\mathbb{I} + \tilde{A}) = X$. Legyen $w \in X$ és $u(t) = (\mathbb{I} + A)^{-1} w(t)$, $v = (\mathbb{I} + A)^{-1}(0)$. Mivel $(\mathbb{I} + A)^{-1}$ nemexpanzív, $\|u(t) - v\|^2 \le \|w(t)\|^2$. Integrálva t szerint $u - v \in X$, azaz $u \in X$.