TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK REGULARITÁSI TULAJDONSÁGAI

Akadémiai doktori értekezés

Járai Antal

Budapest

ELTE

1999

Köszönöm Laczkovich Miklósnak, kandidátusi dolgozatom opponensének javaslatait és észrevételeit.

A szedés az $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-TEX Járai Zoltán és a szerző által írt magyar változatával készült.

Tartalomjegyzék

I. Előismeretek

1.§ Bevezetés 5
2.§ Jelölések és terminológia 33

II. Steinhaus-típusú tételek

3.§ Steinhaus tételének általánosításai 43
4.§ Piccard tételének általánosításai 54

III. Megoldások korlátossága és folytonossága

5.§ Mérhetőség és korlátosság 59
6.§ Korlátos mérhető megoldások folytonossága 61
7.§ Mazur egy problémájáról 66
8.§ Mérhetőség és folytonosság 70
9.§ Mérhető, majdnem mindenütti megoldások folytonossága 75
10.§ Baire-tulajdonság és folytonosság 79

IV. Differenciálhatóság és analitikusság

11.§ Folytonosság és lokális Lipschitz tulajdonság 84
12.§ Hölder-folytonos megoldások 98
13.§ Korlátos változású megoldások 101
14.§ Differenciálhatóság 105
15.§ Többszöri differenciálhatóság 109
16.§ Analitikusság 112

V. Regularitási tételek sokaságokon

17.§ Lokális és globális regularitási tételek sokaságokon 116

VI. Regularitási tételek kevesebb változóval

18.§ A mérhetőség és a folytonosság között 128
19.§ A Baire-tulajdonság és a folytonosság között 154
20.§ A folytonosság és a differenciálhatóság között 166

VII. Alkalmazások

21.§ Egyszerű alkalmazások 176
22.§ A Dirichlet-eloszlás jellemzése 190
23.§ A Weierstrass-féle szigma-függvény jellemzése 198

Irodalom 243

I. Előismeretek

A disszertáció függvényegyenletek regularitási tulajdonságaival foglalkozik. Egységes keretbe foglalva tartalmazza az iterációt nem tartalmazó többváltozós függvényegyenletek regularitásával kapcsolatban korábban elért, kandidátusi disszertációmban is szereplő eredményeimet (amelyek alapján a Tudományos Minősítő Bizottság az akadémiai doktori értekezés benyújtásáig előírt várakozási idő alól felmentett), valamint az azóta ebben a témában elért új eredményeimet. Számos alkalmazást is tárgyal. A kandidátusi disszertaciómban nem szereplő eredmények az 1., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 13., 14., 17., 18., 19., 20., 21., 22. és 23. paragrafusokban találhatók, ezen paragrafusok nagy része teljesen új. A kandidátusi disszertációm jelentős részét képező, a Haar-mérték invariáns kiterjesztéseivel foglalkozó eredményeket — bár kapcsolódnak a témakörhöz — itt csak összefoglalom. A disszertáció anyaga lényegében megegyezik a témakörből tervezett könyvem anyagával, de nem tartalmazza mások eredményeinek tárgyalását. A bevezetés is lényegében a tervezett könyv bevezetése, ami talán túl részletes egy disszertációhoz. Mégis célszerűnek tűnt ebben a formában hagyni, mivel így az anyag esetleg olyanok számára is hasznos lehet, akik a témakörrel csak most ismerkednek, és ebben a témakörben kívánnak dolgozni.

1.§ Bevezetés

1.1. Általános megjegyzések és egyszerű példák. Mint legegyszerűbb példát, tekintsük a legjobban ismert függvényegyenletet, a *Cauchy-egyenlet*et:

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Itt az ismeretlen az f függvény. Szélesebb értelemben a differenciálegyenletek, integrálegyenletek, variációs problémák, stb. is függvényegyenletek, de mi ezt a kifejezést szűkebb értelemben fogjuk használni, csak olyan egyenletekre, amelyekben olyan infinitezimális operációk, mint differenciálás és integrálás, nem szerepelnek. A formális definíciót illetően lásd Aczél könyvét: [3], 0.1. A fenti (1) függvényegyenlet pontos megadásához hozzátartozik annak a függvényhalmaznak a megadása, amelynek elemei között a megoldást keressük. Meg kell adnunk továbbá az x és y *változó*k azon (x, y) párjainak halmazát, amelyekre az egyenletnek teljesülni kell: ez a *függvényegyenlet értelmezési tartománya*. Például, kereshetjük mindazokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvényeket, amelyekre (1) fennáll minden $(x, y) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}$-re. Olyan feltételeket, mint mérhetőség, Baire-tulajdonság, folytonosság mindenütt vagy egy pontban, korlátosság, differenciálhatóság, analitikusság, stb., *regularitási feltétel*eknek szokás nevezni. Egyébként, ha egy adott halmazt egy másik adott halmazba leképező összes függvények halmazában keressük a megoldást, akkor azt mondjuk, hogy a függvényegyenlet *általános megoldás*át határozzuk meg.

Rendszerint a függvényegyenlet értelmezési tartománya a változók összes olyan párjainak (vagy többeseinek) halmaza, amelyekre az egyenlet mindkét oldala definiálva van. Például, ha azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Cauchy-egyenlet megoldása, akkor ebbe implicit módon beleértjük, hogy (1) minden $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$-re teljesül. Ha az egyenlet értelmezési tartománya nem a legbővebb halmaz, amelyre mindkét oldal definiálva van, akkor *szűkített értelmezési tartomány*ú egyenletről beszélünk; a *feltételes egyenlet* elnevezés is szokásos, különösen, ha az egyenlet értelmezési tartománya a megoldásfüggvénytől vagy függvényektől is függ.

A Cauchy-egyenlet egy kétváltozós egyenlet: a változókat (1)-ben x-szel és y-nal jelöltük. Olyan függvényegyenleteket, mint $f(x) = f(-x)$, $f(x) = -f(-x)$, $f(2x) = f(x)^2$, vagy például a differenciaegyenletek *egyváltozós* egyenleteknek nevezünk. Ez az „egy változó” lehet vektor változó is; a kifejezést úgy értjük, hogy nincs több változó az egyenletben, mint az ismeretlen függvény változóinak száma, illetve az ismeretlen függvények változói számának minimuma. Egyébként *többváltozós* függvényegyenletről beszélünk. Ez a megkülönböztetés nagyon hasznos a gyakorlatban. Nagy különbség van az egyváltozós és a többváltozós egyenletek megoldására használt módszerek között. Egyváltozós egyenletekkel kapcsolatban Kuczma [110] illetve Kuczma, Choczewski, Ger [112] könyvére utalunk.

Az egy- és többváltozós egyenletek közötti megkülönböztetés, és mindaz, amit változókról, értelmezési tartományról, reguláris és általános megoldásokról mondtunk, értelemszerűen alkalmazható *függvényegyenlet-rendszerek*re is.

További egyszerű példák függvényegyenletekre *Cauchy exponenciális egyenlete:*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{2}$$

Cauchy hatvány-egyenlete:

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{3}$$

és *Cauchy logaritmikus egyenlete:*

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{4}$$

Jól ismert jelenség, hogy egyetlen függvényegyenlet számos ismeretlen függvényt determinálhat. Ez a helyzet például a Cauchy-egyenlettel analóg, több ismeretlen függvényt tartalmazó *Pexider-egyenletnél:*

$$f_1(x+y) = f_2(x) + f_3(y). \tag{5}$$

A fenti egyszerű (1)–(5) függvényegyenleteket mint egyszerű példákat fogjuk használni. Részletes vizsgálatuk megtalálható Aczél [3] illetve Aczél és Dhombres [16] könyvében.

1.2. Egyszerű példák: sima megoldások. Az $f(x+y) = f(x)+f(y)$ Cauchy-egyenlet egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásáról tegyük fel, hogy *analitikus*. $y = x$ helyettesítéssel az $f(2x) = 2f(x)$ egyváltozós egyenletet kapjuk. Az analitikusság olyan erős feltétel, hogy még ennek az egyváltozós egyenletnek sincs túl sok analitikus megoldása. Az $f(x) = c_0 + c_1x + \dots$ megoldásra azt kapjuk, hogy

$$c_0 + 2c_1x + 4c_2x^2 + \dots = 2c_0 + 2c_1x + 2c_2x^2 + \dots$$

az origó egy környezetében, és így a megoldás csak $f(x) = cx$ lehet egy tetszőleges $c = c_1$ konstanssal. Helyettesítés mutatja, hogy ez tényleg megoldása a Cauchy-egyenletnek.

Cauchy $f(x+y) = f(x)f(y)$ exponenciális egyenletének esete sokkal érdekesebb. Úgy mint fent, kapjuk az egyváltozós $f(2x) = f(x)^2$ egyenletet, és ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitikus, $f(x) = c_0 + c_1x + \dots$, akkor azt hogy

$$c_0 + 2c_1x + 4c_2x^2 + \dots = c_0^2 + 2c_0c_1x + (2c_0c_2 + c_1^2)x^2 + \dots .$$

Innen $c_0 = c_0^2$. Két lehetőség van. Az első, hogy $c_0 = 0$, amiből következik, hogy $c_n = 0$ minden n-re, és így hogy $f \equiv 0$. A második, hogy $c_0 = 1$. Ebben az esetben c_1 tetszőleges lehet, és a

$$2^n c_n = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}.$$

egyenletekből $c = c_1$ jelöléssel indukcióval azt kapjuk, hogy $c_n = c^n/n!$. Így az analitikus megoldások $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n/n! = \exp(cx)$ alakúak. Ugyanezzel a módszerrel megkaphatjuk a komplex analitikus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ megoldásokat is. Vegyük észre, hogy ez az elegáns módszer az exponenciális függvény (és a vele kapcsolatos sin, cos, sinh és cosh függvények) bevezetésének olyan módja, amely csak a hatványozás legalapvetőbb tulajdonságára épül. Pontosan ez motiválta Cauchy-t az 1.1.(1)–1.1.(4) egyenletek vizsgálatában: a hatványfüggvények bevezetésénél a pontatlan okoskodásokat és „circulus viciosus"-t akarta elkerülni. Lásd a történeti megjegyzéseket Aczél és Dhombres [16] könyvében, 365–371. o.

Tegyük fel most, hogy a kétszer differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásokat keressük. Az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ Cauchy-egyenlet esetén differenciáljuk mindkét oldalt y szerint. Ez „megöli" az első tagot a jobb oldalon, és azt kapjuk, hogy $f'(x+y) = f'(y)$, ha $x, y \in \mathbb{R}$. Megint differenciálva, de most x szerint, „megöljük" a másik tagot is a jobb oldalon, és azt kapjuk, hogy $f''(x+y) = 0$. Innen $y = 0$ helyettesítéssel az $f''(x) = 0$ differenciálegyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek minden megoldása $f(x) = c_0 + cx$ alakú, ahol $c_0, c \in \mathbb{R}$ konstansok. Visszahelyettesítve az eredeti függvényegyenletbe, látjuk, hogy $c_0 = 0$, és azt kapjuk, hogy a kétszer differenciálható megoldások pontosan az $f(x) = cx$ alakú függvények.

Ez az egyszerű példa jól mutatja az „elég sima" megoldások meghatározására használt általános módszer lényegét. Az általános taktika egyes tagokat „megölni" egy-egy alkalmas differenciáloperátorral, és végül megfelelő helyettesítéssel egy differenciálegyenletet kapni. Rendszerint alkalmas helyettesítések vagy az egyenlet bizonyos szimmetriáinak felhasználása alacsonyabb fokú differenciálegyenletet eredményez. Például az $f'(x+y) = f'(y)$ egyenletből $y = 0$ helyettesítéssel azonnal azt kapjuk, hogy $f'(x) = c$ a $c = f'(0)$ konstanssal, ami egy elsőrendű differenciálegyenlet. Cauchy exponenciális egyenlete: $f(x+y) = f(x)f(y)$ esetében hasonlóan kapjuk, hogy $f'(x+y) = f(x)f'(y)$, és $y = 0$ helyettesítéssel, hogy $f'(x) = cf(x)$, ahol $c = f'(0)$.

Vegyük észre, hogy mindkét esetben az egyszer differenciálható megoldások ugyanazok, mint az analitikus megoldások.

1.3. Egyszerű példák: regularitási tulajdonságok. Hogyan kaphatjuk meg a fenti példák, a Cauchy-egyenlet, illetve Cauchy exponenciális egyenlete esetén jóval gyengébb regularitási feltételek mellett a megoldásokat? Egy általános módja ennek az, hogy megmutatjuk, a gyenge regularitási feltételből, például a folytonosságból vagy a mérhetőségből jóval erősebb regularitási feltételek következnek, például a megoldások differenciálhatóak vagy analitikusak. Például figyeljük meg, hogy mindkét fenti esetben a megoldásokra kapott differenciálegyenletből következik, hogy a megoldások analitikusak (lásd Dieudonné [39], 10.5.3).

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos megoldás, akkor a Cauchy-egyenlet esetén mindkét oldalt integrálva a pozitív hosszúságú $[a, b]$ intervallum felett azt kapjuk, hogy

$$f(x)(b-a) = \int_a^b f(x+y)\,dy - \int_a^b f(y)\,dy.$$

Bevezetve az új $u = x + y$ változót azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_{x+a}^{x+b} f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy.$$

A jobb oldal differenciálható, így kapjuk, hogy f is differenciálható. Ha f kétszeri differenciálhatóságára akarunk következtetni, hasonló okoskodást alkalmazhatunk az eredeti egyenletből x szerinti differenciálással kapott $f'(x+y) = f'(x)$ egyenletre, stb.

Cauchy exponenciális egyenlete esetén $f \equiv 0$ is folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldás. Ha $f(y_0) \neq 0$, akkor választhatunk olyan $[a, b]$ környezetét y_0-nak, amelyre $f(y)/f(y_0) \geq 1/2$ minden $y \in [a, b]$-re. Integrálva azt kapjuk, hogy

$$f(x)\int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(x+y)\,dy,$$

és így

$$f(x) = \frac{\int_{a+x}^{b+x} f(u)\,du}{\int_a^b f(y)\,dy}.$$

Ebből következik, hogy f differenciálható. Itt is hasonló meggondolások alkalmazhatók az eredeti egyenletből x szerinti differenciálással kapott $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ egyenletre, és azt kapjuk, hogy a megoldás kétszer differenciálható, stb.

Most vizsgáljuk a Cauchy-egyenlet egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető megoldását. Legyen $[a, b]$ egy intervallum pozitív η hosszal. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Luzin tétele szerint létezik $[x_0 + a, x_0 + b]$-nek legalább $3\eta/4$ Lebesgue-mértékű C_1 kompakt részhalmaza, amelyre $f|C_1$ folytonos. Ha $|x - x_0| < \eta/8$, akkor a $C_1 - x$ halmaz része a $C = [a - \eta/8, b + \eta/8]$ halmaznak. Mivel $C \setminus (C_1 - x)$ és $C \setminus (C_1 - x_0)$ Lebesgue-mértéke legfeljebb $\eta/2$, nem fedhetik le C-t. Így a $(C_1 - x_0) \cap (C_1 - x)$ metszet nem üres. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $f|C_1$ egyenletesen folytonos, van olyan $\delta > 0$, amelyre $u, u' \in C_1$, $|u - u'| < \delta$ esetén $|f(u) - f(u')| < \varepsilon$. Így ha $|x - x_0| < \min\{\eta/8, \delta\}$, akkor bármely $y \in (C_1 - x_0) \cap (C_1 - x)$-szel azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x+y) - f(x_0+y)| + |f(y) - f(y)| < \varepsilon,$$

azaz f folytonos x_0-ban. Mivel x_0 tetszőleges volt, f mindenütt folytonos. Ugyanez a módszer Cauchy exponenciális egyenletére is alkalmazható, ha bevezetjük a $t = x + y$ új változót x helyett, azaz ha az ekvivalens $f(t) = f(t-y)f(y)$ egyenletre térünk át.

Vegyük észre, hogy az $f(xy) = f(x) + f(y)$ egyenletnek, Cauchy logaritmikus egyenletének nincs más $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldása, mint $f \equiv 0$; ez $y = 0$ helyettesítéssel következik.

Az $f(xy) = f(x)f(y)$ egyenlet, Cauchy hatvány-egyenlete esetén vannak olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldások, amelyek mérhetőek, de nem folytonosak, folytonosak, de nem differenciálhatóak, stb. Valóban, az $x \mapsto |x|^c$ és $x \mapsto |x|^c \operatorname{sgn} x$ függvények megoldások bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén, ha 0^c-t úgy érjük, hogy 0 minden $c \in \mathbb{R}$-re.

1.4. Hilbert ötödik problémája. Hilbert az 1900-as Nemzetközi Matematikai Kongresszuson ismertetett nevezetes ötödik problémája ([56], 304. o.), mint ismeretes azt kérdezi, hogy[1]

> *"a folytonos transzformációcsoport Lie-féle fogalma a függvények differenciálhatóságának feltételezése nélkül vizsgálataink számára mennyire hozzáférhető"*,

közelebbről[2],

> "vajon valamilyen megfelelő új változók és paraméterek bevezetésével a csoport nem transzformálható-e át úgy, hogy a definiáló függvények differenciálhatóak legyenek, ...".

Hilbert, kifejtve hogy a csoport-tulajdonság egy függvényegyenlet-rendszerben fejeződik ki, így folytatja[3]:

> "Ezek a kérdések általában a függvényegyenletek széles és érdekes területére vezetnek bennünket, amelyeket eddig főleg a fellépő függvények differenciálhatóságának feltételezése mellett vizsgáltak. Különösen az Abel (Oeuvres, 1. köt., 1., 61., 389. o.) által oly sok éleselméjűséggel kezelt függvényegyenletek, a differenciaegyenletek, és más, az irodalomban előforduló egyenletek önmagukban nem mutatják, mi kényszeríti ki a fellépő függvények differenciálhatóságának követelményét, és bizonyos egzisztencia-bizonyítások a variációszámításban közvetlenül ahhoz a feladathoz vezettek, hogy egy

[1] "... *inwieweit der Liesche Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist.*"

[2] "es ensteht mithin die Frage, ob nicht etwa durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher und Parameter die Gruppe stets in eine solche übergeführt werden kann, für welche die definierenden Funktionen differenzierbar sind, ...".

[3] "Überhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel (Werke, Bd. 1, S. 1, 61, 389) mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen, die Differenzengleichungen und andere in der Literatur vorkommende Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt, und bei gewissen Existenzbeweisen in der Variationsrechnung fiel mir direkt die Aufgabe zu, aus dem Bestehen einer Differenzengleichung die Differenzierbarkeit der betrachteten Funktionen beweisen zu müssen. In allen diesen Fällen erhebt sich daher die Frage, *inwieweit etwa die Aussagen, die wir im Falle der Annahme differenzierbarer Funktionen machen können, unter geeigneten Modifikationen ohne diese Voraussetzung gültig sind.*"

differenciálegyenlet felállításához a vizsgált függvények differenciálhatóságát kellett bizonyítani. Mindezekben az esetekben ezért felmerül a kérdés, *mennyiben maradnak hasonló állítások, amelyeket a szereplő függvények differenciálhatóságának feltételezésével bizonyíthatunk, érvényesek ezen feltételezés nélkül megfelelő módosítások mellett.*"

(Hilbert kiemelései.) Ezután Hilbert idézi Minkowskinak egy, az

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenlőtlenség megoldásainak bizonyos feltételek melletti parciális differenciálhatóságára vonatkozó eredményét, majd megjegyzi, hogy bizonyos függvényegyenleteknek, például az

$$\begin{aligned} f(x+\alpha) - f(x) &= g(x), \\ f(x+\beta) - f(x) &= 0, \end{aligned}$$

függvényegyenlet-rendszernek, ahol α, β adott valós számok, g pedig adott valós függvény, lehet olyan f megoldása, amely folytonos, de nem differenciálható, még akkor is, ha g analitikus függvény.

Mai nyelven szokás Hilbert ötödik problémáját úgy fogalmazni, hogy igaz-e, hogy egy lokálisan euklidészi csoport Lie-csoport? Láthatjuk azonban, hogy ötödik problémájának második felében Hilbert sokkal általánosabban fogalmazva olyan problémákra hívja fel a figyelmet, amelyeket ma regularitási problémáknak szokás nevezni: függvényegyenletekre, differenciálegyenletekre, és más egyenletekre megmutatni, hogy a differenciálhatósági feltételek sokkal enyhébb feltételekkel helyettesíthetők (esetleg megfelelő módosítások után). Ez a gondolat Hilbert tizenkilencedik és huszadik problémájában is visszatér, variációszámítással és parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatban. Lásd Zeidler [165] könyvét, II/A, 86–93. o. A Hilbert-problémákkal kapcsolatban lásd az Alexandrov által szerkesztett [19] könyvet.

1.5. Általános séma függvényegyenletek megoldására. A fenti egyszerű példák, valamint Hilbert ötödik problémájának második fele az alábbi általános sémát sugallják függvényegyenletek reguláris megoldásainak meghatározására:

(1) Regularitási tételek felhasználásával mutassuk meg, hogy a függvényegyenlet minden megoldása, amely valamely „gyenge" regularitási feltételnek eleget tesz — például mérhető, Baire-tulajdonságú, stb. —, „erős" regularitási feltételeket is kielégít, például lokálisan integrálható, folytonos, néhányszor differenciálható vagy analitikus.

(2) Határozzuk meg az „erősen" reguláris megoldásokat, az egyenletet más típusú egyenletre — differenciálegyenletre, integrálegyenletre, a hatványsorának együtthatóira vonatkozó egyenletrendszerre, stb. — vezetve vissza, vagy a függvényegyenletek elméletének speciális módszereit használva.

Dolgozatok százai illusztrálják ezt a bevált módszert. A (2) lépésben a függvényegyenlet speciális tulajdonságait, általános tapasztalatokat és alkalmi ötleteket használunk: speciális helyettesítéseket, az egyenlet szimmetriáit, integráltranszformációkat, egyes tagok „megölését” alkalmas differenciáloperátorokkal, stb. Számos függvényegyenletekkel foglalkozó könyvben és cikkben találunk példákat. Az alábbi könyvek többváltozós függvényegyenletekkel kapcsolatos bevezető jellegű anyagot tartalmaznak: Aczél [2], [5]; Hille [57]; Kuczma [111]; Saaty [138], section 3. Többváltozós függvényegyenletekkel kapcsolatos monográfiák Aczél [1], és a bővebb [3] angol kiadás, valamint Aczél-Dhombres [16]. Főleg speciális témákat tárgyalnak: Aczél [8] (társadalomtudományok); Aczél-Daróczy [15] (információmértékek); Aczél-Gołąb [18] (geometria); Dhombres [35] (feltételes Cauchy-egyenletek); Eichhorn [40] (közgazdaságtan); Székelyhidi [158] (konvolúció típusú egyenletek).

Lásd még a [7], [10], [104] áttekintő dolgozatokat, a [12] kötet áttekintő dolgozatait, az *Aequationes Mathematicae* köteteit, és függvényegyenletekkel kapcsolatos dolgozatok ott rendszeresen megjelenő folytatólagos bibliográfiáját.

Ennek a disszertációnak a fő témája az első lépéssel foglalkozik: általános regularitási tételeket fogunk bizonyítani függvényegyenletek egy széles osztályára, a többváltozós, iterációt nem tartalmazó egyenletekre. Eredményeink választ adnak Hilbert ötödik problémája második felének nagy részére ezen osztály esetén. Még ebben a szűkebb témakörben is lehetetlen minden dolgozatra hivatkozni, amely valamely *speciális* egyenlet regularitásának kérdésével foglalkozik. Csak a fent idézett könyvekre, összefoglaló dolgozatokra, az Aequationes Mathematicae köteteire és az ott megjelent bibliográfiára utalhatunk. A többváltozós függvényegyenletek általános típusaira vonatkozó regularitási eredmények egy részére a jelen disszertáció megfelelő paragrafusának bevezetésében utalunk.

Mielőtt a regularitási problémák tárgyalásába kezdenénk, röviden áttekintjük a „sima” megoldások meghatározására szolgáló módszereket.

1.6. Általános módszerek függvényegyenletek „sima” megoldásainak meghatározására. Bevezető példaként két módszert mutattunk be: analitikus megoldások meghatározását az együtthatókra kapott egyenletrendszer megoldásával, és a függvényegyenlet visszavezetését differenciálegyenletre. Ez a második módszer különösen széles körben használatos, és rendszerint a „sima” megoldások meghatározásának legkényelmesebb módját biztosítja. További példákat Aczél [3] könyvében találhatunk, lásd különösen a 4.2.1, 4.2.4 pontokat. A differenciálegyenlet levezetése rendszerint a tagok differenciáloperátorokkal történő „megölését”, speciális helyettesítéseket, valamint az egyenlet speciális szimetriáit használja. A

$$\sum_{i=0}^{n} h_i(x,y) f_i\left(g_i(x,y)\right) = h(x,y), \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

lineáris függvényegyenlet-típusra, ahol $f_0, f_1, \ldots, f_n$ az ismeretlen függvények, Páles [134] dolgozata egy általános *algoritmikus* módszert ismertet.

Páles alapgondolata az, hogy a helyettesítéseket az utolsó lépésnek hagyja, és megmutatja, hogy megfelelően választott differenciáloperátorok segítségével egy típus, mondjuk az $f_0(g_0(x,y))$, $f_0'(g_0(x,y))$, stb., típusúak kivételével az összes többi tag „megölhető”. Ekkor már *bármely* $t = g_0(x, y_0)$ helyettesítés differenciálegyenletet eredményez. Néhány más függvényegyenlet-típusra is létezik algoritmikus megoldási módszer. Például Vincze módszerét kell itt megemlítenünk (lásd Aczél [3], 4.2.5.). De még igen messze vagyunk attól, hogy algoritmikus módszerrel legyünk képesek megoldani az újonnan felmerülő függvényegyenletek nagy részét.

Megemlítjük, hogy bizonyos függvényegyenletek integrálegyenletre redukálhatók. Ezt a módszert nem mutatjuk be itt; lásd Aczél [3] könyvét, 4.1.2.

Fontos módszer integráltranszformációk felhasználásával egyszerűbb függvényegyenletre redukálni az egyenletet. Aczél [3] könyve, 4.1.1, ezt a módszert is bemutatja. Székelyhidi [156] könyve számos függvényegyenlettel foglalkozik, főleg Abel-csoportokon. A vizsgálatokban a Fourier-transzformáció és finomításai, valamint a spektrálszintézis játszanak fő szerepet. Lásd még a közös áttekintő cikkünkben [104] hivatkozott dolgozatokat.

Néha egy függvényegyenletre a megoldás közvetlenül megkapható az egyenletből egy sűrű halmazon. Ilyenkor a folytonos megoldások megkaphatók, ha a pontokat e sűrű halmaz pontjaival közelítjük. Például, a Cauchy-egyenletnél $x = y = 0$ helyettesítéssel $f(0) = 0$, és indukcióval $f(nx) = nf(x)$, ha $n \in \mathbb{N}$. Az $y = -x$ helyettesítés mutatja, hogy $f(-x) = -f(x)$, így a fenti összefüggés minden $n \in \mathbb{Z}$-re teljesül. Most x/n-et helyettesítve x helyett kapjuk, hogy $f(x/n) = f(x)/n$, ha $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Így $f(rx) = rf(x)$, ha $r \in \mathbb{Q}$. Ez mutatja, hogy $f(1)$ meghatározza f értékeit a racionális pontokban, és a valós számokat racionális számokkal közelítve azt kapjuk, hogy a folytonos megoldások $f(x) = cx$ alakúak, ahol $c = f(1)$. További példákat Aczél [3] könyvében találhatunk, section 2.

Egy másik módszer, hogy a függvényegyenletet egy olyan függvényegyenletre vezetjük vissza, amelynek megoldása már ismert. Ezen a (lényegében algebrai) módon rendszerint az egyenlet általános megoldását is sikerül meghatározni. A reguláris megoldásokat rendszerint a másik egyenlet reguláris megoldásaiból kapjuk, így ezek is meghatározhatók. Számos példát találhatunk erre az Aczél [3] illetve Aczél-Dhombres [15] könyvekben. Pusztán az általános megoldás ismerete nem mindig teszi lehetővé, hogy a reguláris megoldásokat könnyen megkapjuk. Például, a Cauchy-egyenlet általános megoldása a következő: rögzítsünk egy tetszőleges B bázisát $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{Q}$ felett, egy *Hamel-bázist*. Minden x valós szám egyértelműen felírható, mint a b_i báziselemek r_i racionális együtthatókkal vett $\sum_i r_i b_i$ véges lineáris kombinációja. Bármely $f : B \to \mathbb{R}$ függvény egyértelműen terjeszthető ki az $f(x) = \sum_i r_i f(b_i)$ összefüggéssel a Cauchy-egyenlet egy megoldásává. Vegyük észre, hogy még ebben a nagyon egyszerű esetben sem világos közvetlenül — regularitási tételek nélkül — hogy mely megoldások mérhetőek.

Egy további módszer, amely csak nagyon gyenge regularitási feltevéseket használ, az úgynevezett „disztribúció módszer”, amelyet Fenyő [43] kezdeményezett. Az alapötlet, hogy a folytonos (vagy lokálisan integrálható) megoldások Schwartz-féle disztribúcióknak tekinthetők, és az egyenlet disztribúciók között fennálló egyenletnek tekinthető. Hasonló trükkökkel, mint a sima megoldások esetén, de általában több technikai problémával, disztribúciókra vonatkozó differenciálegyenleteket kaphatunk. Végül a disztribúció megoldásokról kiderül, hogy (sima) függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók. Lásd Baker [23], [24], [25] dolgozatait ezzel a módszerrel kapcsolatban.

Végül néhány megjegyzés. Általános célokra a legegyszerűbb módszer — ha lehet, általános — regularitási tételek segítségével bebizonyítani, hogy a keresett reguláris megoldások néhányszor differenciálhatóak, majd differenciálegyenletet keresni a megoldásokra. Rendszerint a többi módszernél sem tudjuk elkerülni a regularitási tételeket. Azok a módszerek, amelyek gyengébb regularitási feltételeket használnak, rendszerint bonyolultabbak, és nem alkalmazhatók a legáltalánosabb esetekben. Például, a disztribúció módszernél, problémát okoz hogy a Schwartz-féle disztribúciók között nincs szorzás definiálva. Schwartz lehetetlenségi tétele szerint ez nem is tehető meg kielégítő módon. Még kevésbé lehetséges disztribúciókat tetszőleges több változós $\mathcal{C}^\infty$ függvényekbe helyettesíteni. Ez a disztribúció módszer használatát olyan egyenletekre korlátozza, amelyek nincsenek túl messze a lineáristól.

1.7. Többváltozós, iterációt nem tartalmazó egyenletek. A jelen disszertáció fő témája általános regularitási tételek bizonyítása. Számos függvényegyenlet-típusra ilyen regularitási tételek a tapasztalatok szerint nem teljesülnek. A Hilbert által is említett (lásd 1.4), egyváltozós függvényegyenletek mellett számos, az ismeretlen függvényeket egymásba helyettesítve tartalmazó, „iterált" egyenletnek is van folytonos, de nem differenciálható megoldása. Ilyen például az először Aczél és Benz [13] által vizsgált

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x)+f\left(x+y-f(x)\right)\qquad x,y\in\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

egyenlet, amelynek összes folytonos megoldását Daróczy [31] határozta meg, és amelynek megoldásai az $x\mapsto\frac{1}{2}(x\pm|x|)$ függvények is. A Hilbert ötödik problémájának első felében fellépő, a csoportaxiómákat leíró függvényegyenlet-rendszer is speciális kezelést (átkoordinátázást) igényel. Bár például Aczél [4] dolgozatában igen általános feltételek mellett bebizonyítja, hogy az

$$\begin{aligned}f(x+y)=h(x,f(x),f(y),&f(g_1(x,f(x),f(y)),f(g_2(x,f(x),f(y)),\dots,\\&f(g_3(x,f(x),f(y),f(g_4(x,f(x),f(y))),f(g_5(x,f(x),f(y))),\dots,)),\dots)\end{aligned}$$

függvényegyenlet valós változós, valós értékű f megoldásai monotonak, úgy gondolom, iterációt tartalmazó egyenletek esetén még nem beszélhetünk általános elméletről. Azonban azokra a többváltozós függvényegyenletekre, amelyeknél az ismeretlen függvények nincsenek önmagukba vagy egymásba helyettesítve, általános regularitási tételeket bizonyíthatunk be. E disszertáció fő témáját ilyen tételek alkotják.

Célunk a „legáltalánosabb” iterációt nem tartalmazó többváltozós

$$H\left(X, Y, f\left(G(X, Y)\right), f_0\left(G_0(X, Y)\right), f_1\left(G_1(X, Y)\right), \ldots, f_n\left(G_n(X, Y)\right)\right) = 0 \tag{1}$$

egyenlet vizsgálata, ahol (X, Y) egy E halmaz eleme. Itt f, f_0, $f_1, \ldots, f_n$ az ismeretlen függvények, a többi függvény ismert. A változók és a függvényértékek is vektorok. A fenti egyenlet az $x = G(X, Y)$ új változó bevezetésével, és $f(x)$-et kifejezve az egyenletből, általában egy valamivel egyszerűbb alakra hozható, amely vizsgálataink céljainak jobban megfelel. Számos esetben — még egy új $y = G_0(X, Y)$ változót bevezetve — elérhetjük, hogy egy másik ismeretlen függvényben pedig csak az y változó szerepeljen, így egyenletünket az

$$f(x) = h\left(x, y, f_0(y), f_1\left(g_1(x, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(x, y)\right)\right), \quad (x, y) \in D \tag{2}$$

alakra hozhatjuk. Mivel céljainknak legjobban az egyenletnek ez az „explicit” alakja felel meg, általában ezt az alakot fogjuk használni, és nem bonyolítjuk feleslegesen a tételeket a fenti — általában csak lokálisan elvégezhető — átalakítások feltételeinek vizsgálatával.

Az utóbbi egyenletben f_0 szerepeltetése — és így az $y = G_0(X, Y)$ új változó bevezetése is — feleslegesnek tűnik. Azonban f_0 kivételes szerepet játszik a jobb oldalon szereplő ismeretlen függvények között. Mint azt Sander [144] egy problémája mutatja (lásd 21.2), gyakran f_0-ra gyengébb, vagy egyáltalán semmilyen feltételt sem kell kiróni. Az adott függvényekre elsősorban simasági feltételeket fogunk előírni. Egyszerű példák mutatják, hogy ezek a feltételek nem hagyhatók el. Természetesen fel kell tennünk, hogy az egyenlet jobb oldala tényleg függ y-tól, és így az egyenlet nem egy egyváltozós egyenlet. Ez biztosan teljesül, ha feltesszük, hogy a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ mátrixok rangja maximális. Rendszerint feltesszük, hogy D nyílt halmaz.

Célunk annak vizsgálata, hogy a Lebesgue-mérhető, illetve a Baire-tulajdonságú megoldások analitikusak-e? Olyan típusú állításokat szándékozunk bebizonyítani, hogy ha az adott függvények „elég szépek”, és az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ismeretlen függvények rendelkeznek egy regularitási tulajdonsággal, akkor az f függvény is rendelkezik egy regularitási tulajdonsággal, amely „eggyel jobb”.

Az alábbi lépések alkalmazása tűnik célszerűnek:

(I) a mérhetőségből következik a folytonosság;

(II) a Baire-tulajdonságú megoldások folytonosak;

(III) a folytonos megoldások majdnem mindenütt differenciálhatóak;

(IV) a majdnem mindenütt differenciálható megoldások folytonosan differenciálhatóak;

(V) minden p-szer folytonosan differenciálható megoldás $p+1$-szer is folytonosan differenciálható;

(VI) a végtelen sokszor differenciálható megoldások analitikusak.

Ha $f = f_0 = f_1 = \cdots = f_n$, akkor a fenti lépések alapján, lépésenként kaphatjuk, hogy a mérhető, illetve Baire-tulajdonságú megoldások analitikusak. Ha ez nem áll fenn, akkor a többi ismeretlen függvény kifejezése az egyenletből segíthet abban, hogy hasonló eredményt kapjunk.

Hogy jobban megérthessük, miért az (I)–(VI) lépéseket használjuk, mik a fő nehézségek, és milyen típusú feltételeket kell kirónunk az adott függvényekre, először bemutatunk néhány alapvető gondolatot.

1.8. A klasszikus módszer. Az alábbi, a függvényegyenletekkel foglalkozók körében jól ismert általános módszer Kac-tól ered és (valamivel speciálisabb esetre megfogalmazva) szerepel Aczél [3] könyvében, 4.2.2, 4.2.3. Az

$$h(x,y)f(x) = h_0(x,y) + \sum_{i=1}^{n} h_i\left(x, y, f_i\left(g_i(x,y)\right)\right), \quad (x,y) \in D \tag{1}$$

függvényegyenletre alkalmazható, ahol az $f, f_1, \dots, f_n$ ismeretlen függvények rendre az $X, X_1, \dots, X_n \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazokon vannak definiálva, és értékeik valamely $Z, Z_1, \dots, Z_n \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazokba esnek. Tegyük fel, hogy $Y \subset \mathbb{R}$ és $D \subset X \times Y$ is nyíltak, $f_1, \dots, f_n$, $h, h_0 : D \to \mathbb{R}$ és $h_i : D \times Z_i \to \mathbb{R}$ folytonosak, és a $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, $\dfrac{\partial h_0}{\partial x}$, $\dfrac{\partial h_i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial h_i}{\partial y}$, $i = 1, 2, \dots, n$ parciális deriváltak is folytonosak. Tegyük fel továbbá, hogy a g_i függvények kétszer folytonosan differenciálhatóak. Legyen $x_0 \in X$, és tegyük fel, hogy van olyan $y_0 \in Y$, amelyre $(x_0, y_0) \in D$, $h(x_0, y_0) \neq 0$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, ha $i = 1, 2, \dots, n$. Ekkor f folytonosan differenciálható az x_0 egy környezetében. Ennek bizonyítására vegyük észre, hogy valamely X_0 korlátos nyílt intervallumra és $[a,b] \subset Y$ intervallumra $X_0 \times [a,b] \subset D$, $(x_0, y_0) \in X_0 \times]a,b[$ és $\int_a^b h(x,y)\,dy \neq 0$, ha $x \in X_0$. Az (1) egyenlet mindkét oldalát integrálva y szerint az $[a,b]$-n, azt kapjuk, hogy

$$f(x) \int_a^b h(x,y)\,dy = \int_a^b h_0(x,y)\,dy + \sum_{i=1}^{n} \int_a^b h_i\left(x, y, f_i\left(g_i(x,y)\right)\right)\,dy.$$

A $g_{i,x}(y) = g_i(x,y)$ jelölésekkel vezessük be a jobb oldalon álló integrálokban külön-külön az $u = g_{i,x}(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ új változót. Ehhez szükség esetén helyettesítsük X_0-at az x_0 egy kisebb környezetével, $[a,b]$-t pedig az y_0 egy kisebb környezetével. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) \int_a^b h(x,y)\,dy &= \int_a^b h_0(x,y)\,dy \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{g_i(x,a)}^{g_i(x,b)} h_i\left(x, g_{i,x}^{-1}(u), f_i(u)\right) \frac{\partial}{\partial u} g_{i,x}^{-1}(u)\,du. \end{aligned}$$

Ebből az egyenletből következik, hogy f folytonosan differenciálható. Valóban, egy

$$\tilde{I}(x) = \int_{\tilde{g}(x,a)}^{\tilde{g}(x,b)} \tilde{h}(x,y)\, dy$$

típusú paraméteres integrál folytonosan differenciálható, ha $\tilde{X}, \tilde{Y} \subset \mathbb{R}$ korlátos nyílt halmazok, $\tilde{g} : \tilde{X} \times [a,b] \to \tilde{Y}$ és $\tilde{h} : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és a $\dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial x}$ parciális deriváltak is folytonosak. Hogy ezt belássuk, legyen $y_1 \in \tilde{Y}$ rögzített, és legyen

$$\tilde{H}(x,y) = \int_{y_1}^{y} \tilde{h}(x,u)\, du.$$

$\tilde{H}$ folytonosan differenciálható, és így $\tilde{I}(x) = \tilde{H}(x, \tilde{g}(x,b)) - \tilde{H}(x, \tilde{g}(x,a))$ is folytonosan differenciálható.

Vegyük észre, hogy csak $\tilde{h}$ és $\dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$ folytonosságára van szükségünk. Így $h(x,y)$ lehet például $h^*(x,y,f_0(y))$ alakú folytonosan differenciálható h^*-gal, de csak folytonos (esetleg ismeretlen) f_0-al, amely akár vektor értékű is lehet. Speciálisan, $h(x,y) = \sum_{j=m}^{-1} h_j(x,y) f_j(y)$ is lehetséges $m < 0$-val és (esetleg ismeretlen) folytonos f_j, $m \le j < 0$ függvényekkel és folytonosan differenciálható h_j fügvényekkel. Továbbá vegyük észre, hogy

$$H(\tilde{x},\tilde{y}) f_0(G_0(\tilde{x},\tilde{y})) f(G(\tilde{x},\tilde{y})) = H_0(\tilde{x},\tilde{y}) + \sum_{i=1}^{n} H_i\left(\tilde{x},\tilde{y}, f_i\left(G_i(\tilde{x},\tilde{y})\right)\right)$$

típusú egyenletek az (1) típusra vezethetők vissza új $x = G(\tilde{x},\tilde{y})$, $y = G_0(\tilde{x},\tilde{y})$ változókat bevezetve.

Ez a módszer minden további nélkül általánosítható komplex vagy akár vektor értékű ismeretlen függvényekre is, de vektor-vektor függvényekre az általánosítás nem ilyen nyilvánvaló. Integrálhatunk egy nem üres belsejű S szimplex felett, és

$$\tilde{I}(x) = \int_{\tilde{g}(x,S)} \tilde{h}(x,y)\, dy$$

alakú paraméteres integrálokhoz jutunk. Természetesen ilyen integrálok paraméter szerinti differenciálása klasszikus, ha $\tilde{g}$ és $\tilde{h}$ sima függvények, de mi csak azt tudjuk, hogy $\tilde{g}$ folytonosan differenciálható és $\tilde{h}$ az x szerinti parciális deriváltjával együtt folytonos. Ezeket a problémákat és a fenti klasszikus módszernek vektor-vektor függvényekre történő általánosítását a 11. §-ban tárgyaljuk.

1.9. Magasabb rendű deriváltak. A fenti klasszikus módszer magasabb rendű differenciálhatóság bizonyítására is használható, ha felhasználjuk, hogy az

$$\tilde{I}(x) = \int_{\tilde{g}(x,a)}^{\tilde{g}(x,b)} \tilde{h}(x,y)\, dy$$

paraméteres integrál sima $\tilde{g}$ esetén $p+1$-szer differenciálható, ha a $\tilde{h}$ függvény p-szer folytonosan differenciálható és a p-edik deriváltja folytonosan parciálisan differenciálható x szerint. Még jobb trükk, ami a jóval általánosabb 1.7.(1) nemlineáris egyenletre is működik, az egyenlet mindkét oldalát p-szer differenciálni. A kapott egyenlet az előző pont (1) típusába tartozik, és így a klasszikus módszer fent említett általánosításával tárgyalható. Ezt a trükköt alkalmazzuk a 15. §-ban.

1.10. A megoldások folytonossága. A klasszikus módszer (és általánosítása is) felhasználható arra is, hogy lokálisan integrálható megoldások folytonosságát bizonyítsuk. Így, ha a mérhetőségből lokális korlátosságot tudunk bizonyítani, akkor a folytonosságra következtethetünk. Ez volt a hagyományos módja a folytonosság bizonyításának. Például, az $f(x+y) = f(x)+f(y)$ Cauchy-egyenletnél, ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldás mérhető egy pozitív Lebesgue-mértékű K halmazon, akkor automatikusan korlátos egy kisebb, de még mindig pozitív mértékű C halmazon, mivel a $K_n = \{x \in K : |f(x)| \leq n\}$ halmazok mértéke a K mértékéhez tart, amint $n \to \infty$. Steinhaus egy jól ismert tétele szerint, a $C - C$ halmaz tartalmazza az origó egy környezetét. Az f függvény korlátos ezen a környezeten, mivel ha $x \in C-C$, akkor x előállítható $x = z - y$, $z, y \in C$ alakban, amiből

$$|f(x)| \leq |f(x+y)| + |f(y)|,$$

azaz f korlátos az origó egy $\varepsilon > 0$ sugarú környezetében. Ha $[-\varepsilon, \varepsilon]$ felett integrálunk, azt kapjuk, hogy

$$(1)\quad 2\varepsilon f(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+y)\,dy - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(y)\,dy = \int_{-\varepsilon+x}^{\varepsilon+x} f(u)\,du - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(y)\,dy.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy f folytonos az origó közelében, és újra felhasználva (1)-et, kapjuk, hogy differenciálható is az origó egy környezetében. De a Cauchy-egyenlet esetén, rögzítve y-t, látjuk, hogy f az y körül egyszerűen konstans plusz egy eltoltja f-nek az origó körül. Így ha egy megoldás folytonos, differenciálható, analitikus, stb. az origó körül, akkor ugyanez teljesül mindenütt.

Ez a módszer működik akkor is, ha Cauchy exponenciális egyenletének mérhető $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásait kell meghatározni.

Ma ez a módszer kevésbé fontos, mint korábban volt, és csak akkor érdemes használni, ha a szóban forgó mérték nem Radon-mérték. Ennek a módszernek néhány, a Haar-mérték invariáns, illetve a Lebesgue-mérték kovariáns kiterjesztéseivel kapcsolatos alkalmazását az 5. és 6. §-ban fogjuk tárgyalni.

Van egy sokkal kényelmesebb módszer, amely Radon-mértékek esetén működik, speciálisan tehát a Lebesgue-mérték esetén is. Ez a módszer Luzin tételét használja: úgy tűnik, az ötlet McKiernan-nél [130] és Baker-nél [21] fordul elő először. Egy példát már mutattunk az 1.3 pontban. A módszer az általános

$$f(x) = h\left(x, y, f_0(y), f_1\left(g_1(x,y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(x,y)\right)\right)$$

esetben, azaz az 1.7.(2) egyenletre is működik: Válasszunk valamely C pozitív mértékű kompakt halmazt, és válasszunk $g_i(x_0, C)$-nek olyan „nagy" K_i kompakt részhalmazát, amelyen f_i folytonos. Ha meg tudjuk mutatni, hogy az

$$(1) \qquad \{y : g_i(x_0, y), g_i(x, y) \in K_i, \text{ ha } 1 \le i \le n\}$$

halmaz soha sem üres, amennyiben x elég közel van x_0-hoz, akkor a halmaz bármely y elemét helyettesítve az egyenletbe, azt kapjuk, hogy $f(x)$ közel van $f(x_0)$-hoz. Ezt a módszert fogjuk felhasználni, hogy a mérhetőségből közvetlenül a folytonosságra következtessünk: lásd a 8. §-t.

Fontos megfigyelés, hogy elég, ha a függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül: lásd 9. §-t. Ez azért fontos, mert ha egy megoldás majdnem mindenütt differenciálható, akkor a deriváltja (amely automatikusan Borel-függvény, lásd 14.1-et) ugyancsak egy függvényegyenletet teljesít, és a fenti megfigyelést alkalmazva azt kapjuk, hogy a derivált folytonos. Ezt a gondolatot, hogy „a majdnem mindenütt differenciálható megoldások folytonosan differenciálhatóak", a 14. §-ban dolgozzuk ki. Vegyük észre, hogy ennek alapján abból, hogy a megoldás lokálisan korlátos változású (valós változós esetben), illetve hogy lokálisan Lipschitz-feltételnek tesz eleget (vektor változós esetben), arra következtethetünk, hogy folytonosan differenciálható.

Egy érdekes, de a fő problémánkkal nem kapcsolatos kérdést vizsgálunk a 7. §-ban. A 24. probléma a „The Scottish Book"-ban [128], Mazur problémája, azt kérdezi, hogy igaz-e, hogy egy additív funkcionál egy Banach téren, amely minden görbe mentén Lebesgue-mérhető, folytonos. Ez egy „mérhetőségből következik a folytonosság" típusú kérdés. A 7. §-ban röviden érintjük ezt a problémát, megmutatva, hogy az, hogy egy függvény minden görbe mentén Lebesgue-mérhető, ekvivalens az univerzális mérhetőséggel.

1.11. Steinhaus-típusú tételek. Mint az előző pontban láttuk, Steinhaus tétele [150] hasznos eszköz függvényegyenletek mérhető megoldásainak vizsgálatánál. A tétel egy másik változata azt állítja, hogy ha $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A_1 + A_2$ tartalmaz belső pontot. Ennek a tételnek számos általánosítása ismeretes: egyrészt $\mathbb{R}$ más topologikus mértéktérrel helyettesíthető, másrészt az összeadás egy kétváltozós függvényre cserélhető. Az általánosítások nagy része Weil gondolatán [164] alapul, mely szerint az

$$x \mapsto \int_Y f_1(x-y) f_2(y)\, dy$$

konvolúció folytonos. Ebből, az f_i helyére az A_i halmaz karakterisztikus függvényét helyettesítve, könnyen megkaphatjuk Steinhaus tételét. Vegyük észre, az előző pontban az 1.10.(1) halmaz μ-mértéke

$$\int \prod_{i=1}^{n} f_i\left(g_i(x, y)\right) f_i\left(g_i(x_0, y)\right)\, d\mu(y),$$

ahol f_i a K_i halmaz karakterisztikus függvénye. Ez azt mutatja, hogy amire a „mérhetőségből következik a folytonosság” típusú tételek bizonyításához szükségünk van, az egy általános Steinhaus-típusú tétel, és a két témakör szorosan összefügg.

A 3. §-ban először Weil tételét általánosítjuk, egy

$$x \mapsto \int_Y h\left(f_1\left(g_1(x,y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(x,y)\right)\right) \, d\mu(y)$$

alakú függvény folytonosságát bizonyítva, majd Steinhaus tételét általánosítjuk kettőnél több változós folytonosan differenciálható függvényre az összeadás helyett. Számos korábbi eredmény speciális esetként adódik. Az általánosítást implicit módon az 5., 8., 9. és 18. §-okban, explicit módon pedig a 6. §-ban és a 22. §-ban adott alkalmazásban fogjuk felhasználni.

1.12. Baire-kategória. Szoros analógia van a mérték és a Baire-kategória között: Oxtoby [132] könyve elegáns bevezetés. Ennek alapján várható, hogy a mértékelméleti tételek nagy részéhez hasonló tétel igaz Baire-kategória esetén is. Steinhaus tételével analóg tétel Baire-kategória esetén Piccard tétele, mely szerint ha $A \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú és Baire-tulajdonságú, akkor $A - A$ tartalmazza az origó egy környezetét. Ennek a tételnek is hasonló általánosítását adjuk, mint Steinhaus tételének: lásd a 4. §-t. A „Baire-tulajdonságból következik a folytonosság” típusú tételek hasonlóak a „mérhetőségből következik a folytonosság” típusú tételekhez; ezeket a 10. §-ban tárgyaljuk.

1.13. Folytonos megoldások differenciálhatósága. Nem vitás, a legnehezebb lépés a folytonos megoldások differenciálhatóságának bizonyítása. Mint az 1.10 pontban láttuk, elég majdnem mindenütti differenciálhatóságot bizonyítani; ez következik, ha lokális Lipschitz-tulajdonság fennállását bizonyítjuk. Az 1.8 klasszikus módszer általánosítása vektor-vektor függvényekre hasznos, de távolról sem kielégítő. Néhány, a folytonosság és a lokális Lipschitz-tulajdonság között elhelyezkedő tulajdonságot is meg fogunk vizsgálni: a Hölder folytonosságot (12. §) és a lényegében korlátos változást (13. §).

Nemrégen bizonyos kompaktsági feltételek mellett sikerült olyan eredményeket elérnem, amelyek a legtöbb gyakorlati célra elegendően erősek: lásd a 11.5 pontot. Ezeknek az eredményeknek az első alkalmazása a „kockakettőzés” 21.12 egyenletének megoldása volt. Azonban azt gondolom, hogy ezen eredmények erejének legjobb illusztrációja, hogy Mario Bonk habilitációs dolgozatának a Weierstrass-féle szigma-függvény karakterizációjára vonatkozó új eredményei (a probléma Abel munkájáig nyúlik vissza) megkaphatók, sőt, általánosabb eredmények is kiadódnak: lásd a 23. §-t.

1.14. Analitikusság. Az utolsó lépés lenne annak bizonyítása, hogy a végtelen sokszor differenciálható megoldások analitikusak. Ezzel a lépéssel kapcsolatban csak gyenge eredmények vannak, lásd a 16. §-t. Vegyük azonban észre, hogy a függvényegyenletből gyakran egy differenciálegyenletet kaphatunk, így bizonyos esetekben a differenciálegyenletek regularitáselmélete használható. Lásd Dieudonné [39], 10.5.3-at közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatban, és a Zeidler [165] könyvében idézett irodalmat, II/A, 86–93. o. Ilyen módszerrel bizonyítja általánosított középérték típusú egyenletek megoldásainak analitikusságát Lavruk és Światak [121] dolgozata. Páles [134] dolgozatában általános módszert ad, amellyel összeg alakú függvényegyenleteket differenciálegyenletekre redukálhatunk. Módszerének segítségével megmutatja, hogy megfelelő feltételek mellett a megoldások analitikusak a nyílt értelmezési tartomány egy olyan nagy részhalmazán, amelynek a komplementere diszkrét.

1.15. Más regularitási tulajdonságok. Mint láttuk, az 1.7 pont (I)–(VI) lépései természetes „lépcsőket” képeznek, amelyek segítségével a mérhetőségből vagy a Baire-tulajdonságból indulva felkapaszkodhatunk az analitikusságig. Természetesen számos más regularitási tulajdonság is elképzelhető. Említsünk meg röviden néhányat.

Az egyszerűbb esetekben gyakran használatos, de bonyolultabb egyenletekre nem tűnik olyan hasznosnak, ha feltesszük, hogy a megoldás valamilyen feltételnek tesz eleget *egy pontban* vagy *egy pont valamely környezetében*. Legnépszerűbb azt feltenni, hogy van olyan pont, amelyben a megoldás folytonos. Mint már említettük, az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ Cauchy-egyenletnél rögzítve y-t látjuk, hogy a megoldás y körül konstans plusz a megoldás origó körüli részének eltoltja. Így a Cauchy-egyenletnél, ha egy megoldás folytonos egy pontban, akkor folytonos mindenütt. (Sok más tulajdonságra is hasonló állítás teljesül.) Mostanában Matkowski [126] általánosította ezeket a meggondolásokat a Cauchy-típusú

$$f(g(x,y)) = h(x, y, f(x), f(y))$$

egyenletre, amelyben f az ismeretlen függvény. Azonban más egyenletek esetén nem látszik ilyen hasznosnak feltenni, hogy a megoldás folytonos egy pontban. Példaként felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy azokat az egy pontban folytonos $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek az információ alapegyenletét, az

$$f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad 0 < x, y, x+y < 1$$

egyenletet elégítik ki, nem ilyen egyszerű meghatározni: lásd Diderrich [36], [37], [38] és Maksa [125] cikkeit. (Az egyenlet részletes tárgyalását lásd Aczél és Daróczy [15] könyvében.) Hasonlítsuk ezt össze azzal, milyen egyszerűen kapjuk a mérhető megoldásokat általános eredményeink felhasználásával 21.5-ben.

Gyakran használt feltétel az is, hogy a megoldás korlátos, felülről vagy alulról korlátos, vagy lokálisan korlátos. Például, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Cauchy-egyenlet egy megoldása, amely korlátos, mondjuk felülről egy x_0 pont egy környezetében, akkor $f(x) = xf(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Valóban, vegyük észre, hogy mivel $f(rx + sy) = rf(x) + sf(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $r, s \in \mathbb{Q}$-ra, az

f grafikonja egy $\mathbb{Q}$ feletti lineáris altere $\mathbb{R}^2$-nek. Ha $f(x) \neq xf(1)$ valamely $x \in \mathbb{R}$-re, akkor $(1, f(1))$ és $(x, f(x))$ lineárisan független elemei ($\mathbb{R}$ felett) a grafikonnak, és így f grafikonja sűrű $\mathbb{R}^2$-ben.

A lokális korlátosságnál egyébként jóval kevesebb is elég annak bizonyításához, hogy a Cauchy-egyenlet egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldására $f(x) = xf(1)$ mindenütt. Ha csak azt tesszük fel, hogy f korlátos (mondjuk felülről a K konstanssal) egy pozitív mértékű mérhető C halmazon (mely feltétel egyébként ekvivalens azzal, hogy f-et egy mérhető függvény majorálja C-n), akkor

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \leq 2K,$$

ha $x, y \in C$, azaz f korlátos felülről $2K$-val a $C + C$ halmazon. De a Steinhaus-tétel szerint (1.10) ez a halmaz tartalmaz nem üres nyílt halmazt.

Itt is elmondhatjuk, hogy ilyen korlátossági vagy lokális korlátossági feltételek egyszerűbb egyenleteknél jól használhatók, de bonyolultabb egyenleteknél nem ilyen hasznosak. Példaként ismét az információ (1) alapegyenletét említhetjük. A lokálisan korlátos megoldásokat (és ezzel az egy pontban folytonos megoldásokat is) Diderrich határozta meg, [36], [37]. Lásd még Diderrich [38] és Maksa [125] cikkét. Hosszú ideig megoldatlan probléma volt, vajon ennek az egyenletnek minden nemnegatív megoldása folytonos-e? Végül Daróczy és Maksa [34] adtak ellenpéldát. De már Cauchy exponenciális egyenletének valós változós komplex értékű megoldásai között is vannak korlátos, de nem folytonos függvények: minden, az $f(x) = e^{if_1(x)}$ összefüggéssel definiált $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény, ahol $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Cauchy-egyenlet egy megoldása, megoldása Cauchy exponenciális egyenletének, és abszolút értéke mindenütt 1.

Egy másik észrevétel, hogy nagyon „szép" függvényegyenletek esetén is a *komplex* megoldások nem differenciálhatóak mint komplex változós függvények, bár még analitikusak is, mint két változós valós függvények. Triviális példa a Cauchy-egyenlet. A legáltalánosabb folytonos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ megoldás $f(z) = cz + d\bar{z}$ komplex c, d konstansokkal; nem differenciálható, mint komplex függvény, ha $d \neq 0$.

A fenti példák indokolják, hogy általános meggondolásainkból elhagyjuk az egy pontban folytonos, lokálisan vagy globálisan korlátos megoldások vizsgálatát, és nem próbálunk meg komplex differenciálhatóságot bizonyítani.

1.16. Egy általános probléma. Az eddig tárgyalt módszerek azt sugallják, hogy az 1.7.(2) egyenlet, a „legáltalánosabb explicit egyenlet" lehet vizsgálataink központi objektuma. Ha feltesszük, hogy $f = f_0 = f_1 = f_2 = \cdots = f_n$, akkor az 1.7 „bootstrap" módszerének (I)–(VI) lépeseit használhatjuk. Itt nincs szükségünk az $f_0(y) = f(y)$ tagra: ha elhagyjuk, nem korlátozzuk az általánosságot. Azt, hogy a jobb oldal tényleg függjön y-tól, azzal fogjuk biztosítani, hogy feltesszük, hogy a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ mátrixok rangja maximális. Ilyen módon az iterációt nem tartalmazó többváltozós egyenletek alábbi alapvető regularitási problémájához jutunk:

1.17. Probléma. *Legyen X, Y és Z nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^r$-nek, $\mathbb{R}^s$-nek és $\mathbb{R}^t$-nek, és legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Legyenek $f : X \to Z$, $g_i : D \to X$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ és $h : D \times Z^n \to Z$ függvények. Tegyük fel, hogy*

(1)

$$f(x) = h(x, y, f(g_1(x, y)), \dots, f(g_n(x, y))), \text{ ha } (x, y) \in D;$$

(2) h analitikus;

(3) g_i analitikus, és minden $x \in X$-re létezik egy y, amelyre $(x, y) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(x, y)$ rangja r $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Igaz-e hogy minden f, amely Lebesgue-mérhető vagy Baire-tulajdonságú, analitikus?

1.18. Megjegyzés: a probléma változatai. A fenti problémában az „analitikus” szót a „$\mathcal{C}^\infty$” szóval helyettesítve, egy másik problémát kapunk. Talán ez a probléma még fontosabb, mivel a függvényegyenletek megoldásait leggyakrabban differenciálegyenletre történő visszavezetéssel keressük meg. Általánosabban, vizsgálhatjuk a „$\mathcal{C}^p$-problémát”, ahol $1 \le p \le \infty$ vagy $p = \omega$, ahol $\mathcal{C}^\omega$ alatt az analitikus függvények osztálya értendő $(\omega > \infty)$. Mivel nem erős megszorítás feltenni, hogy az adott függvények simábbak, mint amit a megoldástól várunk, érdemes lehet a „$\mathcal{C}^p$-$\mathcal{C}^q$-problémát” vizsgálni: feltesszük, hogy az adott függvények $\mathcal{C}^p$-ben vannak, és azt kérdezzük, hogy az f megoldás $\mathcal{C}^q$-ban van-e? Itt $0 \le q \le \omega$, $1 \le p \le \omega$ és $q \le p$. Például, néhány tételben annak bizonyításához, hogy f folytonosan differenciálható, azt fogjuk feltenni, hogy a g_i függvények kétszer folytonosan differenciálhatóak, illetve annak bizonyításához, hogy f folytonos, azt fogjuk feltenni, hogy a g_i függvények folytonosan differenciálhatóak.

1.19. Megjegyzések. (1) A fenti általános 1.17 regularitási probléma $\mathcal{C}^\infty$-változatát a szerző fogalmazta meg (Járai [72]), eredetileg egy valamivel gyengébb formában, az

$$f(x) = h(x, y, f(y), f(g_1(x, y)), \dots, f(g_n(x, y)))$$

függvényegyenletre. Ezt a problémát Aczél János a XXI. Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumon a legfontosabb, függvényegyenletekkel kapcsolatos megoldatlan problémák között ismertette (lásd Aczél [7], 256. o.). Az elmúlt tizenöt év azt mutatta, hogy az $f(y)$ tag által implicit módon bevezetett $X = Y$ megszorítás nem segít a probléma megoldásában. Így a fenti, erősebb formát fogjuk vizsgálni.

(2) Ahelyett, hogy minden $x \in X$-hez van olyan $y \in Y$, amelyre $(x, y) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(x, y)$ rangja r minden $1 \le i \le n$-re, ekvivalens lenne azt feltenni, hogy $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$, $1 \le i \le n$ rangja r mindenütt a D-n, és minden $x \in X$-hez van olyan $y \in Y$, amelyre $(x, y) \in D$. Valóban, D-t helyettesíthetjük azzal a nyílt részhalmazával, amelyen minden $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangja r.

1.20. A probléma „jól fogalmazott”. Egyszerű példákkal megmutatjuk, hogy a problémában szereplő feltételekből egyik sem hagyható el új feltételek bevezetése nélkül. Ez azt mutatja, hogy nem jogtalan a fenti problémát a „többváltozós iterációt nem tartalmazó függvényegyenletek regularitási alapproblémájának” nevezni. Egyúttal az ellenpéldák körülhatárolják azt is, milyen típusú változtatások képzelhetők el a feltételekben.

Az implicit

$$f(x)f(y)f(x+y)=0$$

egyenlet mutatja, hogy implicit egyenletekre általában nem teljesülnek regularitási tételek; minden $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény megoldás, amelyre $f(x)=0$, ha $x\notin\,]1,2[$. Valóban, ha $x,y\in\,]1,2[$, akkor $x+y\in\,]2,4[$, így a szorzat nulla. Ezek között a függvények között vannak függvények, amelyek mérhetőek, de nem folytonosak, folytonosak, de nem differenciálhatóak, stb. Egy másik, a Weierstrass-féle szigma-függvényeket karakterizáló egyenlettel kapcsolatos példa található a 23.2 megjegyzésben.

Cauchy hatvány-egyenlete,

$$f(yz)=f(y)f(z)$$

azt mutatja, hogy ha az egyenlet csak abban az értelemben implicit, hogy új változó bevezetésével nem tudjuk $f(x)=\dots$ alakra hozni, akkor sem teljesül regularitás általában. Valóban, itt minden $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|^c$ és $f(x)=|x|^c\operatorname{sgn}x$ függvény megoldás ($c\in\mathbb{R}$ és 0^c nullának értendő). Ezek között a függvények között is vannak, amelyek mérhetőek, de nem folytonosak, stb.

Az, hogy a függvényegyenlet D értelmezési tartományáról feltesszük, hogy nyílt, technikai jellegű feltételnek látszik: e nélkül nehezebb lenne a g_i belső függvények differenciálhatóságáról beszélni. Hogy ez a feltétel nem hagyható el, még akkor sem, ha a g_i függvények „nagyon szépek”, azt Cauchy exponenciális egyenletének példája mutatja. Új változót bevezetve, az

$$f(x)=f(x-y)f(y)$$

egyenletet kapjuk. Bármely olyan D értelmezési tartományon, amely tartalmazza a $(0,0)$ origót, és a $D^0=\{(x,y):0<y<x\}$ nyílt halmazt, de része a D^0 lezártjának, az $f(0)=1$, $f(x)=0$, ha $x>0$ összefüggéssel definiált függvény mérhető, de nem folytonos megoldás.

Ha a fenti problémában a h külső függvény nincs $\mathcal{C}^p$-ben, akkor a megoldás sem feltétlenül van $\mathcal{C}^p$-ben, $0\le p\le\omega$. Ezt az alábbi egyszerű példa mutatja: Legyen $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű Borel-függvény, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, és tekintsük a Cauchy-egyenletet $H\circ f$-re, azaz legyen

$$H(f(x+y))=H(f(x))+H(f(y)),\qquad x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Ez az egyenlet ekvivalens az

$$f(x)=h(f(y),f(x+y)),\qquad x,y\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

egyenlettel, ahol h-t a $h(z_1, z_2) = H^{-1}(H(z_2) - H(z_1))$ összefüggés definiálja, ha $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Így f akkor és csak akkor mérhető [folytonos, stb.] megoldása (1)-nek, ha f mérhető [folytonos, stb.] megoldása (2)-nek. De ha f mérhető, akkor $H \circ f$ is mérhető, így valamely c konstanssal $H(f(x)) = cx$, azaz $f(x) = H^{-1}(cx)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ha H^{-1} mérhető, de nem folytonos [folytonos, de nem differenciálható, stb.], akkor (2)-nek van olyan mérhető [folytonos, stb.] megoldása, amely nem folytonos [nem differenciálható, stb.].

Nagyon hasonló példa mutatja, hogy ha a fenti problémában a g_i belső függvények (vagy legalább egyikük) nincs $\mathcal{C}^p$-ben, $0 \le p \le \omega$, akkor az f megoldás sem feltétlenül van $\mathcal{C}^p$-ben. Legyen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű Borel-függvény, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $A \subset \mathbb{R}$ nulla Lebesgue-mértékű, akkor $G^{-1}(A)$ is nulla mértékű. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, és tekintsük a Cauchy-egyenletet az $f \circ G$ függvényre, azaz tegyük fel, hogy

$$(3) \qquad f(G(X+Y)) = f(G(X)) + f(G(Y)), \qquad X, Y \in \mathbb{R}.$$

Az $x = G(X)$, $y = G(Y)$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy ez az egyenlet ekvivalens az

$$(4) \qquad f(x) = f(g(x,y)) - f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

egyenlettel, ahol g a $g(x,y) = G(G^{-1}(x) + G^{-1}(y))$ összefüggéssel van definiálva, ha $x, y \in \mathbb{R}$. Így f akkor és csak akkor mérhető [folytonos, stb.] megoldása (3)-nak, ha mérhető [folytonos, stb.] megoldása (4)-nek. De ha f mérhető, akkor $f \circ G$ is mérhető, így valamely c konstanssal $f(G(X)) = cX$, azaz $f(x) = cG^{-1}(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ha G^{-1} mérhető, de nem folytonos [folytonos, de nem differenciálható, stb.], akkor (4)-nek van mérhető [folytonos, stb.] megoldása, amely nem folytonos [nem differenciálható, stb.].

Vegyük észre, hogy a $G(X) = X^3$ speciális esetben azt kapjuk, hogy $f(x) = cx^{1/3}$. Ebben az esetben a (4) egyenletben $g(x,y) = (x^{1/3} + y^{1/3})^3$. A g függvény folytonos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-en és akárhányszor differenciálható minden (x,y), $x \ne 0 \ne y$ pontban. Még az $y \mapsto g(0,y) = y$ függvény is differenciálható, és deriváltja nem tűnik el. De $x = 0$-hoz nincs olyan $y \in \mathbb{R}$, amelyre g differenciálható (x,y)-ban. Ez azt mutatja, hogy a g belső függvény differenciálhatósága nem hagyható el. Ez a példa azt is mutatja, hogy az a feltétel sem hagyható el, hogy minden x-hez van olyan y, amelyre $(x,y) \in D$.

Végül, hogy $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangjának r-nek kell lenni, azt a Cauchy hatványegyenletéből új változók bevezetésével nyert alábbi egyszerű példa mutatja:

$$f(x) = f(y)f(x/y), \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 \ne y \in \mathbb{R}.$$

Itt $x = 0$-hoz nincs olyan y, amelyre $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,y) \ne 0$, ahol $g(x,y) = x/y$. A valós értékű megoldások között ott vannak az $f(x) = |x|^c$ és $f(x) = |x|^c \operatorname{sgn} x$ függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$, és 0^c nullának értendő. Ezek némelyike mérhető, de nem folytonos, folytonos, de nem differenciálható, stb. Ugyanez az egyenlet magasabb dimenzióban is ad ellenpéldákat, ha $x, y \in \mathbb{R}^r$, az y egyetlen koordinátája sem nulla, és az x/y hányadost koordinátánként értjük. Itt a megoldások között vannak az $f(x) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x_i)$ függvények, ahol minden f_i függvény $f_i(x_i) = |x_i|^{c_i}$ vagy $f_i(x_i) = |x_i|^{c_i} \operatorname{sgn} x_i$ alakú.

Másik példa arra, hogy $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangja r kell legyen, a Sincov-egyenlet:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, y) + f(y, x_2).$$

Ennek az egyenletnek az általános $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldása $f(x_1, x_2) = g(x_2) - g(x_1)$, ahol $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Valóban, bármely ilyen alakú f megoldás. Annak bizonyítására, hogy minden f megoldás előáll így, definiáljuk g-t a $g(x) = -f(x, c)$ összefüggéssel, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

1.21. Átviteli elv: egy egyszerű példa. Számos különböző trükk van, amelyek segítségével eredményeink olyan esetekben is használhatóak, amelyekben látszólag, közvetlenül, nem: lásd az alkalmazásokkal foglalkozó részt. Egy ilyen nagyon fontos „trükköt” feltétlenül meg kell említenünk. Látszólag, az 1.17.(1) egyenlet igen speciális abban a tekintetben, hogy csak egy ismeretlen függvény szerepel benne. Azonban ez a megszorítás nem olyan erős, mint amilyennek látszik. Ha adott egy általános, iterációt nem tartalmazó többváltozós függvényegyenlet, és *minden* ismeretlen függvény kifejezhető az egyenletből, akkor (miután különböző új változókat vezettünk be minden egyenletben), tekinthetünk egy olyan vektor értékű függvényt, amelynek a különböző ismeretlen függvények a koordinátái, és eredményeinket alkalmazhatjuk erre az egyetlen, de vektor változós, vektor értékű ismeretlen függvényre. Ez világosan mutatja, milyen fontos, hogy vektor-vektor ismeretlen függvényeket tárgyaljunk. Mielőtt teljes általánossságban megfogalmaznánk ezt az „átviteli elvet”, az

$$f_1(x + y) = f_2(x) + f_3(y), \qquad f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Pexider-egyenlet egyszerű példáján mutatjuk be először.

A fenti egyenletből az alábbi három egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f_2(x_1 - y_1) + f_3(y_1), \\ f_2(x_2) &= f_1(x_2 + y_2) - f_3(y_2), \\ f_3(x_3) &= f_1(x_3 + y_3) - f_2(y_3). \end{aligned}$$

Most az $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ jelölésekkel az $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3))$ összefüggéssel definiált $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény eleget tesz az

$$(1) \qquad f(x) = h(f(x_3 + y_3, x_1 - y_1, y_2), f(x_2 + y_2, y_3, y_1))$$

egyenletnek, ahol az $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ jelölésekkel a $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ függvényt a $h(u, v) = (u_2 + v_3, v_1 - u_3, u_1 - v_2)$ összefüggés definiálja.

Vegyük észre, hogy az (1) egyenlet az 1.17 probléma minden feltételét teljesíti.

Ebben a példában a Pexider-egyenlet meglehetősen speciális tulajdonságait is felhasználtuk. Azonban definiálhattuk volna a $h : (\mathbb{R}^3)^6 \to \mathbb{R}^3$ függvényt is, a $h(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = (u_{1,2} + u_{2,3}, u_{3,1} - u_{4,3}, u_{5,1} - u_{6,2})$ összefüggéssel, ahol $u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}) \in \mathbb{R}^3$, ha $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; ekkor az (2)

$f(x) = h\left(f\left(g(y_3), x_1 - y_1, g(y_2)\right), f\left(g(y_2), g(y_3), y_1\right), \dots, f\left(g(y_1), y_3, g(y_2)\right)\right)$

függvényegyenletet kaptuk volna, ahol g egy *tetszőleges* folytonosan differenciálható függvény, amely $\mathbb{R}$-et $\mathbb{R}$-be képzi, és deriváltja nem tűnik el mindenütt. A (2) egyenlet is eleget tesz az 1.17 probléma feltételeinek.

Megjegyezzük, hogy az a feltétel, hogy *minden* ismeretlen függvény legyen kifejezhető az egyenletből, nem hagyható el. Az alábbi egyszerű példák mutatják ezt. Az

$$f(x) = f(x+y) - f(y) + f_0(x+y)f_0(y)f_0(x+2y), \qquad f, f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

egyenlet esetén az f, f_0 függvénypár, ahol $f(x) = cx$ és f_0 tetszőleges, az $]1, 2[$ intervallumon kívül eltűnő függvény, egy megoldás. Az

$$f(x) = f(x+y) - f(y) + f_0(e^x y^3) - f_0(e^x y^2)f_0(y), \qquad f, f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

egyenlet esetén az f, f_0 függvénypár, ahol $f(x) = cx$ és $f_0(x) = |x|^{c_0}$ valamely $c_0 \in \mathbb{R}$-rel (0^{c_0} alatt nullát értve), egy megoldás.

Most megfogalmazzuk az általános átviteli elvet, amely azt mutatja, hogy az 1.7.(1) általános, iterációt nem tartalmazó függvényegyenlet regularitásának problémája, ha belőle minden ismeretlen függvényre következik egy 1.7.(2) típusú explicit egyenlet, az 1.17 problémára redukálható.

1.22. Általános átviteli elv. *Legyenek $X_i \subset \mathbb{R}^{r_i}$, $Y_i \subset \mathbb{R}^{s_i}$, $Z_i \subset \mathbb{R}^{t_i}$ és $D_i \subset X_i \times Y_i$ nyílt halmazok, és legyenek az n_i-k természetes számok, az $f_i : X_i \to Z_i$-k pedig függvények ($i = 1, 2, \dots, m$). Tegyük fel, hogy $1 \le k_{i,j} \le m$ egy természetes szám és $g_{i,j} : D_i \to X_{k_{i,j}}$ egy függvény, ha $1 \le i \le m$ és ha $1 \le j \le n_i$. Legyen továbbá $h_i : D_i \times Z_{k_{i,1}} \times \dots \times Z_{k_{i,n_i}} \to Z_i$ egy függvény, ha $1 \le i \le m$. Tegyük fel, hogy $1 \le i \le m$-re fennáll az*

$$f_i(x_i) = h_i\big(x_i, y_i, f_{k_{i,1}}\left(g_{i,1}(x_i, y_i)\right), \dots, f_{k_{i,n_i}}\left(g_{i,n_i}(x_i, y_i)\right)\big), \quad (x_i, y_i) \in D_i$$

függvényegyenlet. (Az f_i függvények az ismeretlenek, a többi függvény ismert.) Ekkor az $x = (x_1, \dots, x_m)$ jelöléssel az $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))$ összefüggéssel definiált f függvényhez, amely az $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \subset \mathbb{R}^r$, $r = r_1 + \dots + r_m$ nyílt halmazt képezi le a $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_m$ nyílt halmazba, vannak olyan n és s természetes számok és olyan $Y \subset \mathbb{R}^s$, $D \subset X \times Y$ nyílt halmazok, továbbá léteznek olyan $g_j : D \to X$ ($1 \le j \le n$), $h : D \times Z^n \to Z$ függvények, hogy az

$$f(x) = h\big(x, y, f\left(g_1(x, y)\right), \dots, f\left(g_n(x, y)\right)\big), \qquad (x, y) \in D$$

függvényegyenlet teljesül. A h és g_j függvények választhatók úgy, hogy az alábbi állítások is teljesüljenek: Ha a h_i és $g_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_i$ függvények $\mathcal{C}^p$-ben vannak, akkor a h és g_j függvények is $\mathcal{C}^p$-ben vannak, ahol $0 \le p \le \omega$. (Itt is $\mathcal{C}^\omega$ alatt az analitikus függvények osztálya értendő.) Továbbá, ha a $g_{i,j}$ függvények $\mathcal{C}^1$-ben vannak, és minden $1 \le i \le m$-re minden $x_i \in X_i$-hez van olyan y_i hogy $(x_i, y_i) \in D_i$ és $\operatorname{rank} \dfrac{\partial g_{i,j}}{\partial y_i}(x_i, y_i) = r_{k_{i,j}}$, ha $1 \le j \le n_i$, akkor minden $x \in X$-hez van olyan $y \in Y$, hogy $(x, y) \in D$ és $\operatorname{rank} \dfrac{\partial g_j}{\partial y}(x, y) = r$, ha $1 \le j \le n$. Ha adottak nem üres belsejű $C_i \subset X_i$ kompakt halmazok, és y_i választható úgy, hogy $g_{i,j}(x_i, y_i) \in C_{k_{i,j}}$ teljesüljön, ha $1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n_i$, akkor y is választható úgy, hogy $g_j(x, y) \in C$ teljesüljön $1 \le j \le n$ esetén, ahol $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m$.

Bizonyítás. Először is válasszunk s'_i, $1 \le i \le m$ természetes számokat, amelyekkel $s_i + s'_i \ge r_j$, ha $1 \le j \le m$. Legyen $Y'_i = \mathbb{R}^{s'_i}$. Minden $1 \le i, k \le m$ párra válasszunk egy tetszőleges analitikus $g^*_{i,k}$ szubmerzióját $Y_i \times Y'_i$-nek C_k belsejébe. (Emlékeztetünk rá, hogy valamely euklidészi tér egy nyílt részhalmazának egy differenciálható leképezését egy euklidészi térbe szubmerziónak nevezzük, ha deriváltjának rangja mindenütt megegyezik a képtér dimenziójával.) Ha $1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n_i$, válasszunk egy $p_{i,j}$ permutációját $\{1, 2, \dots, m\}$-nek, amelyre $p_{i,j}(k_{i,j}) = i$. Definiáljuk a $g_{i,j,k}$ függvényt a $g_{i,j,k}(x_i, y_i, y'_i) = g_{i,j}(x_i, y_i)$ összefüggéssel, ha $(x_i, y_i, y'_i) \in D_i \times Y'_i$ és $k = k_{i,j}$. Ha $k \neq k_{i,j}$, legyen $g_{i,j,k}(x_{p_{i,j}(k)}, y_{p_{i,j}(k)}, y'_{p_{i,j}(k)}) = g^*_{p_{i,j}(k),k}(y_{p_{i,j}(k)}, y'_{p_{i,j}(k)})$, ha $(x_{p_{i,j}(k)}, y_{p_{i,j}(k)}, y'_{p_{i,j}(k)}) \in D_{p_{i,j}(k)} \times Y'_{p_{i,j}(k)}$. Ezzel a definícióval $g_{i,j,k}$ a $D_{p_{i,j}(k)}$ halmazt X_k-ba képezi. Végül definiáljuk $g_{j'}$-t, ahol $j' = n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} + j$. A $g_{j'}(x, y)$ függvény azon (x, y) párok D halmazán van definiálva, amelyekre $(x_k, y_k, y'_k) \in D_k \times Y'_k$, ha $k = 1, 2, \dots, m$, ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m)$ és $\tilde{y}_k = (y_k, y'_k)$, ha $k = 1, 2, \dots, m$; a $g_{j'}(x, y)$ értéket úgy definiáljuk, hogy koordinátái $g_{i,j,k}(x_{p_{i,j}(k)}, y_{p_{i,j}(k)}, y'_{p_{i,j}(k)})$, $k = 1, 2, \dots, m$ legyenek. Vegyük észre, hogy így definiálva, $\dfrac{\partial g_{j'}}{\partial y}$ rangja az (x, y) pontban $r - r_i + \operatorname{rank} \dfrac{\partial g_{i,j}}{\partial y_i}(x_i, y_i)$. Végül, ezekkel a jelölésekkel, definiáljuk a h függvényt úgy, hogy koordinátái az $(x, y, z_1, \dots, z_n)$ pontban egyezzenek meg $h_i(x_i, y_i, z'_{i,1}, \dots, z'_{i,n_i})$-vel, ha $1 \le i \le m$, ahol $z'_{i,j}$ a $k_{i,j}$-edik koordinátája $z_{n_1+\ldots+n_{i-1}+j} \in Z_1 \times \dots \times Z_m$-nek, ha $1 \le j \le n_i$.

1.23. A fő problémával kapcsolatos eredmények összefoglalása. A teljes 1.17 probléma megoldatlan. A problémát az 1.7 pont (I)–(VI) lépéseinek megfelelően hat részre oszthatjuk. Az (I), (II), (IV) és (V) lépésnek megfelelő részt teljesen megoldjuk. A (III) lépésnek megfelelő részt csaknem teljesen megoldjuk (pontosabban, egy általában teljesülő kompaktsági feltétel mellett oldjuk meg). A (VI) lépéssel kapcsolatban csak igen erős további feltételek mellett vannak eredményeink. Az (I), (II), (III), (IV), (V) és (VI) lépéseknek megfelelő részt rendre a 8.–9., 10., 11., 14., 15. és 16. paragrafusokban tárgyaljuk. További, az 1.17 problémához kapcsolódó regularitási eredmények találhatók az 5., 6., 7., 12.,és 13. paragrafusokban. Az alábbiakban összefoglaljuk az ezen paragrafusok általánosabb eredményeinek az 1.17 problémára vonatkozó következményeit.

1.24. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, ha h folytonos, a g_i függvények pedig folytonosan differenciálhatóak, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás folytonos.*

Bizonyítás. A 8.3, illetve a 10.2 tételek következménye, ha azokat lokálisan alkalmazzuk.

1.25. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, ha a h és g_i függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak, akkor minden majdnem mindenütt differenciálható f megoldás p-szer folytonosan differenciálható* $(1 \leq p \leq \infty)$.

Bizonyítás. A 14.2 és 15.2 tételekből következik.

1.26. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, ha a h és g_i függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak, akkor minden f megoldás, amely lokálisan korlátos változású, p-szer folytonosan differenciálható* $(1 \leq p \leq \infty)$.

Bizonyítás. 1.24 tételből következik, hogy f folytonos. A 13.2 tételből következik, hogy f lokálisan Lipschitz. Az 1.25 tételből következik, hogy az f megoldás p-szer folytonosan differenciálható.

1.27. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, ha a h és g_i függvények $\max\{2,p\}$-szer folytonosan differenciálhatóak, és van olyan C kompakt részhalmaza X-nek, hogy minden $x \in X$-hez van olyan $y \in Y$, amelyre 1.17.(3) feltételei mellett még $g_i(x,y) \in C$ is teljesül, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás p-szer folytonosan differenciálható* $(1 \leq p \leq \infty)$.

Vegyük észre, hogy a tételben szereplő kiegészítő kompaktsági feltételt megőrzi az átviteli elv.

Bizonyítás. Az 1.24, 1.25 és 11.5 tételekből következik.

1.28. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, ha $n = 2$, $t = 1$, $g_1(x,y) \equiv y$, és a h függvény p-szer, a g_2 függvény $\max\{2,p\}$-szer folytonosan differenciálható, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás p-szer folytonosan differenciálható* $(1 \leq p \leq \infty)$.

Bizonyítás. Az állítás az 1.24, 11.4 és 1.25 tételek következménye.

1.29. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, ha az 1.17.(1) függvényegyenlet az alábbi speciális alakú:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i\big(x, y, f\left(g_i(x,y)\right)\big),$$

ahol a $h_i : D \times Z \to \mathbb{R}^t$ függvények p-szer, a g_i függvények $\max\{2,p\}$-szer folytonosan differenciálhatóak, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás p-szer folytonosan differenciálható $(1 \leq p \leq \infty)$.

Bizonyítás. Ez a tétel az 1.24, 11.3 és 1.25 tételek összefoglalása.

1.30. Tétel. *Az 1.17 probléma jelöléseivel, tegyük fel, hogy* $t = 1$, $D =]a, b[\times]a, b[$, *és az egyenlet az alábbi speciális alakú:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f\left(g_i(x, y)\right), \qquad \text{ha} \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

ahol $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *és*

$$g_i :]a, b[\times]a, b[\to]a, b[\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tegyük fel továbbá, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:

(2) $g_i(x, y)$ *az* x *és* y *között van, ha* $x, y \in]a, b[$;

(3) g_i *analitikus és valamely* $0 < A < 1$ *konstanssal*

$$\left| \frac{\partial^p g_i}{\partial^k x \partial^{p-k} y}(x, y) \right| \leq A^p p!,$$

ha $x, y \in]a, b[$ *és* $p = 1, 2, \ldots$;

(4) minden $x \in]a, b[$*-re és* $i = 1, 2, \ldots, n$*-re az* $]a, b[$*-nek* $]a, b[$*-be való* $y \mapsto g_i(x, y)$ *leképezése szigorúan monoton, és az a* $\overline{g_i}$ *függvény, amelyre a* $t \mapsto \overline{g_i}(x, t)$ *leképezés az* $y \mapsto g_i(x, y)$ *leképezés inverze, kétszer folytonosan differenciálható az értelmezési tartományán.*

Ekkor minden f *megoldás, amely Lebesgue-mérhető vagy Baire-tulajdonságú, analitikus.*

Bizonyítás. Ez a tétel az 1.29 és az 16.2 tételeket foglalja össze.

1.31. Regularitási tételek sokaságokon. Geometriai vagy fizikai problémákból származó függvényegyenletekre az egyenlet természetes értelmezési tartománya néha egy differenciálható sokaság. A 5.–15. paragrafusokban szereplő tételek nagy része általános nemlineáris egyenletek vektor-vektor megoldásaira vonatkozik, és lokális jellegű. Várható, hogy az eredmények jó része átvihető differenciálható sokaságokra is. A lokális jellegű eredményeknél ez semmi gondot nem okoz, de a globális jellegű eredmények új bizonyítást igényelnek. A sokaságokra vonatkozó eredmények tárgyalása a 17. paragrafusban történik. Érdemes az alapproblémát is megfogalmazni differenciálható sokaságokra is:

1.32. Probléma. *Legyenek* X, Y *és* Z *analitikus sokaságok, és legyen* D *az* $X \times Y$ *nyílt részhalmaza. Legyenek* $f : X \to Z$, $g_i : D \to X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *és* $h : D \times Z^n \to Z$ *függvények. Tegyük fel, hogy*

(1)

$$f(x) = h(x, y, f(g_1(x, y)), \ldots, f(g_n(x, y))),$$

ha $(x, y) \in D$;

(2) h *analitikus;*

(3) g_i *analitikus és minden* $x_0 \in X$*-hez van olyan* y_0, *amelyre* $(x_0, y_0) \in D$ *és* $y \mapsto g_i(x_0, y)$ *szubmerzió az* y_0*-ban, ha* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Igaz-e, hogy minden f *megoldás, amely Lebesgue-mérhető vagy Baire-tulajdonságú, analitikus?*

Természetesen itt is megfogalmazható a $\mathcal{C}^p$-probléma és a $\mathcal{C}^p$–$\mathcal{C}^q$-probléma, amelyekbe itt azt is beleértjük, hogy az X, Y és Z sokaságok $\mathcal{C}^p$-sokaságok.

1.33. A sokaságokra vonatkozó eredmények összefoglalása. Itt is a teljes válasz a fenti problémára nem ismert. Ugyanúgy, mint az 1.17 problémát, ezt a problémát is az 1.7 pont (I)–(VI) lépéseinek megfelelően hat részre oszthatjuk. Az (I), (II), (IV) és (V) lépésnek megfelelő rész teljes megoldása könnyen következik a 8., 10., 14. és 15. paragrafusok eredményeiből (és elég feltenni, hogy a szereplő sokaságok $\mathcal{C}^\infty$-ek). A (III) lépést X kompaktsága esetén megoldjuk. Ha X nem kompakt, további feltételek mellett kapunk eredményeket. Eredményeink az alábbi tételekben összegezhetők:

1.34. Tétel. *Az 1.32 probléma jelöléseivel, ha X, Y és Z is $\mathcal{C}^\infty$-sokaságok, h folytonos, a g_i függvények pedig folytonosan differenciálhatóak, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás folytonos.*

Bizonyítás. A 17.1, illetve a 17.2 tételek következménye, ha azokat lokálisan alkalmazzuk.

1.35. Tétel. *Az 1.32 probléma jelöléseivel, ha X, Y és Z is $\mathcal{C}^\infty$-sokaságok, a h és a g_i függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak, akkor minden majdnem mindenütt differenciálható f megoldás p-szer folytonosan differenciálható* ($1 \le p \le \infty$).

Bizonyítás. A 17.7 és 17.8 tételekből következik.

1.36. Tétel. *Az 1.32 probléma jelöléseivel, ha X, Y és Z is $\mathcal{C}^\infty$-sokaságok, a h és g_i függvények* $\max\{2, p\}$*-szer folytonosan differenciálhatóak, és van olyan C kompakt részhalmaza X-nek, hogy minden $x_0 \in X$-hez van olyan $y_0 \in Y$, amelyre a fenti probléma (3) feltétele mellett $g_i(x_0, y_0) \in C$ ($i = 1, \ldots, n$) is teljesül, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás p-szer folytonosan differenciálható* ($1 \le p \le \infty$).

Bizonyítás. Az 1.34, 1.35 és 17.4 tételek következménye.

1.37. Tétel. *Az 1.32 probléma jelöléseivel, ha X, Y és Z is $\mathcal{C}^\infty$-sokaságok, X kompakt, h és g_i pedig $\mathcal{C}^\infty$-függvények, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás $\mathcal{C}^\infty$-ben van.*

Bizonyítás. Az előző tétel következménye.

1.38. Tétel. *Az 1.32 probléma jelöléseivel, ha X, Y és Z is $\mathcal{C}^\infty$-sokaságok, $n = 2$,* $\dim(Z) = 1$, *$g_1(x, y) \equiv y$, a h függvény p-szer, a g_2 függvény* $\max\{2, p\}$*-szer folytonosan differenciálható, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás p-szer folytonosan differenciálható* ($1 \le p \le \infty$).

Bizonyítás. Az állítás az 1.34, 17.6 és 1.35 tételek következménye.

1.39. Tétel. *Az 1.32 probléma jelöléseivel, ha X és Y is $\mathcal{C}^\infty$-sokaságok, Z nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^t$-nek, és a függvényegyenlet az alábbi speciális alakú:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i\big(x, y, f\left(g_i(x,y)\right)\big), \quad (x,y) \in D,$$

ahol a $h_i : D \times Z \to \mathbb{R}^t$ függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak, a g_i függvények pedig $\max\{2,p\}$-szer folytonosan differenciálhatóak, akkor minden Lebesgue-mérhető, illetve Baire-tulajdonságú f megoldás p-szer folytonosan differenciálható $(1 \le p \le \infty)$.

Bizonyítás. Ez a tétel az 1.34, 17.5 és 1.35 tételek összefoglalása.

1.40. Regularitási tételek kevesebb változóval. Durván szólva, a 5.–17. paragrafusok eredményei azokban az esetekben bizonyítanak regularitási tételeket, amelyekben egy r változós függvény egy legalább $2r$ változós függvényegyenletnek tesz eleget. Az 1.17 probléma jelöléseivel, ez azért van, mert a feltételből, hogy $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangja megegyezik X dimenziójával, következik, hogy Y dimenziója nem lehet kisebb, mint X dimenziója. Az 1.20 pont utolsó két példája azt mutatja, hogy a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangjára vonatkozó feltételt nem lehet egyszerűen elhagyni. Mindazonáltal, hogy legalábbis bizonyos esetekben, a változók száma egészen $r+1$-ig redukálható (az r eset már „egyváltozós" egyenletet jelentene), azt Światak [154] regularitási eredményei mutatják.

Światak általános „lokális integrálhatóságból következik az akárhányszori differenciálhatóság" típusú tételeket bizonyított. Eredményeit disztribúciók alkalmazásával kapta. Módszerének lényege annak bizonyítása, hogy a disztribúció értelemben vett megoldások egy olyan differenciálegyenletnek tesznek eleget, amelynek csak végtelen sokszor differenciálható megoldásai vannak. Ezt a gondolatot használta Światak [154] dolgozatában, amelyben a

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x,y) f(g_i(x,y)) = h(x, f(g_{n+1}(x)), \ldots, f(g_m(x))) + h_0(x,y) \tag{1}$$

függvényegyenletre bizonyított be egy általános regularitási eredményt, ahol f az ismeretlen függvény. Durván szólva, a disztribúciók közötti egyenletként tekintett (1) egyenletre egy, az y változóban ható parciális differenciáloperátort alkalmaz. Természetesen a jobb oldalon szereplő nemlineáris tag eltűnik. Ha létezik olyan y_0, amelyre $g_i(x,y_0) \equiv x$ minden $1 \le i \le n$-re (nagyon erős feltevés), akkor ezt a rögzített y_0-at helyettesítve $P(\partial, x) f = H$ alakú parciális differenciálegyenletet kapunk. Ha ez a parciális differenciálegyenlet konstans erősségű és hypoelliptikus valamely $x = x_0$-ra, akkor a differenciálegyenletek regularitási elmélete szerint (lásd ezzel kapcsolatban Hörmander [59] könyvében a 7.4.1 tételt) minden disztribúció megoldás egy $\mathcal{C}^\infty$ függvénynek felel meg. Annak részletes tárgyalását illetően, hogy a fellépő nehézségek hogyan küzdhetők le, és a kapott eredmények hogyan alkalmazhatók, Światak eredeti [151], [152], [153], [154], [155] dolgozataira utalunk.

A fenti, Światak által vizsgált egyenlet „majdnem lineáris”, így formálisan sokkal speciálisabb, mint az 1.17 problémában szereplő (1) egyenlet. Azonban Światak tételei akkor is alkalmazhatók, amikor $\frac{\partial g_i}{\partial y}$ rangja sokkal kisebb, mint az f ismeretlen függvény értelmezési tartományának dimenziója. Durván szólva, Światak eredményei még akkor is alkalmazhatók, ha az ismeretlen f függvény r változós, és az egyenletben $r+1$ változó van. Ez a változók minimális száma, amelyre az egyenlet nem „egyváltozós” egyenlet. Így Światak eredményei azt mutatják, hogy az 1.17 problémában a rang feltétel túl erős, és a problémára vonatkozó eredmények (más feltételeket is változtatva) kiterjeszthetők más esetekre is.

Remélhető, hogy módszereink általánosításával általános *nemlineáris* függvényegyenletekre is kaphatunk eredményeket. Ilyen egyenletekre lehetetlennek tűnik Świataknak a Schwartz-féle disztribúciókra alapozott módszereit kiterjeszteni. Remélhető, hogy azt az igen erős feltevést is ki tudjuk küszöbölni, hogy létezzen olyan y_0, amelyre $g_i(x, y_0) \equiv x$ minden $1 \leq i \leq n$-re. A mesterségesnek tűnő hypoelliptikussági feltételnek is el kell tünnie.

A fenti gondolatoktól vezérelve, az 18. paragrafusban általános „mérhetőségből következik a folytonosság” típusú eredményeket fogunk bebizonyítani „kevés” változóval. A mérhetőség és a Baire-kategória között fennálló analógia (lásd Oxtoby [132]) azt sugallja, hogy próbáljunk meg analóg eredményeket bizonyítani Baire-tulajdonságú megoldásokra is. A fennálló különbségek, mint például az „ε-technika”, a mértékben való konvergencia, és az ehhez kapcsolódó tételek (például Riesz kiválasztási tételének, stb.) hiánya azt mutatják, hogy külön tárgyalás szükséges. A „Baire-tulajdonságból következik a folytonosság” típusú eredményeket általános nemlineáris egyenletekre „kevés” változóval a 19. paragrafusban bizonyítunk. Végül, a 20. paragrafusban „folytonosságból következik a differenciálhatóság” és „p-szer folytonosan differenciálható megoldások $p+1$-szer is folytonosan differenciálhatóak” típusú tételeket bizonyítunk „kevés” változós függvényegyenletekre. Az utóbbi esetben eredményeink általános nemlineáris egyenletekre is alkalmazhatók. Az előbbi esetben a jelenlegi eredmények csak lineáris egyenletekre alkalmazhatók, de sok más erős feltétel nem lép fel.

2.§ Jelölések és terminológia

2.1. Halmazok és függvények. Egy A halmaz *számosság*át $\operatorname{card}(A)$ fogja jelölni. Ha $\operatorname{card}(A) \leq \aleph_0$, akkor azt mondjuk, hogy A *megszámlálható*. A $\mathfrak{c}$ jelölést használjuk a kontinuum számosságra, azaz $2^{\aleph_0}$-ra. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{T}$ a *nemnegatív egész, egész, racionális, valós, komplex* illetve *egységnyi abszolút értékű komplex* számok jelölésére fognak szolgálni. Ha f egy függvény, jelölje $\operatorname{dmn} f$ az *értelmezési tartomány*át, $\operatorname{rng} f$ pedig az *értékkészlet*ét. Az N_f *multiplicitásfüggvény*t úgy definiáljuk, hogy $N_f(y)$ legyen $f^{-1}\{y\}$ elemeinek száma (esetleg ∞).

Minden *normált tér*ről feltesszük, hogy *valós*; a normát $|\ |$ fogja jelölni. A $\|\ \|$ jelet csak lineáris operátorok operátor-normájára alkalmazzuk. Ha $f : D \to Y$ egy normált tér egy nyílt részhalmazát egy normált térbe képező függvény, akkor f' fogja jelölni f *derivált*ját. Ha $D \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, használni fogjuk a — nem teljesen korrekt módon jelölt —

$$D_{x_i} = \big\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) : (x_1, ..., x_n) \in D\big\}$$

*parciális halmaz*okat. Az $f_{x_i} : D_{x_i} \to Y$ *parciális függvény*eket az

$$f_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

ha $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ összefüggéssel definiáljuk. $D_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}}$ és $f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}}$ hasonlóan vannak definiálva. Ha X_i és Y normált terek, akkor a

$$\partial_i f, \quad \partial_{x_i} f \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

parciális deriváltat az $f_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}$ függvény deriváltjaként definiáljuk, ha létezik. Ha $\alpha \in \mathbb{N}^n$ egy multiindex, legyen

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

és legyen

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f.$$

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ és $Y = \mathbb{R}^m$, akkor f' azonosítható a

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$$

mátrixszal, ahol $f = (f_j)_{j=1}^m$ és $x = (x_i)_{i=1}^n$. Ha $y = f(x)$, $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n$, $1 \leq j_1, \ldots, j_r \leq m$, akkor jelölje a

$$\left(\frac{\partial f_{j_l}}{\partial x_{i_k}}\right)_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{r}$$

mátrix determinánsát

$$\frac{\partial(y_{j_1}, \ldots, y_{j_r})}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})}.$$

A differenciál- és integrálszámítás egyéb jelöléseit a szokásos módon használjuk; kétség esetén lásd Rudin [137] könyvét.

2.2. Topológia. Topológiával és topologikus csoportokkal kapcsolatban általában Bourbaki [26] terminológiáját és jelöléseit követjük. Így minden reguláris, teljesen reguláris, normális, kompakt és lokálisan kompakt térről *feltesszük, hogy Hausdorff*. Tetszőleges X halmaz részhalmazainak egy tetszőleges $\mathcal{E}$ osztályára jelölje $\mathcal{E}_\sigma$ az $\mathcal{E}$-beli halmazok megszámlálható uniójaként előálló halmazok osztályát (üres unió az üres halmaz), $\mathcal{E}_\delta$ pedig az $\mathcal{E}$-beli halmazok megszámlálható metszeteként előálló halmazok osztályát (üres metszet az egész X). Egy topologikus tér topológiáját, azaz nyílt részhalmazainak osztályát általában $\mathcal{G}$-vel jelöljük, zárt halmazainak osztályát pedig általában $\mathcal{F}$-el. Így a $\mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$, $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, stb. halmazosztályok értelmezve vannak. *X-beli görbe* alatt $\mathbb{R}$ valamely zárt intervallumát az X topologikus térbe képező függvényt értünk. Topologikus tér *súly*án nyílt bázisai számosságainak a minimumát értjük. Egy topologikus tér *karakter*én azt a legkisebb $\mathfrak{n}$ számosságot értjük, amelyre a tér minden pontjának van legfeljebb $\mathfrak{n}$ számosságú nyílt környezetbázisa. Ha x, y egy metrikus tér pontjai, és $\alpha > 0$, akkor azt mondjuk, hogy az x és y pontok α-közel vannak, ha a $\operatorname{dist}(x, y)$ távolságuk kisebb, mint α. Hasonlóan, ha x és y egy uniform tér pontjai, és α egy reláció az uniformitásból, azaz egy uniform környék, azt mondjuk, hogy az x és y pontok α-közel vannak, ha $(x, y) \in \alpha$. Egy metrikus térben az $r \geq 0$ sugarú és x középpontú zárt gömböt $\mathbb{B}_r(x)$ fogja jelölni. Minden, topologikus csoportokkal kapcsolatban általunk felhasznált eredmény megtalálható Hewitt és Ross [52], [53] monográfiájában.

2.3. Folytonossági modulusz, Hölder- és Lipschitz-függvények. Egy metrikus tér egy részhalmazát egy másik metrikus térbe képező f függvényre definiáljuk az f függvény ω_f *folytonossági modulusz*át az

$$\omega_f(r) = \sup\{\operatorname{dist}(f(x), f(y)) : x, y \in \operatorname{dmn} f, \operatorname{dist}(x, y) \leq r\}$$

összefüggéssel, ha $0 \leq r \leq \infty$. Ha f értelmezési tartománya nem üres, mindig teljesül, hogy $\omega_f(0) = 0$. Vegyük észre, hogy ω_f pontosan akkor (jobbról) folytonos a 0-ban, ha f egyenletesen folytonos. Előfordulhat, hogy (akár minden pozitív r-re) $\omega_f(r) = \infty$. Ha valamely $0 < \alpha \leq 1$ kitevőre és H_α konstansra $\omega_f(r) \leq H_\alpha \cdot r^\alpha$, ha $0 \leq r < \infty$, akkor azt mondjuk, hogy f *Hölder-folytonos* α kitevővel és H_α *Hölder-konstans*sal. Ha $\alpha = 1$, a Hölder-folytonos függvényeket és a Hölder-konstansokat *Lipschitz-függvény*eknek és *Lipschitz-konstans*oknak is nevezzük. A Hölder-folytonosság, Hölder-konstans, Lipschitz-függvény és Lipschitz-konstans lokális változatát is használni fogjuk. A Lipschitz- és lokálisan Lipschitz függvényekkel kapcsolatban lásd Federer [42] könyvét.

2.4. Mértékelmélet. Federer [42] könyvének terminológiáját követjük. Így *mérték* alatt egy megszámlálhatóan szubadditív, bővített valós értékű, nemnegatív függvényt értünk, amely egy X halmaz összes részhalmazán van definiálva; más terminológiában ezt a fogalmat külső mértéknek szokás nevezni. A *mérhető halmazok* σ-algebrája a Charatheodory-feltétellel definiálható: egy $A \subset X$ halmazt *μ-mérhető*nek nevezünk, ha $\mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) = \mu(T)$ minden $T \subset X$-re. A μ mértéket *véges*nek nevezzük, ha $\mu(X) < \infty$. Ha $\mu(X) = 1$, akkor azt mondjuk, hogy μ *valószínűségi mérték*. Ha egy $A \subset X$ halmaz előáll megszámlálható sok véges μ-mértékű mérhető halmaz egyesítéseként, akkor azt mondjuk, hogy *A σ-véges*. Ha X maga σ-véges, akkor azt mondjuk, hogy a *μ mérték σ-véges*. Ha X egyelemű részhalmazai mind nulla mértékűek, akkor azt mondjuk, hogy a μ mérték *diffúz*.

Ha μ mérték X-en és $Y \subset X$, a μ megszorítását Y részhalmazaira μ_Y fogja jelölni. Ez mérték Y-on. A $\mu\lfloor Y$ mértéket a $(\mu\lfloor Y)(A) = \mu(A \cap Y)$ összefüggés definiálja minden $A \subset X$-re. Ez mérték X-en.

Minden $f : X \to Y$ leképezés indukál egy X feletti mértékekhez Y feletti mértékeket rendelő $f_\sharp$ leképezést, melynek definíciója

$$f_\sharp(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)), \qquad \text{ha } B \subset Y.$$

Ha egy nemnegatív, bővített valós értékű ν függvény van definiálva az X halmaz részhalmazainak egy tetszőleges $\mathcal{H}$ rendszerén, akkor az összes $T \subset X$-re a

$$\mu(T) = \inf\Big\{\sum_{i\in I} \nu(H_i) : \ I \text{ megszámlálható, } T \subset \cup_{i\in I} H_i \text{ és } H_i \in \mathcal{H}, \text{ ha } i \in I \ \Big\}$$

összefüggéssel értelmezett függvény egy μ mértéket definiál X-en. (Az üres összeg nullának értendő.) A μ halmazfüggvény pontosan akkor kiterjesztése ν-nek, ha ν megszámlálhatóan szubadditív. Nem nehéz megmutatni, hogy egy $A \subset X$ halmaz pontosan akkor lesz μ-mérhető, ha

$$\mu(H \cap A) + \mu(H \setminus A) \leq \nu(H)$$

minden $H \in \mathcal{H}$-ra. Speciálisan, ha $\mathcal{H}$ egy σ-algebra és ν megszámlálhatóan additív $\mathcal{H}$-n, akkor μ kiterjesztése ν-nek, és minden $H \in \mathcal{H}$ halmaz μ-mérhető.

Ha μ mérték X-en, akkor azt mondjuk, hogy *B az A halmaz μ-burka*, ha $A \subset B \subset X$, B mérhető, és

$$\mu(A \cap T) = \mu(B \cap T) \qquad \text{minden } \mu\text{-mérhető } T \text{ halmazra.}$$

A μ mértéket X-en *reguláris*nak nevezzük, ha minden $A \subset X$-hez van olyan μ-mérhető B halmaz, amelyre $A \subset B$ és $\mu(A) = \mu(B)$.

Legyen μ mérték X-en. A mérték *bázis*a μ-mérhető halmazok egy olyan $\mathcal{B}$ rendszere, hogy minden μ-mérhető A halmazhoz és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. A μ *súly*a a μ bázisai számosságainak minimuma. A μ *karakter*e a legkisebb olyan $\mathfrak{n}$ számosság, amelyre minden véges mértékű μ-mérhető Y halmazra μ_Y-nak van legfeljebb $\mathfrak{n}$ számosságú bázisa.

Megjegyezzük, hogy ha μ véges mérték, akkor μ súlya és a megfelelő $\mathbf{L}^2$-tér Hilbert-tér dimenziója megegyezik, ha legalább az egyik végtelen. (Lásd Hewitt és Ross [52], (16.12).)

Ha μ és ν mértékek X-en, azt mondjuk, hogy *μ bővítése ν-nek*, ha minden ν-mérhető A halmaz μ-mérhető is, és $\mu(A) = \nu(A)$.

Ha μ mérték az X csoporton, azt mondjuk, hogy *μ bal [jobb] invariáns*, ha minden $x \in X$-re és $A \subset X$-re $\mu(xA) = \mu(A)$ $[\mu(Ax) = \mu(A)]$.

A Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}^n$-en λ^n-nel, az m-dimenziós Hausdorff-mértéket egy metrikus téren pedig χ^m-el fogjuk jelölni. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *Lebesgue-sűrűségét* az $x \in \mathbb{R}^n$ pontban a $\lim_{r\downarrow 0} \lambda^n(\mathbb{B}_r(x) \cap A)/\lambda^n(\mathbb{B}_r(x))$ határértékként értelmezzük, ha a határérték létezik.

Ha μ mérték X-en, $A \subset X$ és Y egy topologikus tér, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *mérhető* A*-n*, ha f az A majdnem minden pontjában definiálva van, f értékkészlete Y-ban van, és $A \cap f^{-1}(W)$ mérhető halmaz minden W nyílt részhalmazára Y-nak. Speciálisan, A mérhető kell legyen.

Az itt használt mértékelméleti eredmények és bizonyításuk megtalálható Federer [42] könyvében.

2.5. Topologikus mértékek. Topologikus mértékekkel kapcsolatban Federer [42] könyvétől némileg eltérő terminológiát fogunk használni. A μ mértéket az X topologikus téren *topologikus mérték*nek fogjuk nevezni, ha X minden nyílt részhalmaza μ-mérhető. Természetesen, ha μ topologikus mérték X-en, akkor a *Borel-halmaz*ok, az X topológiája által generált (azaz azt tartalmazó legszűkebb) σ-algebra elemei mind μ-mérhetőek. A μ topologikus mérték *tartó*ja a

$$\operatorname{spt}\mu = X \setminus \cup\{V : V \subset X \text{ nyílt}, \ \mu(V) = 0\}$$

halmaz. Egy μ topologikus mértéket X-en *Borel-reguláris*nak nevezünk, ha minden $A \subset X$-hez van olyan B Borel-halmaz, amelyre $A \subset B \subset X$ és $\mu(A) = \mu(B)$. *Radon-mérték* alatt olyan μ topologikus mértéket értünk, amely egy Hausdorff-téren van értelmezve, és rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) X bármely K kompakt részhalmazának a μ-mértéke véges;

(2) X minden V nyílt részhalmazára

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V, \ K \text{ kompakt}\};$$

(3) bármely A részhalmazára X-nek

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V, \ V \text{ nyílt}\}.$$

Világos, hogy egy Radon-mértéket egyértelműen meghatároznak a kompakt halmazokon felvett értékei.

Legyen μ Radon-mérték X-en és $A \subset X$. *Az A halmaz akkor és csak akkor μ-mérhető, ha*

$$\mu(V \cap A) + \mu(V \setminus A) \leq \mu(V)$$

minden V nyílt halmazra. Valóban, ha ez a feltétel teljesül, akkor bármely $T \subset X$-re

$$\mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \leq \mu(V \cap A) + \mu(V \setminus A) \leq \mu(V),$$

ha $T \subset V$ valamely V nyílt halmazra. Infimumot véve az összes T-t tartalmazó V-re, azt kapjuk, hogy A mérhető. Hasonlóan, *A akkor és csak akkor μ-mérhető, ha*

$$\mu(K \cap A) + \mu(K \setminus A) \le \mu(K)$$

minden K kompakt halmazra. Valóban, legyen V nyílt halmaz, amelyre $\mu(V) < \infty$, és legyen K_n olyan kompakt részhalmaza V-nek, amelyre $\mu(V \setminus K_n) < 1/n$. Ekkor $\mu((V \cap A) \setminus (K_n \cap A)) \le \mu(V \setminus K_n) < 1/n$, és így $\mu(K_n \cap A) \to \mu(V \cap A)$, amint $n \to \infty$. Hasonlóan $\mu(K_n \setminus A) \to \mu(V \setminus A)$. Így azt kapjuk, hogy ha a fenti feltétel teljesül, akkor

$$\mu(V) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n \cap A) + \lim_{n\to\infty} \mu(K_n \setminus A) = \mu(V \cap A) + \mu(V \setminus A).$$

Végül, *A akkor és csak akkor μ-mérhető, ha az $A \cap K$ halmaz μ-mérhető minden K kompakt halmazra.* Valóban, ebből a feltételből az következik, hogy

$$\mu(K \cap A) + \mu(K \setminus A) \le \mu(K)$$

minden K kompakt halmazra.

Nem nehéz megmutatni, hogy *ha μ Radon-mérték, akkor*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\},$$

ha A egy véges mértékű μ-mérhető halmaz. Ha μ Radon-mérték X-en, akkor $\mu(X \setminus \operatorname{spt}\mu) = 0$.

2.6. Luzin-mérhető függvények. Legyen μ Radon-mérték az X Hausdorff-téren, és legyen Y topologikus tér. Legyen f egy függvény, amely X egy E részhalmazának majdnem minden pontját Y-ba képezi. Az f függvény *Luzin μ-mérhető E-n*, ha E bármely véges mértékű A részhalmazához és bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan C kompakt részhalmaza A-nak, amelyre $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$ és $f|C$ folytonos. Ezzel a fogalommal Luzin tétele a következőképpen szól (lásd még [42], 2.3.6):

2.7. Luzin tétele. *Legyen μ Radon-mérték az X Hausdorff-téren, E egy μ-mérhető részhalmaza X-nek, és Y topologikus tér. Ha egy f leképezése X valamely részhalmazának Y-ba Luzin μ-mérhető E-n, akkor μ-mérhető is E-n. Megfordítva, ha az f függvény μ-mérhető E-n, és az Y topológiája megszámlálható bázisú, akkor f Luzin μ-mérhető is E-n.*

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy ha V nyílt részhalmaza Y-nak, akkor $E \cap f^{-1}(V)$ mérhető. Elég megmutatni, hogy $K \cap E \cap f^{-1}(V)$ mérhető X minden K kompakt részhalmazára. A $K \cap E$ halmaz felírható, mint egy nulla mértékű N halmaz, és olyan kompakt C_n halmazok uniója, amelyekre $f|C_n$ folytonos. $C_n \cap f^{-1}(V)$ relatív nyílt C_n-ben, így Borel-halmaz. Ebből következik az állítás.

A fordított irány bizonyításában Oxtoby [132], 8.2. bizonyítását követjük. Legyen V_n megszámlálható bázisa Y-nak, A véges mértékű mérhető részhalmaza E-nek, és $\varepsilon > 0$. Az A-t egy kompakt halmazzal approximálva belülről, látjuk, hogy feltehető, hogy A kompakt. Válasszunk minden n-re olyan U_n nyílt és C_n kompakt halmazt, amelyre $C_n \subset A \cap f^{-1}(V_n) \subset U_n$ és $\mu(U_n \setminus C_n) < \varepsilon/2^n$. Ha $C = A \setminus \cup_{n=1}^{\infty}(U_n \setminus C_n)$, akkor C kompakt, $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$ és $f^{-1}(V_n) \cap C = U_n \cap C$ relatív nyílt. Ebből következik, hogy $f|C$ folytonos.

2.8. Haar-mérték. *Bármely G lokálisan kompakt csoporton létezik egy bal [jobb] invariáns λ Radon-mérték, amelyre a nem üres nyílt halmazok mértéke nem nulla. Bármely ilyen λ mértéket* bal [jobb] Haar-mérték*nek nevezünk. Bármely két ilyen λ, λ' mértékhez van olyan c pozitív konstans, amelyre $\lambda' = c\lambda$. Továbbá létezik egy egyértelműen meghatározott Δ folytonos homomorfizmusa G-nek a pozitív valós számok multiplikatív csoportjába (G úgynevezett* moduláris függvénye*), hogy ha λ egy bal Haar-mérték, $x \in G$ és az L halmaz λ-mérhető, akkor Lx és L^{-1} is λ-mérhetőek és*

$$\lambda(Lx) = \Delta(x)\lambda(L);$$

$$\lambda(L^{-1}) = \int_L \Delta(x^{-1})d\lambda(x).$$

Lokálisan kompakt csoporton a bal Haar-mértéket általában λ-val fogjuk jelölni.

2.9. Baire-kategória. A *Baire-kategóriá*val kapcsolatos legfontosabb tények megtalálhatók Bourbaki [26] könyvében; lásd a IX. fejezet 5. pontját és a hozzá tartozó feladatokat. Mi az Oxtoby [132] könyvének eltérő (és sokkal elterjedtebb) terminológiáját fogjuk használni. Az egyértelműség kedvéért röviden összefoglaljuk azokat a tényeket, amiket használni fogunk.

Az X topologikus tér egy A részhalmazát *első kategóriájú*nak nevezzük, ha A előállítható megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz (azaz olyan halmaz, amelynek a lezártja nem tartalmaz belső pontot) egyesítéseként, egyébként A *második kategóriájú.* Könnyű látni, hogy ha X topologikus tér, Y az X egy részhalmaza, A pedig az Yegy részhalmaza, és A sehol sem sűrű [első kategóriájú] mint az Y altér részhalmaza, akkor A sehol sem sűrű [első kategóriájú] az X részhalmazaként is. Megfordítva, ha Y nyílt részhalmaz, A pedig sehol sem sűrű [első kategóriájú] mint X részhalmaza, akkor A sehol sem sűrű [első kategóriájú] az Y részhalmazaként is.

Egy X topologikus teret *Baire-tér*nek nevezünk, ha benne megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű. Baire tétele azt állítja, hogy lokálisan kompakt tér és teljes metrikus tér Baire-tér. Emlékeztetünk rá, hogy egy teljes metrikus tér egy részhalmazán pontosan akkor létezik olyan teljes metrika, amelyből az altér-topológia származik, ha a részhalmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

Legyen E az X topologikus tér részhalmaza. Azt mondjuk, hogy E *második kategóriájú az $x \in X$ pontban*, ha $E \cap V$ második kategóriájú minden V környezetére x-nek. Jelölje $D(E)$ az összes olyan $x \in X$ pontok halmazát, amelyekre E második kategóriájú x-ben. $D(E) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha E első kategóriájú. Továbbá $D(E)$ zárt és az $E \setminus D(E)$ halmaz első kategóriájú.

Azt mondjuk, hogy $E \subset X$ *Baire-tulajdonságú*, ha van olyan V nyílt halmaz, amelyre az $E \triangle V$ szimmetrikus differencia első kategóriájú. Az X összes Baire-tulajdonságú részhalmazai σ-algebrát alkotnak. Természetesen ez a σ-algebra tartalmazza a Borel-halmazokat, a legkisebb, minden nyílt halmazt tartalmazó σ-algebra elemeit. Az előző bekezdés jelöléseivel egy $E \subset X$ halmaz akkor és csak akkor Baire-tulajdonságú, ha $E \setminus D(E)$ első kategóriájú. Az E halmaz akkor és csak akkor Baire-tulajdonságú, ha X minden x pontjának van olyan U környezete, hogy $U \cap E$ Baire-tulajdonságú X-ben.

Legyenek X és Y topologikus terek, és tegyük fel, hogy legalább az egyik topológiájának van megszámlálható bázisa. $X \times Y$ egy $E \times F$ részhalmaza akkor és csak akkor Baire-tulajdonságú, ha az E, F halmazok valamelyike első kategóriájú, vagy mindkettő Baire-tulajdonságú.

Ezeket a tényeket az Oxtoby [132] könyvének 15. fejezetében szereplő bizonyítással kombinálva, Kuratowsky és Ulam egy tételének az alábbi formáját kapjuk:

2.10. Kuratowsky-Ulam tétel. *Legyenek X és Y topologikus terek, és tegyük fel, hogy Y megszámlálható bázisú. Legyen E egy Baire-tulajdonságú halmaz $X \times Y$-ban. Ekkor x-ek egy X-beli első kategóriájú részhalmazát kivéve E_x Baire-tulajdonságú, és E pontosan akkor első kategóriájú, ha X-beli x-ek egy első kategóriájú részhalmazát kivéve E_x első kategóriájú Y-ban.*

2.11. Baire-tulajdonságú függvények. Azt mondjuk, hogy egy f *függvény Baire-tulajdonságú E-n*, ha f értelmezési tartománya egy első kategóriájú halmaztól eltekintve tartalmazza E-t, értékkészlete pedig egy Y topologikus térben van, és Y bármely W nyílt részhalmazára $E \cap f^{-1}(W)$ Baire-tulajdonságú halmaz X-ben. Ha f Baire-tulajdonságú X-en, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy Baire-tulajdonságú.

Ez a definíció nagyon hasonlít a Borel-függvények definíciójához. Egy f függvényt, amely egy X topologikus tér valamely részhalmazát egy Y topologikus térbe képezi le, *Borel-függvény*nek nevezünk, ha minden Y bármely V nyílt részhalmazára az $f^{-1}(V)$ halmaz Borel-halmaz X-ben.

A Baire-tulajdonságú függvények a mérhető függvényekhez nagyon hasonlóan viselkednek. Az alábbi állításokat fogjuk felhasználni.

Ha f az X valamely részhalmazán definiált Baire-tulajdonságú függvény, akkor az Y összes olyan B részhalmazai, amelyekre $f^{-1}(B)$ Baire-tulajdonságú, σ-algebrát alkotnak. Így ha f értékei az Y topologikus térben vannak, g pedig az Y topologikus tér valamely részhalmazán értelmezett Borel-függvény, akkor $g \circ f$ Baire-tulajdonságú az értelmezési tartományán.

Tegyük fel, hogy $Y = \prod_i Y_i$ megszámlálható bázisú terek megszámlálható szorzata. Egy, az X topologikus teret az Y topologikus térbe képező

f függvény pontosan akkor Baire-tulajdonságú, ha minden $p_i \circ f$ függvény Baire-tulajdonságú, ahol p_i az Y természetes projekciója Y_i-re.

Tegyük fel, hogy X topologikus tér, Y metrikus tér, és az f, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ függvények egy (a függvénytől függő) első kategóriájú halmaz kivételével az egész X-en vannak definiálva, az értékeik Y-ban vannak, és Baire-tulajdonságúak. Ekkor az

$$E = \{x : f_n(x) \to f(x)\}$$

halmaz Baire-tulajdonságú. Valóban, az $E_{n,m} = \{x : \operatorname{dist}(f_n(x), f(x)) < 1/m\}$ halmazok Baire-tulajdonságúak, az E halmaz pedig csak egy első kategóriájú halmazban különbözik a

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_{k,m}$$

halmaztól.

Tegyük fel, hogy X topologikus tér, Y metrikus tér, az f, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ függvények X-et Y-ba képezik, az f_n függvények Baire-tulajdonságúak, és $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re, kivéve egy első kategóriájú halmaz pontjait. Ekkor f is Baire-tulajdonságú. Valóban, ha V nyílt részhalmaza Y-nak, és V_i az Y azon pontjait tartalmazó nyílt halmaz, amelyek távolsága $Y \setminus V$-től nagyobb, mint $1/i$, akkor $f^{-1}(V)$ az

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} f_k^{-1}(V_i)$$

halmaztól csak egy első kategóriájú halmazban különbözik.

Azt mondjuk, hogy az X topologikus tér valamely E részhalmazát egy másik, Y topologikus térbe képező f függvény *Luzin-Baire-tulajdonságú E-n*, ha van olyan F első kategóriájú halmaz, hogy $f|E \setminus F$ folytonos. Az alábbi tétel Luzin tételével analóg:

2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy X és Y topologikus terek, és az E részhalmaza X-nek Baire-tulajdonságú. Ha az X egy részhalmazát Y-ba képező f függvény Luzin-Baire-tulajdonságú E-n, akkor f Baire-tulajdonságú E-n. Megfordítva, ha f Baire-tulajdonságú az E-n, és Y topologiája megszámlálható bázisú, akkor f Luzin-Baire-tulajdonságú E-n.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F első kategóriájú, és legyen V egy tetszőleges nyílt részhalmaza Y-nak. Mivel $f|E \setminus F$ folytonos, $(E \setminus F) \cap f^{-1}(V)$ előáll $U \cap E \setminus F$ alakban valamely X-beli U nyílt halmazzal, így Baire-tulajdonságú. Mivel $F \cap f^{-1}(V)$ első kategóriájú, Baire-tulajdonságú is. Így $E \cap f^{-1}(V)$ is Baire-tulajdonságú.

Megfordítva, legyen V_n az Y topológiájának egy megszámlálható bázisa. Mivel $E \cap f^{-1}(V_n)$ Baire-tulajdonságú, felírható $(U_n \setminus F_n) \cup F'_n$ alakban, ahol F_n és F'_n is első kategóriájú. Legyen $F = \cup_{n=1}^{\infty}(F_n \cup F'_n)$. Ekkor $(E \setminus F) \cap f^{-1}(V_n) = (E \setminus F) \cap U_n$, így relatív nyílt $E \setminus F$-ben. Mivel V_n bázis, ez azt jelenti, hogy $f|E \setminus F$ folytonos.

A Kuratowsky-Ulam tételből közvetlenül következik az alábbi, a Fubini-tétellel analóg eredmény:

2.13. Tétel. *Ha X, Y és Z topologikus terek, Y és Z megszámlálható bázisúak, $f : X \times Y \to Z$ Baire-tulajdonságú, akkor x-ek egy első kategóriájú halmazát kivéve, az f_x függvény Baire-tulajdonságú.*

2.14. Korlátos változás. A valós változós korlátos változású függvények elemi fogalma mellett szükségünk lesz a többváltozós korlátos változású függvények fogalmára is. Giusti [48] könyve nyomán, ha $X \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, azt mondjuk, hogy az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*, ha integrálható és

$$\sup \left\{ \int_X f \operatorname{div} g : g \in \mathcal{K}^1(X; \mathbb{R}^n) \text{ és } |g| \leq 1 \right\}$$

véges; itt $\mathcal{K}^1(X; \mathbb{R}^n)$ jelöli az összes X-et $\mathbb{R}^n$-be képező, kompakt tartójú folytonosan differenciálható függvények osztályát. Ha f folytonosan differenciálható, akkor a fenti kifejezés értéke $\int_X |f'|$; ugyanezzel a szimbólummal fogjuk jelölni egy tetszőleges korlátos változású függvényre. Ekvivalens definíció lenne, ha azt követelnénk meg, hogy az f disztribúció értelemben vett gradiense reprezentálható egy vektor értékű véges Radon-mérték szerinti integrálással; $\int_X |f'|$ ennek a mértéknek a teljes változása. Szigorúan véve, ez a fogalom nem az egyváltozós korlátos változású függvények fogalmának általánosítása, hanem a korlátos lényeges változással rendelkező függvényeké. Ezt a kapcsolatot, valamint a korlátos változású függvények alapvető tulajdonságait Giusti [48] könyve tárgyalja; a továbbiakban korlátos változású függvényekkel kapcsolatban csak ennek a könyvnek az eredményeire támaszkodunk. További eredmények találhatók Federer [42] könyvében, lásd 4.5.9 és 4.5.10. Azt fogjuk mondani, hogy egy vektor értékű függvény valamely euklidészi térbeli értékekkel *korlátos változású*, ha minden koordináta-függvénye korlátos változású. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan korlátos változású* X-en, ha X minden pontjának van olyan környezete, hogy f megszorítása erre a környezetre korlátos változású.

2.15. Differenciálható sokaságok. A ($\mathcal{C}^\infty$ vagy analitikus) *differenciálható sokaság*okkal kapcsolatban Dieudonné [39] könyvének terminológiáját követjük, így differenciálható sokaság alatt mindig véges dimenziós sokaságot fogunk érteni, amiről feltesszük, hogy szeparábilis és metrizálható. Egy tételben a *Banach-sokaság* fogalmát is használjuk; Banach-sokaságokkal kapcsolatban Zeidler [165] könyvének terminológiáját követjük: lásd IV. kötet, 73. fejezet. A *Lebesgue-mértékek, Lebesgue-mérhetőség, nullahalmazok* fogalmát illetően Dieudonné [39] könyvét (lásd 16.22.2) követjük; egy μ Lebesgue-mértéket egy X tiszta n-dimenziós $\mathcal{C}^\infty$ differenciálható sokaságon az jellemez, hogy ha φ egy térkép, akkor egy $A \subset \operatorname{dmn}(\varphi)$ halmaz pontosan akkor μ-mérhető, ha $\varphi(A)$ Lebesgue-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben, továbbá a φ térképhez létezik egy f_φ pozitív valós értékű $\mathcal{C}^\infty$ függvény $\operatorname{rng}(\varphi)$-n úgy, hogy

$$\mu(A) = \int_{\varphi(A)} f_\varphi(x)\, d\lambda^n(x), \quad \text{ha } A \subset \operatorname{dmn}(\varphi) \text{ mérhető.}$$

Bár a Lipschitz-függvény fogalma nem vihető át sokaságokra, a lokálisan Lipschitz függvény fogalma igen: egy $f : X \to Y$ differenciálható sokaságok közötti leképezést *lokálisan Lipschitz* függvénynek nevezünk, ha bármely $x \in X$-re van olyan φ térkép az x és ψ térkép az $f(x)$ egy-egy környezetén, hogy $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ Lipschitz-függvény a $\varphi(x)$ egy környezetén. Ekkor bármely más, x egy környezetén értelmezett $\tilde{\varphi}$ és $f(x)$ egy környezetén értelmezett $\tilde{\psi}$ térképre is teljesül, hogy $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ Lipschitz-függvény a $\tilde{\varphi}(x)$ egy környezetén. Nem nehéz belátni, hogy ha X és Y összefüggőek, akkor tetszőlegesen választva Riemann-struktúrákat X-en illetve Y-on, f pontosan akkor lokálisan Lipschitz a fenti definíció szerint, ha lokálisan Lipschitz a Riemann-struktúrákból származó metrikákra nézve.

II. Steinhaus-típusú tételek

3.§ Steinhaus tételének általánosításai

Hugo Steinhaus [150] 1920-ban bebizonyította, hogy ha A a számegyenes pozitív Lebesgue-mértékű mérhető részhalmaza, akkor az $A-A$ halmaz tartalmaz intervallumot. Általánosabban, ha az A és B halmazok $\mathbb{R}^n$ pozitív Lebesgue-mértékű mérhető részhalmazai, akkor az $A+B$ halmaz tartalmaz belső pontot: lásd például Kemperman [107] dolgozatát.

A bizonyítás például Weil gondolatára [164] alapozható, hogy a χ_A és χ_B karakterisztikus függvények konvolúciója (ha A és B véges mértékűek) folytonos függvény, így a

$$t \mapsto \lambda(A \cap (t-B)) = \int \chi_B(t-y)\chi_A(y)\, d\lambda(y)$$

függvény folytonos, és amint az Fubini tételéből következik, nem mindenütt nulla. Ez azt jelenti, hogy $A+B$ tartalmaz egy nem üres nyílt halmazt. Ez a bizonyítás akkor is működik, ha λ egy Haar-mérték egy lokálisan kompakt csoporton.

A kérdés általánosabban is vizsgálható, ha az összeadást egy kétváltozós F függvénnyel helyettesítjük, és azt kérdezzük, hogy milyen feltételek mellett bizonyítható, hogy $F(A,B)$ tartalmaz belső pontot. Az első lépést ebbe az irányba Erdős és Oxtoby [41] tette meg, bebizonyítva, hogy ha $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható kétváltozós függvény nem eltűnő parciális deriváltakkal, akkor $F(A,B)$ tartalmaz belső pontot. További általánosítások adódnak, ha F változói topologikus mértékterekben vannak, és F bizonyos feloldhatósági feltételeknek tesz eleget: lásd ez irányban Kuczma [114] és Sander [140] dolgozatát. Sander azt is észrevette, hogy az A, B halmazok egyike lehet nem mérhető is. Ezek az eredmények alkalmazhatók abban az esetben, amikor F folytonosan differenciálható függvény, változói $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, és parciális deriváltjainak determinánsa nem nulla.

Ezen paragrafus célja a kérdést többváltozós F függvényre vizsgálni. Természetesen, ha F az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-et $\mathbb{R}$-be képezi le, olyan problémát kapunk, amelyet Erdős és Oxtoby eredménye megold. Hogy értelmes új problémát kapjunk, olyan függvényt kell tekintenünk, amelynek értékkészlete $\mathbb{R}^2$-ben van. A parciális deriváltak el nem tűnésére vonatkozó feltételt az fogja helyettesíteni, hogy a deriváltoperátor nulltere általános helyzetű. A 3.11

tétel, illetve a 3.13 megjegyzés a Steinhaus-tétel egy ilyen jellegű általánosítását adja. Következményként kapjuk az ismert $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ esetet.

Bizonyításunk a konvolúció folytonosságáról szóló tétel egy igen általános változatán múlik, amelyet a 3.4 tétel tartalmaz. Következményként kapunk egy

$$t \mapsto \nu\Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(A_i)\Big)$$

típusú leképezés folytonosságára vonatkozó eredményt, ahol a $g_{i,t}$ leképezések folytonosan függnek a t paramétertől és nem képeznek pozitív mértékű halmazt nulla mértékűbe. Ennek a függvénynek a vizsgálata implicit módon először a Járai [64] dolgozatban, expliciten Krausz [109] munkájában fordul elő. Következményként kapjuk az ismert 3.7 állítást.

Mint a bevezetésben is említettük, az (1) leképezés alulról félig folytonos volta, és Steinhaus tételének számos más változata is alkalmazható függvényegyenletek vizsgálatánál. Ennek a paragrafusnak az eredményeit az 5., 6., 8., 9. paragrafusokban, valamint az alkalmazások között, a 22. paragrafusban használjuk fel.

A további irodalmi hivatkozásokat lásd M. E. Kuczma [114], M. E. Kuczma és M. Kuczma [115], illetve Sander [140] dolgozatában. Matkowski és Świątkowski [127] a Steinhaus-tétel egy más irányú, egyoldali sűrűségekre vonatkozó változatát adták meg. Az itt szereplő eredmények a Járai [87] dolgozatban jelentek meg.

Egy fontos feltétel vizsgálatával kezdjük.

3.1. Feltétel. Ebben a paragrafusban, valamint a 8., 9. és 18. paragrafusokban is fontos szerepet fog játszani egy mértékelméleti feltétel, amely a számunkra szükséges legáltalánosabb formában a következő:

Legyenek X és Y halmazok a μ illetve ν mértékekkel, T egy halmaz, $D \subset T \times Y$ és $g : D \to X$ egy függvény. Feltételünk a következő:

(1) *minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset D_t$, $\nu(B) \geq \varepsilon$, $t \in T$, akkor $\mu\left(g_t(B)\right) \geq \delta$.*

Ezen feltétellel kapcsolatban az alábbiakban összefoglalunk néhány egyszerű tulajdonságot. A feltétel vizsgálata abban a legfontosabb esetben, amikor X és Y euklidészi terek nyílt részhalmazai, a 3.10 pontban történik. További vizsgálatok találhatók a Járai [66] dolgozatban.

3.2. Megjegyzések. *Az előző pont jelöléseivel,*

(1) *ha $D_1 \subset D_2 \subset T \times Y$, $g_2 : D_2 \to X$, $g_1 = g_2|D_1$ és g_2 eleget tesz a 3.1.(1) feltételnek, akkor g_1 is;*

(2) *ha $D = D_1 \cup D_2$, $g_1 = g|D_1$, $g_2 = g|D_2$, továbbá g_1 és g_2 eleget tesznek a 3.1.(1) feltételnek, akkor g is;*

(3) *ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $D = D_1 \cup D_2$ felbontás, hogy $g|D_2$ eleget tesz a 3.1.(1) feltételnek, és $\mu\left(g_t(D_{1,t})\right) < \varepsilon$ minden $t \in T$-re, akkor g is eleget tesz a 3.1.(1) feltételnek;*

(4) *a 3.1.(1) feltétel az alábbival ekvivalens: minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $A \subset X$, $\mu(A) < \delta$, akkor $\nu\left(g_t^{-1}(A)\right) < \varepsilon$ minden $t \in T$-re;*

(5) *ha μ reguláris mérték, akkor az előző, (4) feltételt elég abban az esetben megkövetelni, ha A mérhető;*

(6) *ha X és Y Hausdorff-terek, μ és ν pedig Radon-mértékek, minden g_t folytonos a D_t Borel-halmazon, és 3.1.(1) teljesül, akkor $g_t^{-1}(A)$ mérhető minden $A \subset X$ mérhető σ-véges halmazra, ha $t \in T$;*

(7) *(6) feltételei mellett, ha $B \subset A$ és A egy μ-burka B-nek, akkor $g_t^{-1}(A)$ is ν-burka $g_t^{-1}(B)$-nek minden $t \in T$-re;*

Bizonyítás. (1)–(5) triviálisak. (6)-hoz, A-t előállítva egy B Borel-halmaz és egy C nulla mértékű halmaz egyesítéseként, $g_t^{-1}(A) = g_t^{-1}(B) \cup g_t^{-1}(C)$, ahol $g_t^{-1}(B)$ Borel-halmaz, $g_t^{-1}(C)$ pedig nulla mértékű. (7)-hez, ha valamely $E \subset Y$ mérhető halmazra

$$\nu\left(E \cap g_t^{-1}(A)\right) > \nu\left(E \cap g_t^{-1}(B)\right)$$

állna fenn, akkor $g_t^{-1}(A)$ mérhetősége és ν Radon-mérték volta miatt létezne olyan $C \subset E \cap g_t^{-1}(A \setminus B)$ kompakt halmaz, amelyre $\nu(C) > 0$ lenne, de $g_t(C) \subset A \setminus B$ miatt $\mu\left(g_t(C)\right) = 0$ teljesülne.

3.3. Segédtétel. *Legyen T topologikus tér, X uniform tér, C kompakt uniform tér, $D \subset T \times C$, $t_0 \in T$, $\{t_0\} \times C \subset D$, $g : D \to X$ folytonos függvény. Ekkor minden α relációhoz X uniformitásából van olyan β reláció C uniformitásából, és olyan V környezete t_0-nak, hogy ha $t, t' \in V$, az y, y' pontok β-közel vannak C-ben és $(t, y), (t', y') \in D$, akkor a $g(t, y)$ és $g(t', y')$ pontok α-közel vannak X-ben.*

Bizonyítás. Legyen δ olyan szimmetrikus uniform környék X-en, amelyre $\delta \circ \delta \subset \alpha$. Minden $y \in C$-hez van olyan V_y környezete t_0-nak, és olyan γ_y szimmetrikus uniform környék, hogy ha $t \in V_y$ és y' az y-hoz γ_y-közel van, akkor $g(t, y')$ és $g(t_0, y)$ is δ-közel vannak X-ben. Minden γ_y-hoz választva egy β_y szimmetrikus uniform környéket, amelyre $\beta_y \circ \beta_y \subset \gamma_y$, a $\beta_y(y)$ halmazok nyílt magjai egy lefedését alkotják C-nek. Kiválasztva egy véges lefedést, és $\beta = \bigcap_{i=1}^n \beta_{y_i}$-t, $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$-t véve, ha az y és y' pontok β-közel vannak C-ben, akkor van olyan y_i, hogy y és y_i, valamint y' és y_i is γ_{y_i}-közel vannak, így $g(t, y)$ és $g(t_0, y_i)$ valamint $g(t', y')$ és $g(t_0, y_i)$ is δ-közel vannak, azaz $g(t, y)$ és $g(t', y')$ α-közel vannak X-ben.

3.4. Tétel. *Legyen T topologikus tér, Y Hausdorff-tér, X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ teljesen reguláris tér, Z és Z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ szeparábilis Banach-terek. Legyenek ν és μ_i véges Radon-mértékek Y-on, illetve X_i-n. Tekintsük az $f_i : X_i \to Z_i$, $g_i : T \times Y \to X_i$, $h : Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) *h korlátos halmazokat korlátos halmazokba képez, és folytonos;*

(2) *$f_i \in \mathbf{L}^\infty(\mu_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$;*

(3) *g_i folytonos, és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$, ha $B \subset Y$, $\nu(B) \geq \varepsilon$, $t \in T$ és $1 \leq i \leq n$.*

Ekkor az

$$f(t) = \int_Y h\left(f_1\left(g_1(t,y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t,y)\right)\right)\, d\nu(y)$$

függvény folytonos T-n.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az integrál létezik. Minden f_i-t helyettesíthetünk egy korlátos Borel-függvénnyel, amely mindenütt definiálva van X_i-n, és amely majdnem egyenlő f_i-vel. Ez a csere nem változtatja meg az integrálandó függvény mérhetőségét és az integrált, mivel (3) szerint, azon y-ok halmaza, amelyekre $f_i\left(g_i(t,y)\right)$ értéke megváltozik, nulla mértékű. Így feltehetjük, hogy az f_i függvények korlátos Borel-függvények. (1) szerint, a

$$y \mapsto h\left(f_1\left(g_1(t,y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t,y)\right)\right) \tag{4}$$

leképezés Borel-függvény, ha $t \in T$ rögzített, értékkészlete pedig Z egy korlátos részhalmaza. Így az integrál létezik minden $t \in T$-re.

Legyen most $\varepsilon > 0$ és $t_0 \in T$. Válasszunk egy olyan $M > 0$ valós számot, amelyre (4) értékkészlete benne van a 0 középpontú, M sugarú zárt gömbben. (3) szerint létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset Y$, $\nu(B) \geq \varepsilon/(16Mn)$, $t \in T$ és $1 \leq i \leq n$, akkor $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$. Válasszunk egy $C \subset Y$ kompakt halmazt, amelyre $\nu(Y \setminus C) < \varepsilon/(8M)$. A Luzin-tétel szerint, létezik olyan C_i kompakt részhalmaza X_i-nek, amelyre $\mu_i(X_i \setminus C_i) < \delta$ és $f_i|C_i$ folytonos. Válasszunk a C, $X_1, \ldots, X_n$ tereken olyan uniformitásokat, amelyek összeférhetőek a topológiával. (1) szerint létezik egy $\alpha > 0$ úgy, hogy

$$|h(z_1, \ldots, z_n) - h(z'_1, \ldots, z'_n)| < \frac{\varepsilon}{2\nu(Y)},$$

ha $z_i, z'_i \in f_i(C_i)$ és $|z_i - z'_i| < \alpha$. Az $f_i|C_i$ egyenletes folytonossága miatt léteznek olyan β_i szimmetrikus relációk az X_i uniformitásából, amelyekre

$$|f_i(x_i) - f_i(x'_i)| < \alpha,$$

ha $x_i, x'_i \in X_i$, továbbá az x_i és x'_i pontok β_i-közel vannak, azaz $(x_i, x'_i) \in \beta_i$. A 3.3 segédtétel szerint, létezik olyan V nyílt környezete t_0-nak T-ben, és olyan γ szimmetrikus reláció C uniformitásából, hogy a $g_i(t_0, y)$ és $g_i(t, y')$ pontok β_i-közel vannak X_i-ben, ha $t \in V$, az y és y' pontok pedig γ-közel vannak C-ben. Legyen t egy eleme V-nek, és legyen

$$K = \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(C_i) \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(C_i) \cap C.$$

Ekkor

$$Y \setminus K = Y \setminus C \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(X_i \setminus C_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(X_i \setminus C_i)\right),$$

és innen (felhasználva (3)-at, és hogy $\mu_i(X_i \setminus C_i) < \delta$,)

$$\nu(Y \setminus K) < \frac{\varepsilon}{8M} + n\frac{\varepsilon}{16Mn} + n\frac{\varepsilon}{16Mn} = \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{5}$$

Felhasználva ezt, azt kapjuk, hogy

$$H(t,y) = h\left(f_1\left(g_1(t,y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t,y)\right)\right)$$

jelöléssel

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq \int_Y |H(t,y) - H(t_0,y)|\, d\nu(y) \\ &= \int_{Y \setminus K} |H(t,y) - H(t_0,y)|\, d\nu(y) + \int_K |H(t,y) - H(t_0,y)|\, d\nu(y). \end{aligned}$$

(5) szerint a jobb oldali első tag nem nagyobb, mint $\varepsilon/2$. A K, α, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, γ és V választása miatt, a jobb oldali második tag sem nagyobb, mint $\varepsilon/2$, ezt kellett bizonyítani.

3.5. Következmény. *Legyenek T, Y, X_i, ν, μ_i és g_i ugyanazok, mint az előző tételben. Tegyük fel, hogy az előző tétel (3) feltétele teljesül, és $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, továbbá A_i mérhető, ha $2 \leq i \leq n$. Ekkor az*

$$f(t) = \nu\left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(A_i)\right), \quad \text{ha} \quad t \in T$$

függvény folytonos T-n.

Bizonyítás. Az előző tétel (3) feltétele miatt, 3.2.(7) szerint a $g_{i,t}^{-1}(B_1)$ halmaz egy ν-burka $g_{i,t}^{-1}(A_1)$-nek, ha B_1 egy μ_1-burka A_1-nek. Így

$$f(t) = \int_Y \chi_{B_1}\left(g_1(t,y)\right) \chi_{A_2}\left(g_2(t,y)\right) \cdots \chi_{A_n}\left(g_n(t,y)\right) d\nu(y),$$

ahol χ_{A_i} az A_i karakterisztikus függvénye, és χ_{B_1} a B_1 karakterisztikus függvénye.

3.6. Tétel. *Legyen T topologikus tér, X és Y Hausdorff-terek μ illetve ν Radon-mértékekkel, D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak, $g : D \to X$, $t_0 \in T$, és $K \subset X$ kompakt. Tegyük fel, hogy*

(1) a g és a $(t,x) \mapsto g_t^{-1}(x)$ leképezések folytonosak és g_t homeomorfizmusa D_t-nek X-re, ha $t \in T$;

(2) minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\mu(g_t(B)) > \delta$, ha $B \subset Y$, $\nu(B) \geq \varepsilon$ és $t \in T$.

Ekkor

$$\nu\left(g_t^{-1}(K) \triangle g_{t_0}^{-1}(K)\right) \to 0, \quad \textit{ha} \quad t \to t_0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$, $\varepsilon/2$-höz válasszunk egy $\delta > 0$-t, legyen $C = g_{t_0}^{-1}(K)$, W egy C-t tartalmazó nyílt részhalmaza D_{t_0}-nak, amelyre $\nu(W \setminus C) < \varepsilon/2$, U pedig egy K-t tartalmazó nyílt részhalmaza X-nek, amelyre $\mu(U \setminus K) < \delta$. Válasszunk olyan V nyílt környezetét t_0-nak, hogy $t \in V$, $y \in C$ esetén $g_t(y)$ értelmezve legyen, és $g_t(y) \in U$ teljesüljön, továbbá $t \in V$, $x \in K$ esetén $g_t^{-1}(x) \in W$ teljesüljön. Ekkor $g_t^{-1}(K) \setminus g_{t_0}^{-1}(K) \subset V \setminus C$ miatt $\nu\left(g_t^{-1}(K) \setminus g_{t_0}^{-1}(K)\right) < \varepsilon/2$, másrészt $\nu\left(g_{t_0}^{-1}(K) \setminus g_t^{-1}(K)\right) < \varepsilon/2$, mivel a g_t leképezés a $g_{t_0}^{-1}(K) \setminus g_t^{-1}(K)$ halmazt $U \setminus K$-ba képezi le, amelyre $\mu(U \setminus K) < \delta$. Összegezve, $\nu\left(g_t^{-1}(K) \triangle g_{t_0}^{-1}(K)\right) < \varepsilon$, ha $t \in V$, ezt kellett bizonyítani.

3.7. Következmény. *Legyen G egy lokálisan kompakt csoport, és legyen λ egy bal Haar-mérték G-n. Legyen A_i, $i = 1, 2, \dots, n$ véges mértékű részhalmaza G-nek. Tegyük fel, hogy A_i mérhető, ha $2 \le i \le n$. Ekkor a G^n-nek $\mathbb{R}$-be való*

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \lambda(t_1 A_1 \cap \dots \cap t_n A_n)$$

leképezése folytonos.

Bizonyítás. Mivel A_1 helyettesítése a λ-burkával nem változtatja meg ezt a függvényt, feltehetjük, hogy A_1 is mérhető. Legyen $\varepsilon > 0$ és $T = G^n$. Válasszunk K_i kompakt halmazokat úgy, hogy $K_i \subset A_i$ és $\lambda(A_i \setminus K_i) < \varepsilon$ teljesüljön. Legyen $Y = X_1 = X_2 = \dots = X_n = G$, és

$$g_i(t, y) = t_i^{-1} y, \quad \text{ha} \quad (t_1, \dots, t_n) \in T \text{ és } y \in Y.$$

Mivel bármilyen véges mértékű mérhető B, C halmazokra

$$|\lambda(B) - \lambda(C)| \le \lambda(B \triangle C)$$

és

$$\Big(\bigcap_{i=1}^n B_i\Big) \triangle \Big(\bigcap_{i=1}^n C_i\Big) \subset \bigcup_{i=1}^n (B_i \triangle C_i),$$

alkalmazva az előző tételt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &|\lambda(t_1 K_1 \cap t_2 K_2 \cap \dots \cap t_n K_n) - \lambda(t_1^0 K_1 \cap t_2^0 K_2 \cap \dots \cap t_n^0 K_n)| \\ &\le \sum_{i=1}^n \lambda(t_i K_i \triangle t_i^0 K_i) \to 0, \quad \text{ha} \quad t_i \to t_i^0, \end{aligned}$$

azaz a

$$t \mapsto \lambda(t_1 K_1 \cap t_2 K_2 \cap \dots \cap t_n K_n)$$

függvény folytonos T-n. De

$$\begin{aligned} 0 &\le \lambda(t_1 A_1 \cap t_2 A_2 \cap \dots \cap t_n A_n) - \lambda(t_1 K_1 \cap t_2 K_2 \cap \dots \cap t_n K_n) \\ &\le \sum_{i=1}^n \lambda(t_i A_i \setminus t_i K_i) \le n\varepsilon, \end{aligned}$$

így

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \lambda(t_1 A_1 \cap \dots \cap t_n A_n)$$

folytonos függvények egyenletes határértéke, azaz maga is folytonos.

A következő segédtételben, amelyre fő eredményünk bizonyításához lesz szükségünk, elegendő feltételt adunk a 3.4 tétel (3) feltételének teljesülésére.

3.8. Segédtétel. *Legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, T topologikus tér, $y_0 \in Y$ és $t_0 \in T$. Legyen $g : T \times Y \to \mathbb{R}^r$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ folytonos és*

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(t_0, y_0)\right) = r.$$

Ekkor léteznek Y^* illetve T^* nyílt környezetei y_0-nak illetve t_0-nak, és olyan $0 < C < \infty$ konstans, hogy $Y^* \subset Y$, $T^* \subset T$ és

$$\lambda^k(B) \le \lambda^r\left(g_t(B)\right) C(\operatorname{diam} B)^{k-r}, \tag{1}$$

ha $B \subset Y^*$ és $t \in T^*$. (Itt diam B *a B halmaz átmérője.)*

Bizonyítás. Legyen $q = k - r$, és osszuk az $y = (y_1, \dots, y_k)$ koordinátáit két, $y' = (y'_1, \dots, y'_q)$ és $y'' = (y''_1, \dots, y''_r)$ csoportba úgy, hogy a

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial y''}(t_0, y_0)\right) = \det\left(\frac{\partial g}{\partial y''}(t_0, y'_0, y''_0)\right) \ne 0$$

feltétel teljesüljön. Vezessük be az

$$L(t, y') = \frac{\partial g}{\partial y''}(t, y', y''_0)$$

jelölést. Az inverz függvény tétel bizonyítását felhasználva (lásd Rudin [137], 9.24 tétel), azt kapjuk, hogy ha Y'' nyílt gömb $\mathbb{R}^r$-ben y''_0 középponttal, $t \in T$, $(y', y'') \in Y$ és

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial y''}(t, y', y'') - L(t, y') \right\| < \frac{1}{2\left\|L(t, y')^{-1}\right\|} \tag{2}$$

minden $y'' \in Y''$-re, akkor $g_{t,y'}$ homeomorf leképezése Y''-nek $\mathbb{R}^r$ egy $U(t, y')$ nyílt részhalmazára. Legyen most

$$0 < \beta < \frac{1}{2\left\|L(t_0, y'_0)^{-1}\right\|}$$

és

$$0 < \gamma < \left| \det \frac{\partial g}{\partial y''}(t_0, y'_0, y''_0) \right|. \tag{3}$$

A (2)-ben és (3)-ban szereplő kifejezések folytonosságát felhasználva, választhatunk olyan Y'' nyílt gömböt y''_0 középponttal és olyan Y' és T^* nyílt halmazokat, amelyekre $t_0 \in T^*$, $y'_0 \in Y'$, $Y^* = Y' \times Y'' \subset Y$, továbbá $t \in T^*$, $y' \in Y'$ és $y'' \in Y''$ esetén

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial g}{\partial y''}(t, y', y'') - L(t, y') \right\| < \beta; \\
&\beta < \frac{1}{2 \left\| L(t, y')^{-1} \right\|}; \\
&\gamma < \left| \det \frac{\partial g}{\partial y''}(t, y', y'') \right|.
\end{aligned}$$

Jelölje $\alpha(q)$ a q dimenziós egységgömb λ^q-mértékét ($\alpha(0) = 1$). Azt akarjuk megmutatni, hogy

$$\lambda^k(B) \le \lambda^r\left(g_t(B)\right) \frac{\alpha(q)}{\gamma} (\operatorname{diam} B)^{k-r},$$

ha $B \subset Y^*$ és $t \in T^*$. Legyen $R = \operatorname{diam} B$. Ekkor létezik olyan R sugarú V zárt gömb $\mathbb{R}^q$-ban, amelyre $B \subset (V \cap Y') \times Y''$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $t \in T^*$, amelyre

$$\lambda^k(B) > \lambda^r\left(g_t(B)\right) C R^q,$$

ahol $C = \alpha(q)/\gamma$. Ekkor választhatunk olyan U nyílt halmazt, amelyre $g_t(B) \subset U$ és

$$\lambda^k(B) > \lambda^r(U) C R^q.$$

Legyen

$$B^* = g_t^{-1}(U) \cap \left((V \cap Y') \times Y''\right).$$

Ekkor $B \subset B^*$, B^* Borel-halmaz, és $g_t(B^*) \subset U$, azaz

$$\lambda^r\left(g_t(B^*)\right) C R^q < \lambda^k(B) \le \lambda^k(B^*).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ez lehetetlen. Legyen

$$B^*_{y'} = \left\{ y'' : (y', y'') \in B^* \right\}, \quad \text{ha} \quad y' \in V \cap Y'.$$

Az integráltranszformációs tételt felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$\lambda^r\left(g_t(B^*)\right) \ge \lambda^r\left(g_{t,y'}(B^*_{y'})\right) = \int_{B^*_y} \left| \det \frac{\partial g}{\partial y''}(t, y', y'') \right| d\lambda^r(y'') \ge \gamma \lambda^r(B^*_{y'}),$$

ha $y' \in V \cap Y'$. A Fubini-tétel szerint

$$\begin{aligned}
\lambda^k(B^*) &= \int_{V \cap Y'} \lambda^r(B^*_{y'})\, d\lambda^q(y') \\
&\le \frac{\lambda^r\left(g_t(B^*)\right)}{\gamma} \lambda^q(V) = \lambda^r\left(g_t(B^*)\right) C R^q,
\end{aligned}$$

ami ellentmondás. Ezzel a bizonyítás teljes.

3.9. Segédtétel. *Az előző segédtétel feltételei mellett, ha $\mathbb{R}^r$ egy D részhalmaza 1 sűrűségű a $g(t_0, y_0)$ pontban, akkor $g_{t_0}^{-1}(D) \cap Y^*$ is 1 sűrűségű az y_0 pontban.*

Bizonyítás. $\dfrac{\partial g}{\partial y}(t_0, y)$ folytonossága miatt a g_{t_0} függvény Lipschitz-feltételnek tesz eleget az y_0 egy környezetében. Így léteznek $0 < M < \infty$ és $\gamma > 0$ konstansok úgy, hogy $|g(t_0, y) - g(t_0, y_0)| \leq M|y - y_0|$, ha $y \in Y^*$ és $|y - y_0| < \gamma$. Jelölje $\alpha(k)$ illetve $\alpha(r)$ a k illetve r dimenziós egységgömb Lebesgue-mértékét. Legyen $\varepsilon > 0$, és

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon\alpha(k)}{CM^r 2^{k-r}\alpha(r)},$$

ahol C az előző segédtételben szereplő konstans. Válasszunk egy $\beta > 0$-t úgy, hogy ha V egy zárt gömb $g(t_0, y_0)$ középponttal és β-nál kisebb sugárral, akkor $\lambda^r(V \cap D) \geq (1 - \delta)\lambda^r(V)$ teljesüljön. Megmutatjuk, hogy ha W egy zárt gömb Y^*-ban, amelynek középpontja y_0, sugara pedig kisebb γ-nál és β/M-nél, akkor

$$\lambda^k\left(W \cap g_{t_0}^{-1}(D)\right) \geq (1 - \varepsilon)\lambda^k(W).$$

Tegyük fel indirekt, hogy valamely R sugarú W gömbre ellenkező irányú egyenlőtlenség teljesül. Ekkor létezik olyan $B \subset W \setminus g_{t_0}^{-1}(D)$ kompakt halmaz, amelyre $\lambda^k(B) > \varepsilon\lambda^k(W)$. Az előző segédtétel szerint

$$\varepsilon R^k \alpha(k) < \lambda^k(B) \leq C 2^{k-r} R^{k-r} \lambda^r\left(g_{t_0}(B)\right).$$

De $g_{t_0}(B)$ kompakt részhalmaza $V \setminus D$-nek, ahol V a $g(t_0, y_0)$ középpontú $MR < \beta$ sugarú zárt gömb $\mathbb{R}^r$-ben. Így

$$\varepsilon R^k \alpha(k) < C 2^{k-r} \delta \lambda^r(V) = C 2^{k-r} R^{k-r} M^r R^r \alpha(r)\delta,$$

ami ellentmond δ választásának.

3.10. Segédtétel. *Legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, T topologikus tér, D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak és $(t_0, y_0) \in D$. Tegyük fel, hogy a $g : D \to \mathbb{R}^r$ függvény folytonos és folytonosan differenciálható y szerint. Ha a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(t_0, y_0)$ mátrix rangja r, akkor léteznek olyan T^* illetve Y^* környezetei t_0-nak illetve y_0-nak, amelyekre*

(1) minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\lambda^r\left(g_t(B)\right) \geq \delta$, ha $t \in T^*$, $B \subset Y^*$ és $\lambda^k(B) \geq \varepsilon$;

(2) ha A egy λ^r-mérhető részhalmaza $\mathbb{R}^r$-nek, akkor $g_t^{-1}(A) \cap Y^*$ egy λ^k-mérhető részhalmaza Y-nak minden $t \in T^*$-ra.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.8 segédtételt. A kapott Y^* halmazt kisebbel helyettesítve, feltehetjük, hogy Y^* korlátos. Most a 3.8 segédtétel állításából és 3.2.(4)-ből következik (1), a 3.2.(7) állításból pedig (2).

3.11. Tétel. *Legyen X egy r-dimenziós euklidészi tér, és legyenek $X_1, \dots, X_n$ ortogonális alterei X-nek $r_1, \dots, r_n$ dimenziókkal. Tegyük fel, hogy $r_i \geq 1$, ha $1 \leq i \leq n$, és $\sum_{i=1}^n r_i = r$. Legyen U nyílt részhalmaza X-nek, és $F : U \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható függvény. Minden $x \in U$-ra jelölje N_x az $F'(x)$ nullterét. Legyen A_i egy részhalmaza X_i-nek ($i = 1, 2, \dots, n$), mérhető, ha $2 \leq i \leq n$, és tegyük fel, hogy $a \in U$ és $\dim N_a = r - m$. Jelöljük p_i-vel az X ortogonális projekcióját X_i-re. Tegyük fel, hogy $p_i(N_a) = X_i$ és A_i sűrűsége 1 a $p_i(a)$ pontban, ha $1 \leq i \leq n$. Ekkor $F(A_1 \times \ldots \times A_n)$ környezete $F(a)$-nak.*

Bizonyítás. Legyen $k = r - m$. Mivel $F'(x)$ rangja, $\operatorname{rank} F'(x)$ alulról félig folytonos, és $\operatorname{rank} F'(x) = m$, feltehetjük, hogy $\operatorname{rank} F'(x) = m$ minden $x \in U$-ra. Hasonlóan, szükség esetén kisebb U-t választva, feltehetjük, hogy $p_i(N_x) = X_i$, ha $x \in U$ és $1 \leq i \leq n$. Ennek bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy van olyan i és van olyan $x_j \in U$ sorozat, továbbá léteznek olyan $e_1^{(j)}, \dots, e_{k-r_i+1}^{(j)}$ ortonormált vektorok N_{x_j}-ben, hogy $x_j \to a$ és

$$p_i(e_s^{(j)}) = 0, \quad \text{ha} \quad j = 1, 2, \dots \quad \text{és} \quad 1 \leq s \leq k - r_i + 1.$$

Az egységgömb kompaktságát felhasználva és részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $e_s^{(j)} \to e_s$, ha $j \to \infty$. Ez azonban azt mutatja, hogy az e_s-ek ortonormált vektorok N_a-ban és $p_i(e_s) = 0$, ha $1 \leq s \leq k - r_i + 1$, ami ellentmondás.

Szükség esetén kisebb U-t választva, és felhasználva a rangszám tételt (lásd Dieudonné [39], 10.3.1), azt kapjuk, hogy léteznek u, p és v leképezések, valamint egy V nyílt környezete $b = F(a)$-nak $\mathbb{R}^m$-ben az alábbi tulajdonságokkal: u az U-t az I^r nyílt kockára képezi le, ahol $I =]-1, 1[$, az u invertálható, u és u^{-1} folytonosan differenciálhatóak; v az I^m-et V-re képezi le, v invertálható, v és v^{-1} folytonosan differenciálhatóak; p a

$$p : (x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$$

projekciója I^r-nek I^m-re; végül $F = v \circ p \circ u$. Az I^r-et felírhatjuk $I^r = T \times Y$ alakban, ahol $T = I^m$ és $Y = I^k$. Legyen $u(a) = (t_0, y_0) \in T \times Y$. Fel fogunk használni néhány differenciálgeometriai tényt (lásd Dieudonné [39], főleg 16.8.8).

$U \cap F^{-1}(v(t))$ egy zárt részsokasága U-nak minden $t \in T$-re. Ennek a részsokaságnak az érintőtere egy $x \in U \cap F^{-1}(v(t))$ pontban megegyezik az X tér N_x alterével. Nyilván u^{-1} diffeomorfizmusa a $T \times Y$ tér $\{t\} \times Y$ zárt részsokaságának $U \cap F^{-1}(v(t))$-re. Legyen $g_i = p_i \circ u^{-1}$, ha $1 \leq i \leq n$. Az U halmaz választása miatt p_i szubmerziója $U \cap F^{-1}(v(t))$-nek X_i-be. Innen következik, hogy a $g_{i,t} : Y \to X_i$ leképezés is szubmerzió, azaz deriváltjának rangja r_i, ha $y \in Y$ és $t \in T$.

Most, a 3.8 segédtétel szerint, léteznek olyan T^* és Y^* nyílt halmazok, valamint $0 < K < \infty$ konstans úgy, hogy $t_0 \in T^* \subset T$, $y_0 \in Y^* \subset Y$, és

$$\lambda^k(B) \leq K \lambda^{r_i}\left(g_{i,t}(B)\right),$$

ha $B \subset Y^*$ és $t \in T^*$. Legyen $X_i^* = X_i$, $A_i^* = A_i$, és g_i^* a g_i megszorítása $T^* \times Y^*$-ra. Alkalmazva a 3.5 következményt a csillaggal jelzett halmazokra és függvényekre, azt kapjuk, hogy az

$$f(t) = \lambda^k\left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{*-1}(A)\right), \quad \text{ha} \quad t \in T^*$$

függvény folytonos T^*-on. A 3.9 segédtétel szerint $g_{i,t_0}^{*-1}(A_i)$ sűrűsége 1 az y_0 pontban. Mivel $g_{i,t_0}^{*-1}(A_i) \cap Y^*$ mérhető a 3.10 segédtétel szerint, ha $2 \le i \le n$, azt kapjuk, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{*-1}(A_i)$$

sűrűsége 1 az y_0 pontban. Innen $f(t_0) > 0$ és azt kapjuk, hogy van olyan V környezete t_0-nak, amelyre $f(t) > 0$, ha $t \in V$. Nyilván $v(V)$ egy környezete b-nek $\mathbb{R}^m$-ben. Ha $z \in v(V)$, akkor $t := v^{-1}(z) \in V$, és így a

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{*-1}(A_i)$$

halmaz nem üres. Ha y ennek a halmaznak egy eleme, akkor $u^{-1}(t,y) \in F^{-1}(z)$ és $x_i = p_i\left(u^{-1}(t,y)\right) \in A_i$, ha $1 \le i \le n$. Ez azt jelenti, hogy $F(x_1,\dots,x_n) = z$, ezt kellett bizonyítani.

3.12. Következmény. *Legyen U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$nek, és $F : (x,y) \mapsto F(x,y)$ folytonosan differenciálható leképezése U-nak $\mathbb{R}^r$-be. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^r$ és tegyük fel, hogy a B halmaz λ^r-mérhető. Ha $(a,b) \in U$,*

$$\det\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0, \qquad \det\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0,$$

A sűrűsége az a pontban 1, B sűrűsége a b pontban 1, akkor $F(A,B)$ tartalmazza $F(a,b)$ egy környezetét.

Bizonyítás. A 3.11 tétel szerint elég megmutatni, hogy $p_1(N_{a,b}) = \mathbb{R}^r$ és $p_2(N_{a,b}) = \mathbb{R}^r$, ahol $N_{a,b}$ az $F'(a,b)$ nulltere. Legyen $(x,y) \in N_{a,b}$. Ha $p_1(x,y) = 0$, akkor $x = 0$. Ebből

$$0 = F'(a,b)(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(y).$$

De $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, innen $y = 0$. Ez azt mutatja, hogy $p_1 : N_{a,b} \to \mathbb{R}^r$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, azaz $p_1(N_{a,b}) = \mathbb{R}^r$. Hasonlóan kapjuk, hogy $p_2(N_{a,b}) = \mathbb{R}^r$.

3.13. Megjegyzés. *Az előző tétel az alábbi globális formában is fogalmazható: ha N_x általános helyzetű, azaz $\dim N_x = r - m$ és $p_i(N_x) = X_i$ minden $x \in U$-ra $(i = 1,2,\dots,n)$, továbbá teljesül, hogy $A_1 \times \dots \times A_n \subset U$, $\lambda^{r_i}(A_i) > 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$, A_i mérhető, ha $2 \le i \le n$, akkor $F(A_1 \times \dots \times A_n)$ tartalmaz egy nem üres nyílt halmazt.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan $a \in U$ pontot, amelyre az A_i sűrűsége a $p_i(a)$ pontban 1, ha $1 \le i \le n$, és alkalmazzuk az előző tételt.

4.§ Piccard tételének általánosításai

Steinhaus tételével analóg Piccard tétele [135], mely szerint két második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz összege tartalmaz belső pontot. Erős általánosítások ismeretesek: itt is az összeadás helyettesíthető egy kétváltozós függvénnyel, ami gyenge feloldhatósági feltételeknek tesz eleget. Ezek az eredmények hasznos eszközök, ha „Baire-tulajdonságból következik a folytonosság" típusú regularitási tételeket kívánunk bizonyítani függvényegyenletekre. Lásd ezzel kapcsolatban a Sander [141], [143], [145], Kominek [108], Járai [72] és Grosse-Erdmann [49] dolgozatokat, valamint az ott idézett irodalmat.

Ennek a paragrafusnak a célja Piccard tételének az előző paragrafus eredményeihez hasonló általánosítását adni. Ezek az eredmények a Járai [91] dolgozatban kerültek publikálásra.

Az első tétel Piccard tétele általunk adandó általánosításának absztrakt verziója.

4.1. Tétel. *Legyenek T, Y és X_i topologikus terek, $g_i : T \times Y \to X_i$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $g_{i,t}(B)$ második kategóriájú, ha $B \subset Y$ egy második kategóriájú halmaz Y-ban. Tegyük fel, hogy $A_i \subset X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ és A_i Baire-tulajdonságú halmaz, ha $1 \le i \le n$. Ekkor azon $t \in T$ pontok V halmaza, amelyekre*

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(A_i)$$

második kategóriájú, nyílt részhalmaza T-nek.

Bizonyítás. Az A_i halmazok felírhatók $A_i = E_i \triangle M_i$ alakban, ahol E_i nyílt, M_i pedig első kategóriájú. Tegyük fel, hogy $t_0 \in V$, és legyen $K = \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$, $K' = K \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(E_i)\right)$. Mivel $g_{i,t_0}^{-1}(M_i)$ első kategóriájú Y-ban, azt kapjuk, hogy ha $i = 1, 2, \dots, n$, akkor

$$K \setminus K' \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(M_i)$$

is első kategóriájú, így K' második kategóriájú részhalmaza Y-nak. Legyen y_0 egy olyan pontja K'-nek, amelyre $W \cap K'$ második kategóriájú Y-ban y_0 minden W nyílt környezetére. Nyilván $g_i(t_0, y_0) \in E_i$, ha $i = 1, 2, \dots, n$. Mivel az E_i halmazok nyíltak, a g_i függvények pedig folytonosak, a $g_i^{-1}(E_i)$ halmazok nyíltak és tartalmazzák a (t_0, y_0) pontot, így léteznek olyan V' és W' nyílt halmazok, hogy $t_0 \in V'$, $y_0 \in W'$, és $V' \times W' \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(E_i)$. Megmutatjuk, hogy

$$W' \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(A_i)\right)$$

második kategóriájú minden $t \in V'$-re. Ha ez nem teljesülne, akkor a

$$W' \setminus g_{i,t}^{-1}(A_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

halmazok egy első kategóriájú halmaztól eltekintve lefednék W'-t. Ha megmutatjuk, hogy ezek a halmazok mind első kategóriájúak, akkor ellentmondásra jutunk. Ez viszont a $W' \subset g_{i,t}^{-1}(E_i)$ szerint fennálló

$$W' \setminus g_{i,t}^{-1}(A_i) \subset g_{i,t}^{-1}(M_i \setminus E_i)$$

tartalmazásból következik.

4.2. Megjegyzés. *Ha feltesszük, hogy Y teljes szeparábilis metrikus tér és X_1 metrizálható, akkor elhagyhatjuk azt a feltételt, hogy A_1 Baire-tulajdonságú.*

Ennek belátásához jelölje C_1 az összes olyan $x_1 \in X_1$ pontok halmazát, amelyekre az x_1 bármely U_1 környezetére $U_1 \cap A_1$ második kategóriájú. Ismeretes, hogy C_1 zárt halmaz és $A_1 \setminus C_1$ első kategóriájú. Jelölje B_1 a C_1 belső pontjainak halmazát. Ekkor B_1 nyílt és $A_1 \setminus B_1$ is első kategóriájú. Úgy, mint az előző bizonyításban, kapjuk, hogy $W' \setminus g_{1,t}^{-1}(B_1)$ és $W' \setminus g_{i,t}^{-1}(A_i)$, $2 \leq i \leq n$ első kategóriájúak. Elég megmutatni, hogy $W' \cap g_{1,t}^{-1}(A_1)$ második kategóriájú, mivel ebből már következik, hogy

$$W' \cap \left(\cap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(A_i) \right)$$

nem lehet első kategóriájú.

Tegyük fel indirekt, hogy $W' \setminus g_{1,t}^{-1}(A_1)$ első kategóriájú. Ekkor, felhasználva, hogy $W' \cap g_{1,t}^{-1}(B_1)$ második kategóriájú nyílt halmaz, azt kapjuk, hogy

$$(W' \cap g_{1,t}^{-1}(B_1)) \setminus g_{1,t}^{-1}(A_1) = (W' \cap g_{1,t}^{-1}(B_1)) \setminus (W' \cap g_{1,t}^{-1}(A_1))$$

második kategóriájú Baire-halmaz. Legyen G egy második kategóriájú $\mathcal{G}_\delta$-részhalmaza a fenti halmaznak. Ekkor $g_{1,t}(G)$ második kategóriájú, mint X_1 részhalmaza. Bourbaki [26], IX, §6, Exercise 10 szerint $g_{1,t}(G)$ Baire-tulajdonságú X_1-ben. Világos, hogy $g_{1,t}(G) \subset B_1 \setminus A_1$. Egy $g_{1,t}(G) = U \triangle F$ előállítást véve, ahol U nyílt, F pedig első kategóriájú, látjuk, hogy $U \cap B_1$ nem üres nyílt halmaz, amelynek az A_1-el vett metszete első kategóriájú. Ez ellentmond B_1 definíciójának.

Laczkovich [118] jegyzetében, II.9.9, be van bizonyítva, hogy egy lengyel-tér folytonos képe egy Hausdorff-térben Baire-tulajdonságú. Ez azt mutatja, hogy elég feltenni, hogy X_1 Hausdorff.

Az alábbi lemma lehetővé teszi, hogy differenciálszámítás segítségével ellenőrizzük, hogy az előző tételben a g_i függvényekre kirótt feltételek teljesülnek.

4.3. Segédtétel. *Legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, T topologikus tér, D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak és $(t_0, y_0) \in D$. Tegyük fel, hogy a $g : D \to \mathbb{R}^r$ függvény folytonos és folytonosan parciálisan deriválható y szerint. Ha a $\frac{\partial g}{\partial y}(t_0, y_0)$ mátrix rangja r, akkor léteznek olyan T^* illetve Y^* nyílt környezetei t_0-nak illetve y_0-nak, hogy*

(1) *ha B második kategóriájú részhalmaza Y^*-nak, akkor $g_t(B)$ is második kategóriájú részhalmaza $\mathbb{R}^r$-nek minden $t \in T^*$-ra;*

(2) *ha A Baire-tulajdonságú halmaz $\mathbb{R}^r$-ben, akkor $g_t^{-1}(A) \cap Y^*$ is Baire-tulajdonságú halmaz Y-ban minden $t \in T^*$-ra.*

Bizonyítás. A 3.8 segédtétel bizonyításában megmutattuk, hogy léteznek olyan T^* és Y' nyílt halmazok, valamint egy y_0'' középpontú Y'' nyílt gömb, hogy $t_0 \in T^*$, $y_0' \in Y'$, $T^* \times Y' \times Y'' \subset D$ és $g_{t,y'}$ homeomorf módon képezi le Y''-t $\mathbb{R}^r$ egy $U(t, y')$ nyílt részhalmazára, ha $t \in T^*$ és $y' \in Y'$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan második kategóriájú B részhalmaza $Y^* = Y' \times Y''$-nek, és $t \in T^*$, amelyre $g_t(B)$ első kategóriájú részhalmaza $\mathbb{R}^r$-nek. Válasszunk egy U első kategóriájú Borel-halmazt $\mathbb{R}^r$-ben, amelyre $g_t(B) \subset U \subset g_t(Y^*)$, és legyen $B^* = g_t^{-1}(U) \cap Y^*$. Ez a B^* halmaz második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz Y^*–ban, $g_t(B^*)$ pedig első kategóriájú $\mathbb{R}^r$-ben. A Kuratowsky–Ulam tétel szerint az összes olyan $y' \in Y'$ pontok halmaza, amelyekre $B^*_{y'}$ második kategóriájú, második kategóriájú halmaz. Másrészt, ugyanezen tétel szerint, az összes olyan $y' \in Y'$ pontok halmaza, amelyekre $B^*_{y'}$ nem Baire-tulajdonságú, első kategóriájú halmaz. Ebből következik, hogy van olyan $y' \in Y'$, amelyre $B^*_{y'}$ második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz Y''-ben. Mivel $g_{t,y'}$ homeomorfizmusa Y''-nek $U(t, y')$-re, $g_{t,y'}(B^*_{y'})$ is második kategóriájú $\mathbb{R}^r$-ben. Ez ellentmondás, mivel $g_{t,y'}(B^*_{y'}) \subset g_t(B^*)$. Ezzel (1)-et bebizonyítottuk.

(2) bizonyításához tegyük fel, hogy A egy Baire-tulajdonságú halmaz $\mathbb{R}^r$-ben, és válasszunk egy B Borel-halmazt, amelyre $A \subset B$ és $B \setminus A$ első kategóriájú. Ekkor

$$g_t^{-1}(A) \cap Y^* = \left(g_t^{-1}(B) \cap Y^*\right) \setminus \left(g_t^{-1}(B \setminus A) \cap Y^*\right).$$

Felhasználva, hogy $g_t^{-1}(B)$ Borel-halmaz, $g_t^{-1}(B \setminus A) \cap Y^*$ pedig első kategóriájú (1) szerint, kapjuk, hogy $g_t^{-1}(A) \cap Y^*$ Baire-tulajdonságú.

Ezzel készen állunk arra, hogy bebizonyítsuk $\mathbb{R}^r$ egy nyílt részhalmazát $\mathbb{R}^m$-be képező függvényekre Piccard tétele általánosításának lokális verzióját. Durván szólva, a tételben szereplő feltételek azt jelentik, hogy a derivált nulltere elég nagy és általános helyzetben van.

4.4. Tétel. *Legyen X egy r-dimenziós euklidészi tér, és legyenek $X_1, \dots, X_n$ ortogonális alterei X-nek $r_1, \dots, r_n$ dimenziókkal. Tegyük fel, hogy $r_i \geq 1$, ha $1 \leq i \leq n$ és $\sum_{i=1}^n r_i = r$. Legyen U nyílt részhalmaza X-nek, és $F : U \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható függvény. Minden $x \in U$-ra jelölje N_x az $F'(x)$ nullterét. Legyen A_i Baire-tulajdonságú részhalmaza*

X_i-nek ($i = 1, 2, \ldots, n$), továbbá tegyük fel, hogy $a \in U$ és $\dim N_a = r - m$. Jelöljük p_i-vel az X ortogonális projekcióját X_i-re. Tegyük fel, hogy $p_i(N_a) = X_i$ és $p_i(a)$-nak van olyan U_i környezete, hogy $U_i \setminus A_i$ első kategóriájú, ha $1 \le i \le n$. Ekkor $F(A_1 \times \ldots \times A_n)$ környezete $F(a)$-nak.

Bizonyítás. A t_0, y_0 pontokat, T és Y halmazokat és g_i leképezéseket definiáljuk úgy, mint 3.11 bizonyításában. A 4.3 segédtétel szerint léteznek olyan T^* és Y^* halmazok, hogy $t_0 \in T^* \subset T$, $y_0 \in Y^* \subset Y$, és $g_{i,t}(B)$ második kategóriájú, ha $B \subset Y^*$ második kategóriájú, és $t \in T^*$. Legyen $X_i^* = X_i$, $A_i^* = A_i$, g_i^* a g_i megszorítása $T^* \times Y^*$-ra. Alkalmazva az előző tételt a csillaggal jelzett halmazokra, azt kapjuk, hogy azon t pontok V halmaza, amelyekre

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(A_i)$$

második kategóriájú, nyílt T^*-ban. Mivel g_{i,t_0}^* az Y^*-ot $p_i(a)$ egy nyílt környezetére képezi le folytonosan, és $g^*(t_0, y_0) = p_i(a)$, van olyan W nyílt környezete y_0-nak Y^*-ban, hogy $W \setminus g_{i,t_0}^{*-1}(A_i)$ első kategóriájú, ha $1 \le i \le n$. Ez azt jelenti, hogy $t_0 \in V$. Nyilván $v(V)$ egy környezete b-nek $\mathbb{R}^m$-ben. Ha $z \in v(V)$, akkor $v^{-1}(z) \in V$, és így a

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{*-1}(A_i)$$

halmaz nem üres. Ha y ennek a halmaznak egy eleme, akkor teljesül, hogy $u^{-1}(t, y) \in F^{-1}(z)$ és $x_i = p_i\left(u^{-1}(t, y)\right) \in A_i$, ha $1 \le i \le n$. Ez azt jelenti, hogy $F(x_1, \ldots, x_n) = z$, ezt kellett bizonyítani.

4.5. Következmény. *Legyen W nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$-nek és $F : (x, y) \mapsto F(x, y)$ folytonosan differenciálható leképezése W-nek $\mathbb{R}^r$-be. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^r$ és tegyük fel, hogy a B halmaz Baire-tulajdonságú. Ha $(a, b) \in W$,*

$$\det \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \neq 0, \qquad \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

van olyan U környezete a-nak, hogy $U \setminus A$ első kategóriájú, és van olyan V környezete b-nek, hogy $V \setminus B$ első kategóriájú, akkor $F(A, B)$ tartalmazza $F(a, b)$ egy környezetét.

Bizonyítás. Az előző paragrafus 3.12 állításához hasonlóan következik.

Az előző tétel az alábbi globális formában is megfogalmazható:

4.6. Tétel. *Legyen X egy r-dimenziós euklideszi tér, és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ ortogonális alterei X-nek $r_1, \ldots, r_n$ dimenziókkal. Jelölje p_i az X merőleges vetítését X_i-re. Tegyük fel, hogy $r_i \ge 1$, ha $1 \le i \le n$ és $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$. Tegyük fel, hogy U nyílt részhalmaza X-nek és $F : U \to$*

$\mathbb{R}^m$ *folytonosan differenciálható függvény. Ha* $x \in U$, *jelölje* N_x *az* $F'(x)$ *nullterét. Ha* N_x *általános helyzetű, azaz* $\dim N_x = r - m$ *és* $p_i(N_x) = X_i$ *minden* $x \in U$*-ra* $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $A_1 \times \ldots \times A_n \subset U$, *továbbá* A_i *második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz, ha* $1 \leq i \leq n$, *akkor* $F(A_1 \times \ldots \times A_n)$ *tartalmaz egy nem üres nyílt halmazt.*

Bizonyítás. A Baire-tulajdonságú A_i halmaz felírható $U_i \triangle F_i$ alakban, ahol U_i nem üres nyílt halmaz és F_i első kategóriájú. Bármely $a \in U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$-re alkalmazhatjuk az előző tételt.

4.7. Megjegyzés. *Az előző megjegyzést felhasználva, elhagyhatjuk azt a feltételt, hogy* A_1 *Baire-tulajdonságú.*

III. Megoldások korlátossága és folytonossága

5.§ Mérhetőség és korlátosság

A bevezetésben tárgyalt klasszikus módszer lokálisan integrálható, tehát például korlátos, mérhető megoldásokra teszi lehetővé a megoldás folytonosságának bizonyítását. Így szükség volt olyan típusú állításokra, amelyek mérhető megoldások korlátosságát biztosítják. Ilyen típusú tételek találhatók speciális egyenletekre például Vajzovič [163], Daróczy [30], illetve Sander [141] dolgozatában.

Az alábbiakban egy általános tételt bizonyítunk egy függvényegyenlőtlenségre. A tétel először a Járai [66] dolgozatban került publikálásra. Mint a bevezetésben is említettük, a 8. § kényelmesebben használható eredményei miatt az itt tárgyalt tételek használata ma gyakorlatilag csak arra az esetre korlátozódik, amikor a szereplő mértékek nem Radon-mértékek.

5.1. Tétel. *Legyenek T, Y és X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ halmazok, ν és μ_i véges mértékek Y-on illetve X_i-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Legyen $D \subset T \times Y$ és $f : T \to \mathbb{R}$, $f_i : X_i \to \mathbb{R}$, $f_0 : Y \to \mathbb{R}$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $h : D \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) \le h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) minden $k > 0$-hoz van olyan $K > 0$, hogy ha $z_i \le k$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ és $(t, y) \in D$, akkor $h(t, y, z_0, z_1, \ldots, z_n) \le K$;

(3) az f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ függvények mérhetőek;

(4) minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \ge \delta$, ha $1 \le i \le n$, $t \in T$, $B \subset D_t$ és $\nu(B) \ge \varepsilon$;

(5) van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\nu(D_t) \ge \varepsilon$ minden $t \in T$-re.

Ekkor f felülről korlátos T-n.

Bizonyítás. Mivel az

$$\{y : y \in Y, f_0(y) \le k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

halmazok növekvő halmazsorozatot alkotnak, amelynek egyesítése Y, az (5)-ben szereplő $\varepsilon > 0$-hoz van olyan k_0, hogy

$$C_0 = \{y : y \in Y, f_0(y) \le k_0\}$$

jelöléssel $\nu(C_0) \geq \nu(Y) - \varepsilon/2$. Ebből

$$\nu(C_0 \cap D_t) \geq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{minden } t \in T\text{-re.}$$

(4) szerint van olyan $\delta > 0$, hogy $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$, ha $1 \leq i \leq n$, $t \in T$, $B \subset D_t$ és $\nu(B) \geq \varepsilon/(2n)$. Mivel $1 \leq i \leq n$ esetén az

$$\{x : x \in X_i, f_i(x) \leq k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

halmazsorozat mérhető és egyesítése X_i, van olyan k_i, hogy

$$C_i = \{x : x \in X_i, f_i(x) \leq k_i\}$$

jelöléssel $\mu_i(X_i \setminus C_i) < \delta$. Megmutatjuk, hogy a

$$D_t \cap C_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(C_i) \tag{6}$$

halmaz nem üres egyetlen $t \in T$-re sem. Valóban, ha a fenti halmaz üres lenne, akkor a $D_t \cap C_0$ halmazt lefednék a $g_{i,t}^{-1}(X_i \setminus C_i)$ halmazok. Mivel $\nu(C_0 \cap D_t) \geq \varepsilon/2$, valamely $1 \leq i \leq n$-re $\nu\left(g_{i,t}^{-1}(X_i \setminus C_i)\right) \geq \varepsilon/(2n)$. Ebből $\mu_i(X_i \setminus C_i) \geq \delta$ következne, ami ellentmond C_i választásának.

Legyen most k a $k_0, k_1, \ldots, k_n$ számok legnagyobbika, és y a (6) halmaz egy eleme. Ekkor $g_i(t, y) \in C_i$ és így (1) és (2) felhasználásával

$$f(t) \leq h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right) \leq K.$$

5.2. Megjegyzés. Az előző tételt nem csak valós értékű függvények esetén használhatjuk. Például ha az f, f_i függvények értékei félmetrikus terekben vannak, tekinthetjük a függvényértékek eltérését a tér egy rögzített pontjától, és ezekre a valós értékű függvényekre alkalmazhatjuk a tételt. A ν és μ_i mértékek végessége sem jelentős megszorítás: alkalmas, kisebb T, Y, D és X_i halmazokat választva, ennek teljesülése legtöbbször elérhető. Ezeket az észrevételeket használjuk a következő állítás bizonyításához.

5.3. Állítás. *Legyen G egy lokálisan kompakt csoport, H egy metrikus csoport a d bal invariáns távolsággal, $f : G \to H$ pedig egy homomorfizmus. Ha f mérhető a bal Haar-mérték valamely μ-invariáns bővítésére, akkor f minden kompakt halmazon korlátos.*

Bizonyítás. Legyen T egy kompakt részhalmaza G-nek, Y egy kompakt, pozitív mértékű részhalmaza G-nek, $D = T \times Y$ és $X = TY$. Ekkor

$$f(t) = f(ty)f(y)^{-1}, \quad \text{ha} \quad t, y \in D.$$

Bevezetve az $\overline{f}(x) = d\left(e, f(x)\right)$ jelölést, $\overline{f}$ egy μ-mérhető függvény és

$$\overline{f}(t) \leq \overline{f}(ty) + \overline{f}(y), \quad \text{ha} \quad t, y \in D.$$

Alkalmazva az előző tételt, kapjuk, hogy f korlátos T-n.

6.§ Korlátos mérhető megoldások folytonossága

Mint a bevezetésben is kifejtettük, a „korlátos mérhető megoldások folytonosak” típusú eredmények a 8. § újabb, „mérhető megoldások folytonosak” típusú eredményei miatt mára vesztettek jelentőségükből. Így csak két — publikálatlan — eredményt fogunk tárgyalni, a 6.6 tételt, és a 6.8 állítást. Ezeknek az az érdekessége, hogy a Lebesgue-mérték kovariáns, illetve a Haar-mérték invariáns bővítéseire is alkalmazhatók. Megjegyezzük, hogy a Steinhaus-típusú tételek között tárgyalt 3.4 tétel is kapcsolatban áll ezzel a kérdéskörrel, és használható korlátos mérhető megoldások folytonosságának bizonyítására.

Először áttekintünk néhány, a Haar-mérték invariáns, illetve a Lebesgue-mérték kovariáns bővítésére vonatkozó eredményt. A részletes tárgyalás a Járai [68] dolgozatban található.

Kakutani és Oxtoby 1950-ben bebizonyította [105], hogy a $\mathbb{T}$ komplex egységkörön a Haar-mérték bővíthető egy olyan invariáns mértékké, amelyre a megfelelő $\mathbf{L}^2$-tér Hilbert-tér dimenziója $2^{\mathfrak{c}}$, ahol $\mathfrak{c} = \operatorname{card}(\mathbb{T})$, a kontinuum számosság. Ugyanez az állítás igaz minden kompakt metrikus csoporton (lásd Hewitt és Ross [52], 16. §).

Másrészt, felhasználva Kakutani és Kodaira eredményét [106], 1959-ben Hulanicki [60] megmutatta, hogy $2^{\mathfrak{c}}$ nem folytonos karakter tehető egyszerre mérhetővé az egységkörön a Haar-mérték egy megfelelő bővítésével. Ezt az eredményt Itzkowitz [61] összefüggő kompakt végtelen Abel-csoportra, Hewitt és Ross [54] pedig tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoportra terjesztette ki, megmutatva, hogy bármely G végtelen lokálisan kompakt Abel-csoport esetén $2^{\operatorname{card}(G)}$ karakter tehető egyszerre mérhetővé a Haar-mérték egy alkalmas invariáns bővítésével.

Az [68] dolgozatban a szerző Kakutani és Oxtoby eredményét általánosította tetszőleges lokálisan kompakt csoportra. A bizonyítás egy absztrakt bővítési tételen múlik, mely szerint egy adott véges mérték úgy bővíthető egy sokkal bővebb mértékké, hogy a bővített mérték transzformációk egy adott osztályára ugyanolyan transzformációs tulajdonságoknak tesz eleget, mint az eredeti mérték. Az eredmények ismertetéséhez két fogalomra lesz szükségünk.

6.1. Definíció. A μ mértéket *J-kovariáns*nak nevezzük, ha adott τ leképezések egy T halmaza, minden $\tau \in T$ egy μ-mérhető halmazt képez le X-be, és minden $\tau \in T$-hez hozzá van rendelve egy $J(\tau)$ bővített valós értékű μ-mérhető függvény, amely teljesíti az alábbi feltételt:

(1) az $N(\tau|A, y)$ multiplicitás függvény μ-mérhető és

$$\int_A J(\tau)(x)d\mu(x) = \int_X N(\tau|A, y)d\mu(y)$$

minden μ-mérhető A halmaz és $\tau \in T = \operatorname{dmn} J$ esetén.

Ha minden $\tau \in T$-re τ kölcsönösen egyértelmű és a $J(\tau)$ függvény μ-majdnem mindenütt megegyezik $\operatorname{dmn}\tau$ karakterisztikus függvényével, akkor a μ mértéket *T-invariáns*nak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha a T minden τ eleme kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor az (1) feltétel ekvivalens az alábbi feltétellel:

(2) a $\tau(A)$ halmaz μ-mérhető és $\mu(\tau(A)) = \int_A J(\tau)\,d\mu(x)$ minden μ-mérhető A és $\tau \in T$-re.

Ebből, ha T minden τ eleme kölcsönösen egyértelmű, akkor μ pontosan akkor T-invariáns, ha

(3) a $\tau(A)$ halmaz μ-mérhető és $\mu(\tau(A)) = \mu(A)$, valahányszor az A halmaz μ-mérhető, $\tau \in T$ és $A \subset \operatorname{dmn}\tau$.

6.2. Példák. (1) Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és legyen μ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^n$-en, T pedig az $\mathbb{R}^n$ összes eltolásainak csoportja. Ekkor a μ mérték T-invariáns. Ebben az esetben minden $\tau \in T$-re és minden $x \in \mathbb{R}^n$-re

$$J(\tau)(x) = 1.$$

(2) Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és legyen μ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^n$-en, T pedig az $\mathbb{R}^n$ összes önmagába való lineáris leképezéseinek halmaza. Ha

$$J(\tau)(x) = |\det\tau|$$

minden $x \in \mathbb{R}^n$-re és $\tau \in T$-re, akkor a μ mérték J-kovariáns.

(3) Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és legyen μ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^n$-en, T pedig az összes olyan folytonosan differenciálható τ függvények halmaza, amelyek $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazát képezik le $\mathbb{R}^n$-be. Legyen $J(\tau)(x)$ a τ függvény x pontban vett Jacobi-determinánsának abszolút értéke, ha $x \in \operatorname{dmn}\tau$, és legyen 0, ha $x \notin \operatorname{dmn}\tau$. Ekkor a μ mérték J-kovariáns.

6.3. Megjegyzés. Ha μ egy J-kovariáns mérték, akkor minden nemnegatív μ-integrálható f függvényre teljesül az alábbi integráltranszformációs formula:

(1) minden $\tau \in \operatorname{dmn} J$-re az $y \mapsto \sum_{x\in\tau^{-1}\{y\}} f(x)$ függvény μ-mérhető és

$$\int_X f(x)J(\tau)(x)\,d\mu(x) = \int_X \Bigg(\sum_{x\in\tau^{-1}\{y\}} f(x)\Bigg)\,d\mu(y).$$

Ez az állítás nyilvánvaló abban az esetben, amikor f az X egy μ-mérhető részhalmazának a karakterisztikus függvénye. Innen, karakterisztikus függvények lineáris kombinációival történő approximációt használva, kapjuk nemnegatív integrálható függvényekre.

Absztrakt bővítési tételünk a következő:

6.4. Tétel. *Legyen μ egy J-kovariáns véges mérték X-en, $\mu(X) > 0$, és tegyük fel, hogy $T = \operatorname{dmn} J$ minden eleme kölcsönösen egyértelmű. Tegyük fel, hogy valamely $\mathfrak{n}$ végtelen számosságra és 2^X valamely $\mathcal{F}$ részhalmazára teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) $\operatorname{card}(X) = 2^{\mathfrak{n}}$;

(2) $\operatorname{card}(T) \le 2^{\mathfrak{n}}$;

(3) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) \le 2^{\mathfrak{n}}$ *és minden* μ*-mérhető* A *halmazhoz, amelyre* $\mu(A) > 0$, *létezik olyan* $F \in \mathcal{F}$ *halmaz, amelyre* $\operatorname{card}(F) = 2^{\mathfrak{n}}$ *és* $F \subset A$.

Ekkor létezik $2^{2^{\mathfrak{n}}}$ *súlyú* J*-kovariáns* ν *bővítése* μ*-nek.*

A bizonyítás Kakutani és Oxtoby módszerén alapul. A lényeges különbség abban van, hogy teljesen kiküszöböljük az eredeti verzió topológiai természetét. Ez lehetővé teszi, hogy tisztán halmazelméleti és mértékelméleti eszközöket használjunk. A bizonyítás felhasználja a kiválasztási axiómát, de nem használja a kontinuum hipotézist.

A Haar-mértékre vonatkozó bővítési tétel a következő:

6.5. Tétel. *Legyen* G *lokálisan kompakt nem diszkrét csoport, és jelöljön* λ *egy bal Haar-mértéket* G*-n. Legyen* Δ *a* G *moduláris függvénye, és* $\mathfrak{n}$ *a* G *topologikus tér karaktere. Ekkor* λ*-nak (melynek karaktere* $\mathfrak{n}$*) van olyan* κ *bővítése, amelynek karaktere* $2^{2^{\mathfrak{n}}}$, *és ha* $z \in G$ *és a* K *halmaz* κ*-mérhető, akkor*

(1) zK *is* κ*-mérhető és* $\kappa(zK) = \kappa(K)$;

(2) Kz *is* κ*-mérhető és* $\kappa(Kz) = \Delta(z)\kappa(K)$;

(3) K^{-1} *is* κ*-mérhető és* $\kappa(K^{-1}) = \int_K 1/\Delta(z)\, d\kappa(z)$.

A bizonyítás a fenti absztrakt bővítési tételen múlik.

Az absztrakt bővítési tétel másik alkalmazásaként megmutattam, hogy az n-dimenziós euklidészi téren a Lebesgue-mérték egy olyan mértékké bővíthető, amelyre a megfelelő $\mathbf{L}^2$-tér Hilbert-tér dimenziója $2^{\mathfrak{c}}$ és differenciálható koordináta-transzformációknál ugyanúgy transzformálódik, mint a Lebesgue-mérték, azaz J-kovariáns a 6.2.(3) példában szereplő J-vel. Ez tulajdonképpen egy, a Lebesgue-mérték kovariáns bővítéseire vonatkozó általánosabb tétel speciális esete. Hasonló állítás igaz sokaságokon: lásd a habilitációs értekezésemet: [85], 5. §.

6.6. Tétel. *Legyenek* n, k, $m_1, \dots, m_n$ *és* s *pozitív egészek. Legyen* X_i *az* $\mathbb{R}^k$*-nak,* T *és* Y *az* $\mathbb{R}^s$*-nek,* Z_i *az* $\mathbb{R}^{m_i}$*-nek,* D *pedig* $T \times Y$*-nak nyílt részhalmaza, és legyen* Z *egy euklidészi tér. Tekintsük az* $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h_i : D \times Z_i \to Z$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *és* $h_0 : D \to Z$ *függvényeket. Legyen* J *a 6.2.(3) példában adott leképezés, és* μ *a Lebesgue-mérték* J*-kovariáns bővítése* $\mathbb{R}^k$*-n. Tegyük fel, hogy* $(t_0, y_0) \in D$, *és*

(1) *minden* $(t, y) \in D$*-re*

$$f(t) = h_0(t, y) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t, y, f_i(g_i(t, y)));$$

(2) h_i *folytonos* $(i = 0, 1, \dots, n)$;

(3) *az* f_i *függvény* μ*-mérhető és korlátos* X_i*-n;*

(4) g_i *kétszer folytonosan differenciálható és*

$$\frac{\partial g_i}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ekkor f *folytonos a* t_0 *egy környezetében.*

Bizonyítás. Koordinátákra áttérve feltehetjük, hogy $Z = \mathbb{R}$. Válasszunk egy K kompakt halmazt, amely környezete y_0-nak, és egy V kompakt lezártú nyílt halmazt, amely környezete t_0-nak úgy, hogy $\overline{V} \times K \subset D$ teljesüljön. Ha $t \in V$, integrálva K felett,

$$f(t)\mu(K) = \int_K h_0(t, y)\, d\mu(y) + \sum_{i=1}^n \int_K h_i(t, y, f_i(g_i(t, y)))\, d\mu(y).$$

Mivel $\mu(K) \neq 0$, azt kell megmutatni, hogy a jobb oldalon álló integrálok folytonos függvényei t-nek. Ez az első integrál esetében nyilvánvaló, mert h_0 egyenletesen folytonos $\overline{V} \times K$-n. Elhagyva az indexeket, azt kell megmutatnunk, hogy

$$F(t) = \int_K h\,(t, y, f\,(g(t, y)))\; d\mu(y)$$

folytonos V-n, ha V és K elég kicsik. Az $y = g_t^{-1}(x)$ helyettesítéssel, felhasználva a μ mérték J-kovariáns voltát, azt kapjuk, hogy

$$F(t) = \int_{g_t(K)} h\left(t, g_t^{-1}(x), f(x)\right)(Jg_t^{-1}))(x)\, d\mu(x),$$

ha $t \in \overline{V}$. Mivel g folytonos a $\overline{V} \times K$ kompakt halmazon, azt egy C kompakt halmazra képezi le. Mivel $g_t^{-1}(x)$ és $(Jg_t^{-1})(x)$ folytonosak a $\overline{V} \times C$ halmazon, ott korlátosak és egyenletesen folytonosak is. Mivel f értékkészlete egy kompakt L halmazban marad, h pedig egyenletesen folytonos a $\overline{V} \times K \times L$ halmazon, azt kapjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$H(t, x) = h\left(t, g_t^{-1}(x), f(x)\right)(Jg_t^{-1}(x))$$

jelöléssel

$$|H(t, x) - H(t', x)| < \varepsilon,$$

ha $t, t' \in \overline{V}$, $|t - t'| < \delta$ és $x \in g_t(K) \cap g_{t'}(K)$, továbbá van olyan $M > 0$, hogy

$$|H(t, x)| \leq M, \quad \text{ha} \quad t \in \overline{V} \quad \text{és} \quad x \in g_t(K).$$

Ebből

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t')| \leq &\int_{g_t(K) \cap g_{t'}(K)} |H(t, x) - H(t', x)|\, d\mu(x) \\ &+ \int_{g_t(K) \setminus g_{t'}(K)} |H(t, x)|\, d\mu(x) + \int_{g_{t'}(K) \setminus g_t(K)} |H(t', x)|\, d\mu(x) \\ &\leq \varepsilon\mu(C) + M\lambda^k\left(g_t(K) \mathbin{\triangle} g_{t'}(K)\right). \end{aligned}$$

Az M szorzója 3.6 szerint tart nullához, ha $t \to t'$, amiből következik az állítás.

6.7. Megjegyzés. Az előző tételben a $h_1, \dots, h_n$ függvények összege nem helyettesíthető egy n-változós h függvénnyel. Sőt, az összeadás még a komplex szorzással sem helyettesíthető. Valóban, Hewitt és Ross [54] bővítési tétele szerint, egy G nem diszkrét lokálisan kompakt Abel-csoport (például $\mathbb{R}$) igen sok nem folytonos $f : G \to \mathbb{T}$ homomorfizmusa, azaz karaktere tehető egyidejűleg mérhetővé a Haar-mérték alkalmas invariáns kiterjesztésével. $\mathbb{R}^n$-beli értékű homomorfizmusokra ez nem igaz, mint az alábbi állítás mutatja.

6.8. Állítás. *Legyen G lokálisan kompakt csoport, és $f : G \to \mathbb{R}^n$ egy homomorfizmus, amely mérhető a bal Haar-mérték egy μ bal invariáns bővítésére nézve. Ekkor f folytonos.*

Bizonyítás. Az előző paragrafus eredményei szerint f lokálisan korlátos. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan eljárva, az $f(t) = f(ty) - f(y)$ egyenlet mindkét oldalát integrálva egy pozitív mértékű kompakt K halmaz felett,

$$\begin{aligned} f(t)\mu(K) &= \int_K f(ty)\, d\mu(y) - \int_K f(y)\, d\mu(y) \\ &= \int_{t^{-1}K} f(y)\, d\mu(y) - \int_K f(y)\, d\mu(y). \end{aligned}$$

A

$$t \mapsto \int_{t^{-1}K} f(y)\, d\mu(y)$$

leképezés folytonos, mivel

$$\begin{aligned} \left| \int_{t^{-1}K} f(y)\, d\mu(y) - \int_{t_0^{-1}K} f(y)\, d\mu(y) \right| &\le \int_{t^{-1}K \triangle t_0^{-1}K} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\le M\lambda(t^{-1}K \triangle t_0^{-1}K) = M\left(2\lambda(K) - 2\lambda(t^{-1}K \cap t_0^{-1}K)\right), \end{aligned}$$

ahol λ egy Haar-mérték. A jobb oldalon zárójelben álló kifejezés folytonosan függ t-től, és nulla, ha $t = t_0$, így f folytonos.

7.§ Mazur egy problémájáról

1935 körül S. Mazur a következő problémát vetette fel (Problem 24 a „The Scottish Book"-ban [128]): Legyen adva egy X (valós) Banach-téren egy f additív funkcionál az alábbi tulajdonsággal:

(P) minden X-beli g görbére, $f \circ g$ Lebesgue-mérhető.

Igaz-e, hogy f folytonos? 1984-ben Labuda és Mauldin [117] megmutatták, hogy a válasz igen, általánosabban, ha f egy additív operátor, amely X-et egy Hausdorff topologikus vektortérbe képezi és rendelkezik a (P) tulajdonsággal, akkor f folytonos. Az eredményt Lipecki [122] kiterjesztette arra az esetre, amikor X és Y kommutatív Hausdorff topologikus csoportok, X metrizálható, összefüggő, lokálisan ívszerűen összefüggő és teljes. Később sokkal általánosabb függvényegyenleteket vizsgáltak. Roman Ger-nek [47] hasonló eredményei vannak (P) tulajdonságú Jensen konvex függvényekre vonatkozóan, Székelyhidi Lászlónak [156] pedig exponenciális polinomokkal kapcsolatban.

Ennek a pontnak a célja, hogy megmutassuk, a (P) tulajdonság topologikus terek egy széles osztályára egy sokkal szokásosabb mérhetőségi feltétellel, az univerzális mérhetőséggel ekvivalens (Járai [77]). Ez az eredmény lehetővé teszi, hogy „mérhetőségből következik a folytonosság" típusú tételek felhasználásával „a (P) tulajdonságból következik a folytonosság" típusú eredményeket kapjunk. Világos, hogy ezen a területen még sok minden tisztázatlan, de az alábbi eredmények mutatják a két kérdés szoros összefüggését, és így további vizsgálatok kiindulópontjaként szolgálhatnak. Speciálisan, egy régebbi tételt felhasználva Schwartz [148] könyvéből, következményként kapjuk Labuda és Mauldin eredményét (lásd 7.5).

7.1. Definíció. Jelölje egy μ mértékre $\mathcal{M}_\mu$ a μ-mérhető halmazok osztályát. Egy X topologikus térre legyen

$$\mathcal{U}_X = \bigcap \{\mathcal{M}_\mu : \mu \text{ Borel-reguláris mérték } X\text{-en}\},$$

az X *univerzálisan mérhető* részhalmazainak osztálya. Hasonlóan, ha X Hausdorff-tér, legyen

$$\mathcal{R}_X = \bigcap \{\mathcal{M}_\mu : \mu \text{ Radon-mérték } X\text{-en}\}$$

az X *univerzálisan Radon-mérhető* részhalmazainak osztálya. Ezekben a definíciókban a „Borel-reguláris mérték" illetve „Radon-mérték" kifejezés „diffúz Borel-reguláris valószínűségi mérték" illetve "diffúz Radon valószínűségi mérték" kifejezéssel helyettesíthető. Ha X teljes szeparábilis metrikus tér, akkor $\mathcal{R}_X = \mathcal{U}_X$. Általánosabb eredmények találhatók Schwartz [148] könyvében, 117–130. o.; lásd még Federer [42], 2.2.16.

Legyen

$$\mathcal{P}_X = \{A : A \subset X, g^{-1}(A) \text{ Lebesgue-mérhető minden } X\text{-beli } g \text{ görbére}\}.$$

Triviális, hogy $\mathcal{P}_X$ egy σ-algebra, és ha $f : X \to Y$ egy függvény, amely X-et egy Y topologikus térbe képezi le, akkor az hogy $f^{-1}(V) \in \mathcal{P}_X$ az Y minden V nyílt részhalmazára akkor és csak akkor áll fönn, ha minden X-beli $g : [a,b] \to X$ görbére az $f \circ g$ függvény $\lambda_{[a,b]}$-mérhető. Így csak a $\mathcal{P}_X$ és más σ-algebrák közötti összefüggést kell vizsgálnunk. Nyilván $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{P}_X$, ahol $\mathcal{B}_X$ jelöli az X Borel-halmazainak osztályát. Általánosabban, teljesül az alábbi tétel.

7.2. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, ha X Hausdorff-tér, akkor $\mathcal{R}_X \subset \mathcal{P}_X$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A egy részhalmaza X-nek, amelyre $A \notin \mathcal{P}_X$. Ekkor létezik egy $g : [a,b] \to X$ görbe, amelyre $g^{-1}(A)$ nem Lebesgue-mérhető. Legyen $\mu = g_\#(\lambda_{[a,b]})$. A 2.2.17, 2.1.5(4) eredményeket felhasználva Federer [42]-ből, kapjuk, hogy μ Radon-mérték, de A nem lehet μ-mérhető.

A megfordítás nem igaz minden Hausdorff-térben. Nyilván, ha X teljesen széteső, akkor $\mathcal{P}_X$ az X összes részhalmazából áll. Így valamilyen összefüggőségi tulajdonságra szükség van. Hogy a megfordítást a legfontosabb esetekre bebizonyítsuk, egy lemmára lesz szükségünk. Ez a lemma többé-kevésbé ekvivalens Marczewski egy tételével, amelyet lengyelül publikált (lásd [117] és [122]).

7.3. Lemma. *Legyen μ egy diffúz Radon valószínűségi mérték az X teljes metrikus téren. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan C kompakt részhalmaza $[0,1]$-nek és olyan $g : C \to g(C) \subset X$ homeomorfizmus, hogy g mértéktartó C és $g(C)$ között, azaz $g_\#(\lambda_C) = \mu\lfloor g(C)$, továbbá $1 > \mu(g(C)) > 1-\varepsilon$.*

Bizonyítás. Jelölje $G(x,r)$ a nyílt, $B(x,r)$ a zárt gömböt x középponttal és r sugárral. Legyen t_n egy szigorúan monoton csökkenő sorozat, amely 1-hez tart. Válasszunk egy $K \subset X$ kompakt halmazt, amelyre $1 > \mu(K) > 1 - \varepsilon/2$. Feltehetjük, hogy $\operatorname{spt}(\mu\lfloor K) = K$. Egy rögzített $x \in K$-ra az $r \mapsto \mu(K \cap B(x,r))$ függvény pozitív minden pozitív r-re, monoton növekedő, és 0-hoz tart, ha r tart 0-hoz. Így választhatunk egy $0 < r_x < 1/2$ számot, amelyre a függvény folytonos az r_x pontban, és kisebb az értéke mint $\frac{1}{2}\mu(K)$. Kiválasztva egy véges lefedést a $G(x,r_x)$, $x \in K$ nyílt lefedésből, olyan x_i pontokat és $r_i = r_{x_i}$ sugarakat kapunk, amelyekre

$$\mu(K \cap B(x_i,r_i)) < \frac{1}{2}\mu(K) \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Továbbá, választhatunk olyan $r_i' > r_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ sugarakat, amelyekre

$$\mu(K \cap G(x_i,r_i')) < \mu(K \cap B(x_i,r_i)) + \frac{\varepsilon}{2^2 n}.$$

Legyen $K_1 = K \cap B(x_1,r_1)$, és indukcióval legyen

$$K_i = (K \setminus (\cup_{j<i} G(x_j,r_j'))) \cap B(x_i,r_i) \quad \text{ha } i = 2,3,\ldots,n.$$

Ha a K_i halmazok valamelyike nulla mértékű, hagyjuk el, csökkentve n-et. Végül, legyen

$$K^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

Nyilván a K_i halmazok 1-nél kisebb átmérőjű diszjunkt kompakt halmazok, minden i-re a $0 < \mu(K_i) < 1/2$ egyenlőtlenség teljesül, $K^{(1)} \subset K$ és $\mu(K \setminus K^{(1)}) < \varepsilon/2^2$. Válasszunk diszjunkt zárt C_i, $i = 1, 2, \dots, n$ intervallumokat $[0,1]$-ben úgy, hogy $\mu(K_i) < \lambda(C_i) < t_1\mu(K_i)$ teljesüljön, ha $i = 1, 2, \dots, n$.

A második lépésben ismételjük meg ezt az eljárást minden K_i-re K helyett. Így olyan

$$K_{i,1}, K_{i,2}, \dots, K_{i,n_i}, \qquad n_i > 1$$

diszjunkt kompakt részhalmazait kapjuk K_i-nek, amelyek átmérője kisebb, mint 1/2, mértékük pozitív, de legfeljebb 1/4 és a

$$K^{(2)} = \bigcup_{i_1=1}^{n} \bigcup_{i_2=1}^{n_{i_1}} K_{i_1,i_2}$$

jelöléssel $K^{(2)} \subset K^{(1)}$ és $\mu(K^{(1)} \setminus K^{(2)}) < \varepsilon/2^3$. A C_i megfelelő

$$C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,n_i}$$

zárt részintervallumait megválaszthatjuk úgy, hogy

$$\mu(K_{i_1,i_2}) < \lambda(C_{i_1,i_2}) < t_2\mu(K_{i_1,i_2})$$

teljesüljön. Legyen

$$C^{(2)} = \bigcup_{i_1=1}^{n} \bigcup_{i_2=1}^{n_{i_1}} C_{i_1,i_2}.$$

Indukcióval folytatva ezt az eljárást, a

$$K_{i_1,i_2,\dots,i_k} \quad \text{és} \quad C_{i_1,i_2,\dots,i_k}$$

halmazrendszereket és a $K^{(k)}$ és $C^{(k)}$ halmazokat kapjuk. Legyen

$$K_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} K^{(k)}, \qquad C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^{(k)}$$

Minden $x \in C$ pontnak egyértelműen megfelel egy

$$i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, \qquad 1 \le i_k \le n_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}$$

sorozat, és hasonlóan, minden $y \in K_\infty$-nek is egyértelműen megfelel egy ilyen sorozat. Legyen $g(x) = y$, ha a megfelelő sorozatok megegyeznek.

g folytonosságának bizonyításához legyen $\eta > 0$. Ha $1/2^{k-1} < \eta$ és δ a minimális távolság a $C_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ halmazok között, akkor $|x - x'| < \delta$ esetén $g(x)$ és $g(x')$ ugyanabban a $K_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ halmazban vannak, így távolságuk kisebb, mint η.

Ha $\eta > 0$ és $t_k/2^k < \eta$, jelölje δ a minimális távolságot a $K_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ halmazok között. Ha a távolság $g(x)$ és $g(x')$ között kisebb, mint δ, akkor x és x' ugyanabban a $C_{i_1,i_2,\dots,i_k}$halmazban vannak, így $|x - x'| < \eta$ és g^{-1} is folytonos.

Hogy megmutassuk, $g_\#(\lambda_C) = \mu\lfloor g(C)$, elég megmutatni, hogy

$$\lambda(C \cap C_{i_1,\dots,i_k}) = \mu(K_\infty \cap K_{i_1,\dots,i_k}),$$

mivel C és $g(C)$ minden nyílt részhalmaza megkapható, mint C illetve $g(C)$ ezen nyílt részhalmazainak diszjunkt megszámlálható uniója, a mértékek pedig Radon-mértékek. De a fenti egyenlőség következik abból, hogy

$$\lambda(C \cap C_{i_1,\dots,i_k}) = \lim_{l\to\infty} \sum_{i_{k+1},\dots,i_l} \lambda(C_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1},\dots,i_l}),$$

$$\mu(K_\infty \cap K_{i_1,\dots,i_k}) = \lim_{l\to\infty} \sum_{i_{k+1},\dots,i_l} \mu(K_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1},\dots,i_l}),$$

és

$$\mu(K_{i_1,\dots,i_l}) < \lambda(C_{i_1,\dots,i_l}) < t_l \mu(K_{i_1,\dots,i_l}).$$

7.4. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, ha X teljes, összefüggő és lokálisan ívszerűen összefüggő metrikus tér, akkor $\mathcal{P}_X \subset \mathcal{R}_X$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A olyan részhalmaza X-nek, amelyre $A \notin \mathcal{R}_X$. Megmutatjuk, hogy $A \notin \mathcal{P}_X$. Válasszunk egy diffúz Radon valószínűségi mértéket, amelyre $A \notin \mathcal{M}_\mu$. Jelölje A' az A komplementerét. Ekkor $\mu(A) + \mu(A') > \mu(X) = 1$. Válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, amelyre $\mu(A) + \mu(A') > 1 + 2\varepsilon$. Lemmánk szerint létezik egy g mértéktartó homeomorfizmusa a $[0,1]$ egy $1-\varepsilon$-nál nagyobb Lebesgue mértékű C kompakt részhalmazának $K = g(C) \subset X$-re. Egy ismert tétel szerint (Kuratowski [116], §50, Theorem 5) g kiterjeszthető egy h görbévé, amely $[0,1]$-et X-re képezi le. Nyilván $h_\#(\lambda\lfloor C) = g_\#(\lambda_C) = \mu\lfloor K$. A K mérhetősége miatt $\mu(A) = \mu(A \cap K) + \mu(A \setminus K)$, így $\mu(A \cap K) > \mu(A) - \varepsilon$. Hasonlóan $\mu(A' \cap K) > \mu(A') - \varepsilon$. Ez azt mutatja, hogy A nem $\mu\lfloor K$-mérhető. Federer [42] könyvének 2.1.2 pontja szerint $h^{-1}(A)$ pontosan akkor λ-mérhető, ha az A halmaz $h_\#(\lambda\lfloor B)$-mérhető X minden B részhalmazára, ami itt nem teljesül, ha $B = C$. Így $A \notin \mathcal{P}_X$.

7.5. Következmény. *Mazur problémájára a válasz pozitív, azaz ha egy X (valós) Banach-tér egy f additív funkcionáljára $f \circ g$ minden $g : [a,b] \to X$ folytonos függvényre Lebesgue-mérhető, akkor f folytonos.*

Bizonyítás. Az előző definíció jelöléseivel, az előző tételből következik, hogy f univerzálisan Radon-mérhető. Mivel minden $x \in X$-re $t \mapsto f(tx)$ Lebesgue-mérhető és eleget tesz a Cauchy-egyenletnek, így tehát folytonos, kapjuk, hogy f homogén. Schwartz [148] könyvének egyik tétele (157. o.) szerint, egy Banach-tér egy lineáris és univerzálisan Radon-mérhető funkcionálja folytonos is. Ezt felhasználva kapjuk, hogy f folytonos.

7.6. Megjegyzés. Az előző következmény kiterjeszthető olyan additív operátorokra, amelyek egy (valós) ultrabornologikus topologikus vektorteret képeznek egy (valós) lokálisan konvex Hausdorff topologikus vektortérbe, ha felhasználjuk Schwartz [148] könyvében a 159. oldalon szereplő bizonyítás gondolatait.

8.§ Mérhetőség és folytonosság

Számos dolgozat foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy függvényegyenletek megoldásainak mérhetőségéből hogyan következtethetünk a megoldások folytonosságára. A számos, egy–egy egyenlet mérhető megoldásainak meghatározásával foglalkozó dolgozaton kívül, többé vagy kevésbé általános egyenlettípussal foglalkoznak a következő dolgozatok: Baker [21], Itzkowitz [62], Paganoni [133] és Sander [142].

Az ezen pontban általunk tárgyalt, igen általános egyenlettípusra vonatkozó eredményekből ezen eredmények jelentős része megkapható, és alkalmazásukkal számos új eredményt sikerült elérni: lásd az utolsó fejezetet. Ezek az eredmények a Járai [66], [67], [72] dolgozatokban kerültek publikálásra. További hivatkozásokat illetően lásd ezeket, valamint a fentebb említett dolgozatokat.

8.1. Tétel. *Legyen Z egy teljesen reguláris tér, Z_0 egy σ-kompakt teljesen reguláris tér, és legyenek Z_i, $i = 1, 2, \dots, n$ megszámlálható bázisú teljesen reguláris terek. Legyenek X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ és Y lokálisan kompakt terek, T tetszőleges topologikus tér. Legyen ν Radon-mérték Y-on, és μ_i Radon-mérték X_i-n, $i = 1, 2, \dots, n$. Tegyük fel, hogy $\nu(Y) < \infty$, $\mu_i(X_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, és legyen D egy részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \dots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ függvényeket. Legyen t_0 egy rögzített eleme T-nek, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \dots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) h folytonos;

(3) az f_i függvény μ_i-mérhető X_i-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(4) g_i folytonos D-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(5) D_t mérhető és létezik olyan $\eta > 0$, hogy $\nu(D_t \cap D_{t_0}) \geq \eta$ minden $t \in T$-re;

(6) minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, amelyre $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$, ha $B \subset D_t$ $\nu(B) \geq \varepsilon$, $t \in T$, és $1 \leq i \leq n$.

Ekkor f folytonos a t_0 pontban.

Bizonyítás. (5) szerint, létezik olyan $\eta > 0$, amelyre $\nu(D_t \cap D_{t_0}) \geq \eta$ minden $t \in T$-re. Legyen C egy olyan kompakt részhalmaza D_{t_0}-nak, amelyre $\nu(C) > \nu(D_{t_0}) - \eta/4$. Legyen $\varepsilon = \eta/(8n)$. Felhasználva (6)-ot, egy olyan $\delta > 0$-t kapunk, amelyre $1 \leq i \leq n$, $t \in T$, $B \subset D_t$ és $\nu(B) \geq \eta/(8n)$

esetén $\mu_i(g_{i,t}(B)) \geq \delta$. A Luzin-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik olyan C_i kompakt részhalmaza X_i-nek, amelyre $\mu_i(X_i \setminus C_i) < \delta$ és $f_i|C_i$ folytonos. Innen a $g_{i,t}^{-1}(X_i \setminus C_i)$ nyílt halmaz mértéke kisebb, mint $\eta/(8n)$, ha $1 \leq i \leq n$ és $t \in T$. Tekintsük most a

$$\begin{aligned} &C \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(C_i)\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(C_i)\Big) \\ &\quad = (D_t \cap C) \setminus \left(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(X_i \setminus C_i)\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(X_i \setminus C_i)\Big)\right) \end{aligned}$$

halmazt. Ez Y mérhető részhalmaza, és a mértéke nagyobb, mint $\eta/2$.

Legyen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ kompakt halmazok egy növekvő sorozata a Z_0 térben, amelyre $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = Z_0$. Ekkor

$$\lim_{i\to\infty} \nu\left(f_0^{-1}(B_i)\right) = \nu(Y) < \infty,$$

és egy alkalmas i-re a $C_0 = B_i$ kompakt halmazra

$$\nu\left(f_0^{-1}(C_0)\right) > \nu(Y) - \frac{\eta}{2}.$$

Összevetve ezt az eddig bizonyítottakkal, látjuk, hogy a

$$C \cap f_0^{-1}(C_0) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(C_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(C_i)\right) \tag{7}$$

halmaz nem üres, ha $t \in T$.

Tekintsünk a Z, Z_0, Z_i, X_i és Y tereken a topológiával összeférhető uniformitásokat. Legyen α egy reláció a Z uniformitásából, és tekintsük a

$$C \times C_0 \times f_1(C_1) \times \ldots \times f_n(C_n)$$

kompakt halmazt. (2) és a 3.3 segédtétel szerint t_0-nak létezik olyan V' környezete, és léteznek olyan $\beta_1, \ldots, \beta_n$ uniform környékek, hogy a

$$h(t, y, f_0(y), z_1, \ldots, z_n) \quad \text{és} \quad h(t_0, y, f_0(y), z_1', \ldots, z_n')$$

pontok α-közel vannak, ha $t \in V'$, $(t,y) \in D$, $y \in C$, $f_0(y) \in C_0$, továbbá $z_i, z_i' \in f_i(C_i)$, és a z_i, z_i' pontok β_i-közel vannak, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Most vegyük észre, hogy f_i egyenletesen folytonos C_i-n, mivel C_i kompakt. Ezért létezik olyan γ uniform környék, hogy az $f_i(x_i)$ és $f_i(x_i')$ pontok β_i-közel vannak, ha $x_i, x_i' \in C_i$ és az x_i, x_i' pontok γ-közel vannak. (4) és a 3.3 segédtétel szerint t_0-nak létezik olyan $V \subset V'$ környezete, amelyre a $g_i(t,y)$ és $g_i(t_0, y)$ pontok γ-közel vannak, ha $t \in V$, $(t,y) \in D$ és $y \in C$.

Legyen $t \in V$. Válasszunk egy tetszőleges y elemet a (7) halmazból. Ekkor azt kapjuk, hogy $(t,y) \in D$, $(t_0, y) \in D$, $f_0(y) \in C_0$, $g_i(t,y) \in C_i$ és $g_i(t_0,y) \in C_i$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Így az $f_i(g_i(t,y))$ és $f_i(g_i(t_0,y))$ pontok β_i-közel vannak, amiből

$$h(t, y, f_0(y), f_1(g_1(t,y)), \ldots, f_n(g_n(t,y)))$$

és

$$h(t_0, y, f_0(y), f_1(g_1(t_0,y)), \ldots, f_n(g_n(t_0,y)))$$

α-közel vannak. Ez azt mutatja, hogy az $f(t)$ és $f(t_0)$ pontok α-közel vannak, ha $t \in V$, azaz f folytonos t_0-ban.

8.2. Tétel. *Legyen Z egy teljesen reguláris tér, Z_0 egy σ-kompakt teljesen reguláris tér, Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ megszámlálható bázisú teljesen reguláris tér, Y és X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lokálisan kompakt terek, T tetszőleges topologikus tér. Tegyük fel, hogy $D \subset T \times Y$. Legyenek $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvények, ν Radon-mérték Y-on, μ_i pedig Radon-mérték X_i-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) h folytonos;

(3) az f_i függvény μ_i-mérhető az A_i részhalmazán X_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) g_i folytonos D-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(5) léteznek olyan V és K halmazok, hogy V nyílt, K kompakt, $V \times K \subset D$, $t_0 \in V$, $\nu(K) > 0$ és $K \subset \cap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$;

(6) minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $B \subset K$ és $\nu(B) \geq \varepsilon$ esetén $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$, ha $1 \leq i \leq n$ és $t \in V$.

Ekkor f folytonos a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Ezt a tételt az előző tételre fogjuk visszavezetni, D-t egy alkalmas kisebb D^*-gal helyettesítve. Válasszunk $\nu(K)/(4n)$-hez $\delta > 0$-t, legyen $X_i^* = g_{i,t_0}(K)$ és W_i egy kompakt lezártú nyílt halmaz, amely tartalmazza X_i^*-ot, és amelyre $\mu_i(W_i \setminus X_i^*) < \delta$. A 3.3 segédtétel szerint választhatunk olyan $T^* \subset V$ nyílt környezetét t_0-nak, amelyre $g_{i,t}(K) \subset W_i$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$ és $t \in T^*$. Legyen $Y^* = K$, $\eta^* = \nu(K)/2$ és t_0^* egy tetszőleges eleme T^*-nak,

$$D^* = \left\{(t^*, y^*) : t^* \in T^* \quad \text{és} \quad y^* \in \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t^*}^{-1}(X_i^*) \cap Y^*\right\},$$

$$Z_i^* = Z_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad Z^* = Z, \quad f^* = f|T^*, \quad f_0^* = f_0|Y^*,$$

$$g_i^* = g_i|D, \quad f_i^* = f_i|X_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad h^* = h|D^* \times Z_0^* \times Z_1^* \times \ldots \times Z_n^*,$$

és legyenek ν^* illetve μ_i^* a ν illetve μ_i megszorításai Y^* illetve X_i^* részhalmazaira $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ha megmutatjuk, hogy az előző tétel feltételei teljesülnek a csillaggal jelzett halmazokra, pontokra, függvényekre és mértékekre, akkor a bizonyítás teljes. Világos, hogy a 8.1.(1), 8.1.(2) és 8.1.(4) feltételek teljesülnek, míg 8.1.(3) X_i^* választásából következik. 8.1.(6) szintén T^* és Y^* választásából következik. Így csak azt kell megmutatnunk, hogy 8.1.(5) teljesül. Elég megmutatni, hogy

$$\nu\left(g_{i,t}^{-1}(X_i^*) \cap Y^*\right) \geq 2\eta^* - \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{és} \quad t \in T^*,$$

mivel ekkor

$$\begin{aligned}\nu(D_{t^*}\cap D_{t_0^*}) &= \nu\Bigg(\Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t^*}^{-1}(X_i^*)\cap Y^*\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0^*}^{-1}(X_i^*)\cap Y^*\Big)\Bigg)\\ &\geq 2\eta^* - 2n\varepsilon = \eta^*.\end{aligned}$$

Tegyük fel indirekt, hogy van olyan i $(1\leq i\leq n)$ és $t\in T^*$, hogy

$$\nu\left(Y^*\cap g_{i,t}^{-1}(X_i^*)\right) < 2\eta^* - \varepsilon,$$

azaz

$$\nu\left(Y^*\setminus g_{i,t}^{-1}(X_i^*)\right)\geq\varepsilon.$$

Ekkor

$$\mu_i\left(g_{i,t}\left(Y^*\setminus g_{i,t}^{-1}(X_i^*)\right)\right)\geq\delta.$$

Másrészt, a T^* választása miatt, ha $y\in Y^*\setminus g_{i,t}^{-1}(X_i^*)$, akkor $g_{i,t}(y)\in W_i$, de $g_{i,t}(y)\notin X_i^*$, azaz

$$g_{i,t}\left(Y^*\setminus g_{i,t}^{-1}(X_i^*)\right)\subset W_i\setminus X_i^*.$$

Ez ellentmondás, mivel $\mu_i(W_i\setminus X_i^*)<\delta$.

8.3. Tétel. *Legyen Z egy teljesen reguláris tér, Z_0 egy σ-kompakt teljesen reguláris tér, Z_i $(i=1,2,\dots,n)$ megszámlálható bázisú teljesen reguláris tér, és T tetszőleges topologikus tér. Legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, X_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek $(i=1,2,\dots,n)$ és D nyílt részhalmaza $T\times Y$-nak. Tekintsük az $f:T\to Z$, $f_0:Y\to Z_0$, $g_i:D\to X_i$, $f_i:X_i\to Z_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ és $h:D\times Z_0\times Z_1\times\ldots\times Z_n\to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0\in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t,y)\in D$-re

$$f(t)=h\left(t,y,f_0(y),f_1\left(g_1(t,y)\right),\dots,f_n\left(g_n(t,y)\right)\right);$$

(2) h folytonos;

(3) az f_i függvény λ^{r_i}-mérhető az A_i részhalmazán X_i-nek $(i=1,2,\dots,n)$;

(4) g_i folytonos D-n $(i=1,2,\dots,n)$;

(5) $\lambda^k\left(\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)\right)>0$;

(6) a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ parciális deriváltak folytonosak és rangjuk r_i minden $(t,y)\in D$-re $(i=1,2,\dots,n)$.

Ekkor f folytonos a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Ezt a tételt az előző tételre fogjuk visszavezetni, D-t egy alkalmas kisebb D^*-gal helyettesítve. Legyen y_0 a

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$$

halmaz egy sűrűségi pontja. A 3.10 segédtétel szerint léteznek olyan V illetve W környezetei t_0-nak, illetve y_0-nak, amelyekre

(7) minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\lambda^{r_i}(g_{i,t}(B)) \geq \delta$, ha $1 \leq i \leq n$, $t \in V$, $B \subset W$ és $\lambda^k(B) \geq \varepsilon$;

(8) $g_{i,t}^{-1}(A_i) \cap W$ egy λ^k-mérhető részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, ha $1 \leq i \leq n$ és $t \in V$;

(9) $\overline{V}$ és $\overline{W}$ kompakt halmazok, $\overline{V} \times \overline{W} \subset D$ és

$$\lambda^k\Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i) \cap W\Big) > 0.$$

Legyen $D^* = V \times W$, $h^* = h|D^* \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n$, $g_i^* = g_i|D^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és alkalmazzuk az előző tételt D helyett a D^* halmazon.

8.4. Megjegyzés. A fenti tételek egyes feltételei más feltételek rovására gyengíthetők, így más változatokat is kaphatunk. Ilyen változatokkal kapcsolatban lásd a Járai [67] és [72] dolgozatokat. K.-G. Grosse-Erdmann [49] dolgozatában egy érdekes „mérhetőségből következik a folytonosság” típusú tételt bizonyított be. Bár eredményei csak a Cauchy-típusú

$$f(G(x, y)) = h(y, f_1(x))$$

egyenletre alkalmazhatók (ahol f és f_1 az ismeretlen függvények), a feltételek meglepően gyengék, és eredményei számos a Cauchy-típusú egyenletekre vonatkozó korábbi eredményt általánosítanak. Durván szólva, semmiféle feltételt nem tesz fel azzal kapcsolatban, hogy a h függvény hogyan függ y-tól. Speciálisan, h függhet $f_0(y)$-tól, ahol f_0 tetszőleges, és az értékkészletére sincs semmilyen megszorítás. A G belső függvényre vonatkozó feltételei is valamivel gyengébbek, mint a mi tételeinkben szereplő feltételek. (Használjunk $t = G(x, y)$ helyettesítést lokálisan, hogy a feltételeket összevethessük.)

Sajnos, Grosse-Erdmann bizonyítása nem működik sok ismeretlen függvényt tartalmazó egyenletekre. Ha azonban technikáját ötvözzük a 18. paragrafus erős eredményeivel, akkor a szokásos 3.1 feltétel mellett több ismeretlen függvény esetén is teljesen kiküszöbölhetünk minden, a h függvény y-tól való függésével kapcsolatos feltételt.

8.5. Tétel. *Legyenek T, Z és Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ topologikus terek, Y és X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Hausdorff-terek, és tegyük fel, hogy $D \subset T \times Y$. Legyenek $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvények, ν Radon-mérték Y-on, μ_i pedig Radon-mérték X_i-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tegyük fel, hogy a $t_0 \in T$ pontnak van megszámlálható környezetbázisa, és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \ldots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra a h függvény folytonos a többi változóban;

(3) f_i Luzin μ_i-mérhető az A_i részhalmazán X_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) *g_i folytonos D-n ($i = 1, 2, \dots, n$);*

(5) *léteznek olyan V nyílt illetve K kompakt halmazok, hogy $V \times K \subset D$, $t_0 \in V$, $\nu(K) > 0$ és $K \subset \cap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$;*

(6) *minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset K$ és $\nu(B) \geq \varepsilon$, akkor $\mu_i\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$ minden $1 \leq i \leq n$-re és $t \in V$-re.*

Ekkor f folytonos t_0-ban.

Bizonyítás. Legyen t_m egy V-beli sorozat, amely t_0-hoz konvergál. Alkalmazva a 18.5 tételt a $\varphi(y,t) = g_1(t,y)$, ha $(t,y) \in V \times K$ összefüggéssel definiált φ függvényre és a ν_K mértékre, egy olyan t_{m_k} részsorozatot kapunk, amelyre $f_1(g_1(t_{m_k}, y)) \to f_1(g_1(t_0, y))$ majdnem minden $y \in K$-ra. Megismételve ezt az eljárást az f_2, g_2 függvényekkel és a t_{m_k} részsorozattal, ennek a részsorozatnak egy részsorozatát kapjuk, stb. Végül az eredeti t_m sorozat egy olyan t_{m_l} részsorozatához jutunk, amellyel majdnem minden $y \in K$-ra $f_i(g_i(t_{m_l}, y)) \to f_i(g_i(t_0, y))$, ha $1 \leq i \leq n$. Rögzítve egy ilyen $y \in K$-t, a függvényegyenlet és a h-ra vonatkozó feltétel alapján azt kapjuk, hogy mármely T-beli $t_m \to t_0$ sorozatnak van olyan t_{m_l} részsorozata, amelyre $f(t_{m_l}) \to f(t_0)$. Tegyük fel, hogy f nem folytonos t_0-ban. Ekkor van olyan W környezete $f(t_0)$-nak, amelyre $f^{-1}(W)$ nem környezete t_0-nak. Legyen U_m, $m = 1, 2, \dots$ egy megszámlálható környezetbázisa t_0-nak, és válasszunk egy $t_m \in U_m \setminus f^{-1}(W)$ sorozatot. Erre a sorozatra $f(t_m)$ egyetlen részsorozata sem konvergál $f(t_0)$-hoz.

9.§ Mérhető, majdnem mindenütti megoldások folytonossága

1960-ban Erdős Pál a következő problémát vetette fel: tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény eleget tesz az

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Cauchy-egyenletnek (a síkbeli Lebesgue-mértékre nézve) majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re. Igaz-e, hogy létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, amellyel $f(x) = g(x)$ (a számegyenesen a Lebesgue-mértékre nézve) majdnem minden x-re? A kérdésre N. G. de Bruijn és W. B. Jurkat adtak, egymástól függetlenül, pozitív választ. További hivatkozásokat illetően lásd Kuczma [111] könyvét, 443–447. o.

Itt egy kapcsolódó, szintén természetes kérdéssel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy a bevezetésben is tekintett, legáltalánosabb, iterációt nem tartalmazó többváltozós

$$H(x, y, f(G(x,y)), f_1(G_1(x,y)), \dots, f_n(G_n(x,y))) = 0 \tag{1}$$

egyenlet teljesül *mérhető* $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ ismeretlen függvényekre és $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k$ valamely E nyílt részhalmazának egy E' részhalmazából vett minden (x,y) párra, ahol az $E \setminus E'$ halmaz $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k$-beli Lebesgue-mértéke nulla. Minden függvényről feltesszük, hogy valamely euklidészi tér valamely nyílt részhalmazát képezi le valamely euklidészi térbe. Az adott H és $G, G_1, \dots, G_n$

függvényekről feltesszük, hogy simák. Lehet-e találni olyan függvényeket, amelyekre $\tilde{f} = f$ és $\tilde{f}_i = f_i$ majdnem mindenütt, ha $i = 1, \dots, n$ úgy, hogy az $f, f_1, \dots, f_n$ függvényeket rendre az $\tilde{f}, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ függvényekkel helyettesítve, az (1) függvényegyenlet mindenütt teljesül E-n?

A 8. paragrafus eszközei elég erősnek tünnek e probléma kezeléséhez. Meg fogjuk mutatni, hogy alkalmas feltételek mellett a válasz igen, és az $\tilde{f}$, $\tilde{f}_i$, $i = 1, \dots, n$ függvények folytonosnak is választhatók. Azonban technikailag egyszerűbb lesz a 18. paragrafus eszközeit használni, mint a 8. paragrafus eszközeivel dolgozni.

Először az explicit és implicit alak közötti kapcsolattal foglalkozunk majdnem mindenütt fennálló egyenletek esetén. Ezután két tételt bizonyítunk, az elsőt egy általános esetre, a másodikat vektor-vektor függvényekre, az első segítségével.

9.1. Az explicit és implicit alak közötti kapcsolat majdnem mindenütt teljesülő egyenletek esetén. Bizonyos feltételek mellett, az

$$H(x, y, f(G(x, y)), f_1(G_1(x, y)), \dots, f_n(G_n(x, y))) = 0 \tag{1}$$

egyenletet itt is egy egyszerűbb explicit egyenletre redukálhatjuk. Nevezetesen, tegyük fel, hogy az $f(G(x, y))$ tag kifejezhető az (1) egyenletből, és x helyett egy új $t = G(x, y)$ változót tudunk bevezetni. Ekkor a

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y))), \quad (t, y) \in D' \tag{2}$$

függvényegyenletet kapjuk. Itt D' az E' halmaz képe az $(x, y) \mapsto (G(x, y), y)$ leképezésnél. Feltesszük, hogy ez a leképezés diffeomorfizmus, amely az E nyílt halmazt egy D nyílt halmazra képezi le, így ez a leképezés és az inverze is nulla Lebesgue-mértékű halmazt nulla Lebesgue-mértékű halmazba visznek. Ha képesek vagyunk bebizonyítani, hogy az f függvény T értelmezési tartományának van olyan T' részhalmaza, hogy $T \setminus T'$ nulla mértékű és $f|T'$ (egyértelműen) kiterjeszthető egy, az egész T-n értelmezett $\tilde{f}$ folytonos függvénnyé, akkor a (2) függvényegyenlet f helyett $\tilde{f}$-al is majdnem mindenütt teljesül D-n, nevezetesen teljesül a $D'_0 = D' \cap (T' \times \mathbb{R}^k)$ halmazon. Ez azt jelenti, hogy ha f-et $\tilde{f}$-al helyettesítjük, akkor (1) még mindig fennáll E_0 valamely E'_0 részhalmazán, amelyre $E \setminus E'_0$ nulla mértékű. Megismételve ezt f_1-el, olyan, az f_1-el majdnem mindenütt egyenlő, folytonos $\tilde{f}_1$ függvényt és egy olyan E'_1 részhalmazát kaphatjuk E'_0-nek, hogy (1) teljesül E'_1-en, ha f-et és f_1-et helyettesítjük $\tilde{f}$-al illetve $\tilde{f}_1$-al. Végül az E egy olyan $E'' = E'_n$ részhalmazához jutunk, amelyre $E \setminus E''$ nulla mértékű és (1) fennáll E''-n, ha az $f, f_1, \dots, f_n$ függvényeket rendre a velük majdnem mindenütt egyenlő $\tilde{f}, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ folytonos függvényekkel helyettesítjük. Mivel (1) bal oldala folytonos E-n, és nulla az $E'' \subset E$ sűrű halmazon, azt kapjuk, hogy (1) mindenütt teljesül E-n, ha az $f, f_1, \dots, f_n$ függvényeket rendre az $\tilde{f}, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ függvényekkel helyettesítjük.

Összefoglalva, az (1) egyenletre vonatkozó probléma a következő problémára redukálható: Tegyük fel, hogy a (2) egyenlet fennáll a D nyílt halmaz egy olyan D' részhalmazán, amelyre $D \setminus D'$ nulla mértékű. Adjunk megfelelő feltételeket, amelyek mellett létezik az f függvény T értelmezési tartományának egy alkalmas T' részhalmaza, hogy $T \setminus T'$ nulla mértékű és az $f|T'$ függvény (egyértelműen) kiterjeszthető egy, a T halmazon értelmezett $\tilde{f}$ folytonos függvénnyé. Megmutatjuk, hogy a T' halmaz választható mindazon $t \in T$ pontok halmazának, amelyekre a $\{y : (t, y) \in D \setminus D'\}$ halmaz nulla mértékű. Fubini tétele szerint $T \setminus T'$ nulla mértékű. Általánosabban, az $\tilde{f}$ függvényt meghatározza a T' bármely olyan részhalmaza, amely még sűrű T-ben. Ezt sokkal általánosabb feltételek mellett mutatjuk meg a következő tételben. A bizonyítás használja a 18.5 tételt.

Emlékeztetünk rá, hogy topológiából Bourbaki [26] terminológiáját használjuk, és a függvénynek egy adott pontban vett határértékét Bourbaki az adott pont kizárása nélkül definiálja.

9.2. Tétel. *Legyenek T és Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ topologikus terek, Z, Y és X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Hausdorff-terek. Tegyük fel, hogy $D \subset T \times Y$, $T' \subset T$, $X_i' \subset X_i$. Legyenek $f : T' \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $f_i : X_i' \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvények, ν Radon-mérték Y-on, μ_i pedig Radon-mérték X_i-n, amelyre $\mu_i(X_i \setminus X_i') = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tegyük fel, hogy a $t_0 \in T$ pontnak van megszámlálható környezetbázisa, és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden rögzített $y \in Y$-ra a h függvény folytonos a többi változójában;

(2) f_i Luzin μ_i-mérhető az A_i mérhető részhalmazán X_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(3) g_i folytonos D-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) léteznek olyan V nyílt illetve K kompakt halmazok, hogy $V \times K \subset D$, $t_0 \in V$, $\nu(K) > 0$ és $K \subset \cap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$;

(5) minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $B \subset K$ és $\nu(B) \geq \varepsilon$ esetén $\mu_i(g_{i,t}(B)) \geq \delta$, hacsak $1 \leq i \leq n$ és $t \in V$;

(6) van olyan V' részhalmaza $T' \cap V$-nek, amelynek a lezártjában benne van t_0, és amelyre $t \in V'$ esetén majdnem minden $y \in K$-ra teljesül, hogy

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \ldots, f_n(g_n(t, y))).$$

Ekkor létezik $\lim_{t \in V', t \to t_0} f(t)$.

Bizonyítás. Legyen t_m egy V'-beli t_0-hoz konvergáló sorozat. A $\varphi(y, t) = g_1(t, y)$, ha $(t, y) \in V \times K$ összefüggéssel definiált φ függvényre és a ν_K mértékre alkalmazva a 18.5 tételt, egy olyan t_{m_k} részsorozatot kapunk, amelyre $f_1(g_1(t_{m_k}, y)) \to f_1(g_1(t_0, y))$ majdnem minden $y \in K$-ra. Megismételve ezt az f_2, g_2 függvényekkel és a t_{m_k} részsorozattal, a részsorozat egy részsorozatát kapjuk, stb. Végül az eredeti t_m sorozat egy olyan t_{m_l} részsorozatát kapjuk, amelyre majdnem minden $y \in K$-ra $f_i(g_i(t_{m_l}, y)) \to f_i(g_i(t_0, y))$, ha $1 \leq i \leq n$. Rögzítve bármely ilyen $y \in K$-t, a h-ra tett feltevés és a függvényegyenlet alapján azt kapjuk, hogy bármely V'-beli $t_m \to t_0$ sorozatnak van olyan t_{m_l} részsorozata, amelyre $f(t_{m_l})$ konvergens. Természetesen ennek a részsorozatnak a $z_0 \in Z$ határértéke nem függ y-tól. Így egy olyan $K' \subset K$ halmaz minden y pontjára, amelyre $\nu(K \setminus K') = 0$, azt kapjuk, hogy

$$z_0 = h(t_0, y, f_1(g_1(t_0, y)), \dots, f_n(g_n(t_0, y))). \tag{7}$$

Tegyük fel, hogy nem igaz, hogy $\lim_{t \in V', t \to t_0} f(t) = z_0$. Ekkor van olyan W környezete z_0-nak, hogy az f a t_0 egyetlen U környezetére sem képezi az $U \cap V'$ halmazt W-be. Legyen U_m, $m = 1, 2, \dots$ egy megszámlálható környezetbázisa t_0-nak, és válasszunk olyan $t'_m \in U_m \cap V'$ sorozatot, amelyre $f(t_m) \notin W$. Megismételve a fenti gondolatmenetet t'_m-el, egy olyan t'_{m_j} részsorozatot kapunk, amelyre majdnem minden $y \in K$-ra $f_i(g_i(t'_{m_j}, y)) \to f_i(g_i(t_0, y))$. Most ha választunk egy olyan $y \in K'$-t, amelyre konvergencia teljesül, akkor a függvényegyenletet és (7)-et felhasználva ellentmondást kapunk.

9.3. Tétel. *Legyen Z reguláris tér, Z_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ topologikus tér és T egy első megszámlálható topologikus tér. Legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, X_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek $(i = 1, 2, \dots, n)$ és D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Legyen T' a T egy sűrű részhalmaza, $f : T' \to Z$, $g_i : D \to X_i$ és $h : D \times Z_1 \times \dots \times Z_n \to Z$ függvények. Tegyük fel, hogy az f_i függvények az X_i-n λ^{r_i}-majdnem mindenütt definiált, Z_i-beli értékű függvények $(i = 1, 2, \dots, n)$, és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $t \in T'$-re λ^k-majdnem minden $y \in D_t$-re

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra a h függvény folytonos a többi változójában;

(3) az f_i függvény λ^{r_i}-mérhető az értelmezési tartományán $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(4) g_i és a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ parciális deriváltja folytonos D-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(5) minden $t \in T$-hez van olyan y, hogy $(t, y) \in D$ és a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ parciális derivált rangja r_i a $(t, y) \in D$ pontban $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Ekkor f-nek egy és csak egy folytonos kiterjesztése létezik T-re.

Bizonyítás. A tételt az előző tételre fogjuk visszavezetni. Megmutatjuk, hogy a $\lim_{t \in T', t \to t_0} f(t)$ határérték minden $t_0 \in T$-re létezik. Ha ezt belátjuk, akkor a kiterjesztést ezzel a határértékkel értelmezve, a bizonyítás teljes.

Egy adott t_0-hoz válasszunk olyan y_0-t, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangja r_i a (t_0, y_0) pontban $(i = 1, 2, \dots, n)$. A határérték létezésének bizonyításához D-t egy alkalmas kisebb D^* halmazzal fogjuk helyettesíteni. A 3.10 lemma szerint léteznek a t_0 illetve y_0 pontoknak V illetve W környezetei az alábbi tulajdonságokkal:

(6) minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $1 \leq i \leq n$, $t \in V$, $B \subset W$ és $\lambda^k(B) \geq \varepsilon$, akkor $\lambda^{r_i}\left(g_{i,t}(B)\right) \geq \delta$;

(7) a $g_{i,t}^{-1}(\operatorname{dmn} f_i) \cap W$ részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak λ^k-mérhető, ha $1 \leq i \leq n$ és $t \in V$;

(8) $\overline{W}$ kompakt, $V \times \overline{W} \subset D$ és

$$\lambda^k\Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(\operatorname{dmn} f_i) \cap W\Big) > 0.$$

Legyen $D^* = V \times W$, $h^* = h|D^* \times Z_1 \times \ldots \times Z_n$, $g_i^* = g_i|D^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és alkalmazzuk az előző tételt a D^* halmazzal D helyett.

10.§ Baire-tulajdonság és a folytonosság

A 8. paragrafus eredményeihez hasonló állítások bizonyíthatók függvényegyenletek Baire-tulajdonságú megoldásaival kapcsolatban. Ilyen irányú általános eredmények találhatók még Haupt [51], Sander [141] illetve Grosse-Erdmann [49] dolgozatában is. Itt is a legáltalánosabb eset vizsgálatával kezdjük, és annak specializálásával nyerünk egy kevésbé általános, de jobban kezelhető eredményt. Ezek az eredmények a Járai [67] dolgozatban kerültek publikálásra. Végül Grosse-Erdmann eredményének általánosítását adjuk (publikálatlan). További hivatkozásokat illetően lásd az idézett dolgozatokat.

10.1. Tétel. *Legyenek T, Y és X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ topologikus terek, Z_0 egy σ-kompakt tér, Z teljesen reguláris tér és Z_i megszámlálható bázisú topologikus tér $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Legyen $D \subset T \times Y$, $A_i \subset X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $t_0 \in T$ és tekintsük az $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) h folytonos;

(3) f_i Baire-tulajdonságú az A_i részhalmazán X_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) g_i folytonos $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(5) léteznek olyan V és K halmazok, hogy $V \times K \subset D$, V nyílt, $t_0 \in V$, K második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz és

$$K \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i);$$

(6) ha B egy második kategóriájú részhalmaza Y-nak és $B \subset K$, akkor $g_{i,t}(B)$ második kategóriájú részhalmaza X_i-nek, ha $1 \leq i \leq n$ és $t \in V$.

Ekkor f folytonos a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Mivel A_i Baire-tulajdonságú halmaz, léteznek olyan E_i, M_i' és M_i'' halmazok, hogy E_i nyílt X_i-ben, $M_i'' \subset E_i$, továbbá az M_i', M_i'' részhalmazai X_i-nek első kategóriájúak, $M_i' \cap E_i = \emptyset$ és $A_i = (E_i \setminus M_i'') \cup M_i'$. Először megmutatjuk, hogy léteznek olyan V' és K' halmazok, hogy V' nyílt T-ben, K' második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz Y-ban, $t_0 \in V' \subset V$, $V' \times K' \subset D$, és $K' \subset K$, továbbá

$$K' \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(E_i) \qquad \text{minden } t \in V'\text{-re.}$$

Legyen $K'' = K \cap (\cap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(E_i))$. Mivel (6) szerint $K \cap g_{i,t_0}^{-1}(M_i')$ első kategóriájú Y-ban, ha $1 \le i \le n$, (5)-ből azt kapjuk, hogy

$$K \setminus K'' \subset \bigcup_{i=1}^{n} \big(K \cap g_{i,t_0}^{-1}(M_i')\big)$$

első kategóriájú Y-ban. Innen K'' második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz Y-ban, és

$$K'' \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(E_i).$$

Legyen y_0 egy olyan pontja K''-nek, hogy bármely, y_0-t tartalmazó W nyílt halmazra $W \cap K''$ második kategóriájú Y-ban. Mivel a g_i függvények folytonosak D-n, a $g_i^{-1}(E_i)$ halmazok nyíltak és tartalmazzák a (t_0, y_0) pontot, így léteznek olyan V' és W' nyílt halmazok, amelyekre $t_0 \in V' \subset V$, $y_0 \in W' \subset Y$ és

$$(V' \times W') \cap D \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(E_i).$$

Világos, hogy a $K' = K'' \cap W'$ halmaz eleget tesz a megkívánt feltételeknek.

A bizonyítás teljes lesz, ha megmutatjuk, hogy f folytonos V'-n. Legyen $t \in V'$ és legyen U egy környezete $f(t)$-nek Z-ben. Mivel az f_i függvények Baire-tulajdonságúak az A_i halmazon, és Z_i megszámlálható bázisú, létezik egy $M_i''' \subset A_i$ első kategóriájú részhalmaza X_i-nek úgy, hogy f_i megszorítása $A_i \setminus M_i'''$-re folytonos. Legyen $M_i = M_i'' \cup M_i'''$. Ekkor f_i megszorítása $E_i \setminus M_i$-re folytonos ($i = 1, 2, \ldots, n$). Mivel (6) szerint a $K' \cap g_{i,t}^{-1}(M_i)$ halmazok első kategóriájúak Y-ban, a

$$K''' = K' \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(E_i \setminus M_i) \right)$$

halmaz második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz Y-ban. Legyen B_1, $B_2, \ldots$ kompakt halmazok egy növekvő sorozata Z_0-ban, amelynek egyesítése Z_0. Mivel

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \big(K''' \cap f_0^{-1}(B_j)\big) = K''',$$

létezik olyan $C_0 = B_j$ kompakt részhalmaza Z_0-nak, amelyre $f_0^{-1}(C_0) \cap K'''$ második kategóriájú Y-ban. Legyen y egy olyan pontja ennek a halmaznak, hogy y minden W nyílt környezetére $W \cap f_0^{-1}(C_0) \cap K'''$ második kategóriájú Y-ban. Az $x_i = g_i(t, y)$ és $z_i = f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy $x_i \in E_i \setminus M_i$, $f_0(y) \in C_0$ és

$$f(t) = h(t, y, f_0(y), z_1, \ldots, z_n).$$

Válasszunk egy olyan uniformitást Z-n, amely kompatibilis Z topológiájával. Találhatunk olyan α reflexív szimmetrikus relációt Z uniformitásából, amelyre $z \in U$, ha a z és $f(t)$ pontok α-közel vannak Z-ben. A 3.3 segédtétel szerint, létezik olyan V'' környezete t-nek, W'' környezete y-nak, és U_i környezete z_i-nek, hogy ha $t' \in V''$, $y' \in W''$ és $z_i', z_i'' \in U_i$, akkor $h(t, y', z_0, z_1', \ldots, z_n')$ és $h(t', y', z_0, z_1'', \ldots, z_n'')$ α-közel vannak minden $z_0 \in C_0$-ra. Felhasználva, hogy f_i megszorítása $E_i \setminus M_i$-re folytonos x_i-ben, választhatunk olyan V_i nyílt környezetét x_i-nek E_i-ben, amelyre $f_i(x_i') \in U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, hacsak $x_i' \in V_i \setminus M_i$. Mivel g_i folytonos a (t, y) pontban, léteznek olyan V''' és W''' nyílt halmazok, amelyekre $t \in V''' \subset V'' \cap V'$, $y \in W''' \subset W'' \cap W'$, és $g_i(V''' \times W''') \subset V$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ez azt mutatja, hogy

$$W''' \cap f_0^{-1}(C_0) \cap K''' \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t'}^{-1}(V_i),$$

ha $t' \in V'''$. A (6) feltétel szerint, a $K''' \cap g_{i,t'}^{-1}(M_i)$ halmazok első kategóriájúak Y-ban, ha $t' \in V'''$, így a

$$W''' \cap f_0^{-1}(C_0) \cap K''' \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t}^{-1}(V_i \setminus M_i)\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t'}^{-1}(V_i \setminus M_i)\Big)$$

halmaz nem üres, ha $t' \in V'''$. Legyen y' egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor $(t, y') \in D$, $(t', y') \in D$, $f_0(y') = z_0 \in C_0$, továbbá $g_i(t, y') \in V_i \setminus M_i$, $g_i(t', y') \in V_i \setminus M_i$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Ebből következik, hogy $f_i(g_i(t, y')) = z_i' \in U_i$, $f_i(g_i(t', y')) = z_i'' \in U_i$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$, és V''', W''', C_0 és U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ választása miatt azt kapjuk, hogy

$$f(t) = h\left(t, y', f_0(y'), f_1\left(g_1(t, y')\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y')\right)\right)$$

és

$$f(t') = h\left(t', y', f_0(y'), f_1\left(g_1(t', y')\right), \ldots, f_n\left(g_n(t', y')\right)\right)$$

α-közel vannak Z-ben, azaz $f(t') \in U$. Ez azt mutatja, hogy f folytonos V'-n.

10.2. Tétel. *Legyen T topologikus tér, Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, X_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$, Z teljesen reguláris tér, Z_0 egy σ-kompakt tér, és Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ megszámlálható bázisú topologikus tér. Legyen D egy nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t,y)\in D$*-re*

$$f(t)=h\left(t,y,f_0(y),f_1\left(g_1(t,y)\right),\dots,f_n\left(g_n(t,y)\right)\right);$$

(2) h *folytonos;*

(3) f_i *Baire-tulajdonságú az* A_i *részhalmazán* X_i*-nek* $(i=1,2,\dots,n)$*;*

(4) g_i *folytonos* $(i=1,2,\dots,n)$*;*

(5) $\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$ *második kategóriájú részhalmaza* Y*-nak;*

(6) a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ *parciális deriváltak folytonosak és rangjuk* r_i *minden* $(t,y)\in D$*-re* $(i=1,2,\dots,n)$.

Ekkor f *folytonos a* t_0 *egy környezetében.*

Bizonyítás. A tételt a 4.3 segédtétel segítségével az előző tételre vezetjük vissza. Elég megmutatni, hogy az előző tétel (5) és (6) feltételei teljesülnek, ha K-t és V-t megfelelően választjuk. Mivel jelen tételünk (5) feltétele szerint

$$\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$$

második kategóriájú halmaz Y-ban, létezik olyan y_0, amelyre $(t_0,y_0)\in D$ és y_0 minden nyílt W környezetére a

$$W\cap\Big(\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)\Big)$$

halmaz második kategóriájú. A 4.3 segédtétel felhasználásával, választhatunk olyan V és W nyílt halmazokat, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:

(7) $g_{i,t}(B)$ második kategóriájú részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek, ha $i=1,2,\dots,n$, $t\in V$, $B\subset W$ és B második kategóriájú;

(8) $W\cap\big(\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)\big)$ második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmaz Y-ban;

(9) $V\times W\subset D$, $t_0\in V$ és $y_0\in W$.

Legyen

$$K=W\cap\Big(\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)\Big).$$

Ekkor az előző tétel feltételei teljesülnek, és így a bizonyítás teljes.

10.3. Megjegyzés. A fenti tételek egyes feltételei más feltételek rovására gyengíthetők, így más változatokat is kaphatunk. Ilyen változatokkal kapcsolatban lásd a Járai [67] és [72] dolgozatokat.

K.-G. Grosse-Erdmann [49] dolgozatában egy „Baire-tulajdonságból következik a folytonosság” típusú tételt bizonyított az

$$f(G(x,y))=h(y,f_1(x))$$

egyenletre (f és f_1 az ismeretlen függvények). A $t = G(x, y)$ helyettesítés után látható, hogy tételének feltételei nem nagyon különböznek a mi (korábban elért) eredményeinkben szereplő feltételektől, kivéve, hogy nála semmilyen megkötés sem szerepel a h függvény y-tól való függésével kapcsolatban. Az alábbi tétel az ő eredményének ([49], Theorem 5.B1) általánosítása sok ismeretlen függvény esetére. A bizonyítás felhasználja a 19. paragrafus egy általános eredményét.

10.4. Tétel. *Legyenek T, Z, Y, Z_i és X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ topologikus terek, $D \subset T \times Y$. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy a $t_0 \in T$ pontnak van megszámlálható környezetbázisa, és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \ldots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) minden rögzített $y \in Y$-ra a h függvény folytonos a többi változójában;

(3) f_i Luzin-Baire tulajdonságú az A_i részhalmazán X_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) g_i folytonos D-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(5) léteznek V és K halmazok úgy, hogy $V \times K \subset D$, V nyílt, $t_0 \in V$, K Baire-tulajdonságú, második kategóriájú és

$$K \subset \bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i);$$

(6) ha $B \subset K$ második kategóriájú részhalmaza Y-nak, akkor $g_{i,t}(B)$ második kategóriájú részhalmaza X_i-nek, ha $1 \leq i \leq n$ és $t \in V$.

Ekkor f folytonos t_0-ban.

Bizonyítás. Legyen t_m egy V-beli sorozat, amely t_0-hoz konvergál. A 19.4 tételt alkalmazva a $\varphi(y, t) = g_1(t, y)$, ha $(t, y) \in V \times K$ összefüggéssel definiált φ függvényre, azt kapjuk, hogy $f_1(g_1(t_m, y)) \to f_1(g_1(t_0, y))$ minden $y \in K$-ra, kivéve egy első kategóriájú halmaz pontjait. Megismételve ezt az f_2, g_2 függvényekkel, stb., azt kapjuk, hogy egy első kategóriájú halmaz pontjait kivéve minden $y \in K$-ra $f_i(g_i(t_m, y) \to f_i(g_i(t_0, y)$, ha $1 \leq i \leq n$. Rögzítve bármely ilyen $y \in K$-t, a függvényegyenlet és a h-ra tett feltevés szerint, ha $t_m \to t_0$ a T-ben, akkor $f(t_m) \to f(t_0)$. Mivel t_0-nak van megszámlálható környezetbázisa, ebből következik, hogy f folytonos t_0-ban.

IV. Differenciálhatóság és analitikusság

11.§ Folytonosság és Lipschitz-tulajdonság

Ennek a paragrafusnak az eredményei — és a következő paragrafusok számos eredménye is — az alábbi típusú paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálhatóságán múlik:

$$F(t) = \int_{g_t(S)} h(t,x)\, d\lambda^k(x).$$

Természetesen ilyen paraméteres integrálok differenciálhatósága elég sima h és g függvények esetén klasszikus, és például a hidrodinamika egyenleteinek levezetésénél szerepel: lásd például Zeidler [165], IV., 441–445. o. Számunkra az lesz a fontos, hogy nem szükséges feltenni h simaságát. Egy ilyen tételt Járai [72]-ben h és $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ folytonosságát és g kétszer differenciálhatóságát feltéve bizonyítottam. Laczkovich Miklós, kandidátusi dolgozatom opponense rámutatott, hogy g egyszeri folytonos differenciálhatósága is elegendő, és vázolt egy — nem teljes — bizonyítást. Itt simítás segítségével erre az élesebb változatra adunk bizonyítást; ez a [79] dolgozatban került publikálásra. Bár az áramok és differenciálformák homotópia formulájának (lásd Federer [42], 363. o.) használata némileg egyszerűsítené a bizonyítást, a lényege nem változna. Ezért a [72] dolgozatban is használt elemi módszernél maradunk.

Az ebben a paragrafusban nyert eredményeink nagy része nem a többi paragrafusban vizsgált legáltalánosabb egyenlettípusra vonatkozik. Először összeg alakú függvényegyenletek esetére bizonyítunk egy „folytonosságból következik a folytonos differenciálhatóság" típusú tételt. Ez az eredmény igen hasznos lesz a továbbiakban. Megjegyezzük, hogy némileg általánosabb egyenletek is vizsgálhatók ezzel a módszerrel: lásd az utolsó fejezetben tárgyalt alkalmazásokat. Ezután egy, csak három ismeretlen függvényt tartalmazó „Cauchy-típusú" speciális egyenlettel fogalkozunk. Ezek az eredmények a Járai [72] dolgozatban kerültek publikálásra. (A 11.4 tétel megfogalmazása ott elírást tartalmaz.) Végül egy, az 1.17 problémában szereplő általános egyenlettípusra vonatkozó, de egy plusz kompaktsági feltételt tartalmazó tételt bizonyítunk. Ennek első változata valós változós, valós értékű megoldásokra vonatkozott (ekkor a becslések egyszerűbbek), és a Járai [84] dolgozatban került publikálásra. Az általánosabb változat a Járai [82] dolgozatban szerepel. Bár ez nem oldja meg az 1.17 probléma „folytonosságból következik a majdnem mindenütti differenciálhatóság" lépését teljes általánosságban, nagyon sok konkrét probléma megoldására elegendő: lásd a 21.12 pontban a „kockakettőzés egyenletét" és a Weierstrass-féle szigma-függvény karakterizációját a 23. paragrafusban.

11.1. Tétel. *Legyen S egy nem üres belsejű szimplex $\mathbb{R}^k$-ban, és legyenek U, V és W nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^k$-nak, $\mathbb{R}^s$-nek, illetve $\mathbb{R}^k$-nak. Legyen $g : (t, y) \mapsto x$ egy függvény, amely $V \times W$-t U-ba képezi le, $h : (t, x) \mapsto z$ pedig egy $V \times U$-t $\mathbb{R}$-be képező függvény. Tegyük fel, hogy $S \subset W$ és*

(1) g folytonosan differenciálható, $(Jg_t)(y) \neq 0$, ha $t \in V$ és $y \in W$ és g_t invertálható minden $t \in V$-re;

(2) h és $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ folytonosak.

Ekkor a

$$F(t) = \int_{g_t(S)} h(t, x)\, d\lambda^k(x) \quad \text{ha} \quad t \in V$$

összefüggéssel definiált függvény folytonosan differenciálható V-n, és parciális deriváltjai korlátosak

$$H'G'\lambda^k(S) + (k+1)HG^k\chi^{k-1}(\partial S)$$

korláttal, ahol H a h, H' a $\dfrac{\partial h}{\partial t_i}$ parciális deriváltak korlátja a $g_t(S)$, $t \in V$ halmazokon, G' a Jg_t Jacobi-determináns abszolút értékének, G pedig a g gradiense normájának a korlátja $V \times S$-en.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy V összefüggő és W konvex, így a Jg_t Jacobi-determináns nem vált előjelet, ha y befutja W-t és t befutja V-t. Legyen i egy index 1 és s között. Az első lépésben meg fogjuk mutatni, hogy $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ létezik és megadunk rá egy formulát, feltéve, hogy g és h elég simák. A második lépésben ennek a formulának a felhasználásával megmutatjuk, hogy $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ folytonos. A harmadik lépésben az általános esetet kezdjük vizsgálni g és h simításának segítségével. A negyedik lépésben megmutatjuk, hogy a formula, amit a sima esetben kaptunk, érvényes az általános esetben is. Az ötödik lépés teljessé teszi a bizonyítást.

I. Először tegyük fel, hogy h folytonosan differenciálható és g kétszer folytonosan differenciálható. Helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$F(t) = \int_S h(t, g_t(y)) Jg_t(y)\, d\lambda^k(y),$$

és így g koordinátáit felső indexekkel jelölve,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = &\int_S \frac{\partial h}{\partial t_i}(t, g_t(y)) Jg_t(y)\, d\lambda^k(y) \\
&+ \int_S \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}(t, g(t,y)) \frac{\partial g^j}{\partial t_i}(t, y) \right) Jg_t(y)\, d\lambda^k(y) \\
&+ \int_S h(t, g(t,y)) (\partial_{t_i} Jg_t)(y)\, d\lambda^k(y).
\end{aligned}$$

Visszatérve $g_t(S)$ feletti integrálokra, vizsgáljuk a második és harmadik integrált. Ha $H(t,x)$ jelöli azt a vektor értékű függvényt, amelynek j-edik koordinátája $h(t,x)\dfrac{\partial g^j}{\partial t_i}(t, g_t^{-1}(x))$, akkor

$$\begin{aligned}\operatorname{div} H_t(x) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial h}{\partial x_j}(t,x)\frac{\partial g^j}{\partial t_i}(t, g_t^{-1}(x))\\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} h(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g^j}{\partial t_i}\left(t, g_t^{-1}(x)\right)\right),\end{aligned}$$

így, ha χ^n jelöli az n-dimenziós Hausdorff-mértéket, a második és harmadik integrálból a Gauss–Green tétel felhasználásával, $\mathbf{n}$-el jelölve a külső normálist, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\int_{g_t(\partial S)} h(t,x)\left\langle \frac{\partial g}{\partial t_i}(t, g_t^{-1}(x)), \mathbf{n}(t,x)\right\rangle d\chi^{k-1}(x)\\ &+ \int_{g_t(S)} h(t,x)G(t,x)\, d\lambda^k(x),\end{aligned}$$

ahol

$$G(t,x) = (\partial_{t_i} Jg_t)(g_t^{-1}(x))(Jg_t^{-1})(x) - \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g^j}{\partial t_i}(t, g_t^{-1}(x))\right).$$

Megmutatjuk, hogy G nulla. Jelölje $\overline{g}_t$ a g_t inverzét, $[e_1, \dots, e_k]$ pedig az $e_1, \dots, e_k$ vektorrendszer determinánsát. Jelöljük felső indexekkel a koordinátákat. Ekkor

$$\begin{aligned}(\partial_{t_i} Jg_t)J\overline{g}_t &= \left(\partial_{t_i}\left[\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}\right]\right) J\overline{g}_t\\ &= \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_{j-1}}, \frac{\partial^2 g}{\partial t_i \partial y_j}, \frac{\partial g}{\partial y_{j+1}}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}\right] J\overline{g}_t.\end{aligned}$$

Ha

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t_i \partial y_j} = \sum_{n=1}^{k} c_j^n \frac{\partial g}{\partial y_n},$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$(\partial_{t_i} Jg_t)J\overline{g}_t = \sum_{j=1}^{k} c_j^j.$$

Másrészt,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g^j}{\partial t_i}(t, \overline{g}_t(x))\right) &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{\partial^2 g_t^j}{\partial t \partial y_n}(\overline{g}_t(x))\frac{\partial \overline{g}_t^n}{\partial x_j}(x)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{m=1}^{k} c_n^m \frac{\partial g_t^j}{\partial y_m}\right)\frac{\partial \overline{g}_t^n}{\partial x_j} = \sum_{n=1}^{k} c_n^n,\end{aligned}$$

azaz $G(t,x)$ nulla.

II. Második lépésként vegyük észre, hogy az első lépés feltételei mellett $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ folytonos V-n. Valóban, $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ felírható, mint a

$$\int_S \frac{\partial h}{\partial t_i}(t, g_t(y)) J g_t(y)\, d\lambda^k(y) \tag{4}$$

és

$$\int_{g_t(\partial S)} h(t,x) \left\langle \frac{\partial g}{\partial t_i}\left(t, g_t^{-1}(x)\right), \mathbf{n}(t,x) \right\rangle d\chi^{k-1}(x)$$

integrálok összege. Jelölje $E_0, E_1, \ldots, E_k$ az S oldallapjait. Az utolsó integrál felírható

$$\sum_{j=0}^{k} \int_{g_t(E_j)} h(t,x) \left\langle \frac{\partial g}{\partial t_i}(t, g_t^{-1}(x)), \mathbf{n}(t,x) \right\rangle d\chi^{k-1}(x)$$

alakban. Vizsgáljuk ennek az összegnek egy tagját. Az egyszerűség kedvéért hagyjuk el E indexét. Válasszunk egy

$$e_1, \ldots, e_k$$

ortonormált bázist úgy, hogy e_k ortogonális legyen E-re. Elhagyva az előjelet, amely nem függ t-től, azt kapjuk, hogy

$$\int_{g_t(E)} h(t,x) \frac{\left[\frac{\partial g}{\partial e_1}(t, g_t^{-1}(x)), \ldots, \frac{\partial g}{\partial e_{k-1}}(t, g_t^{-1}(x)), \frac{\partial g}{\partial t_i}(t, g_t^{-1}(x)\right]}{J_t(x)}\, d\chi^{k-1}(x),$$

ahol $J_t(x)$ a $\dfrac{\partial g}{\partial e_1}(t, g_t^{-1}(x)), \ldots, \dfrac{\partial g}{\partial e_{k-1}}(t, g_t^{-1}(x))$ irány menti deriváltakból képzett Gram-determináns négyzetgyöke. Helyettesítéssel a fenti integrálból a

$$\int_E h(t, g(t,y))[\frac{\partial g}{\partial e_1}(t,y), \ldots, \frac{\partial g}{\partial e_{k-1}}(t,y), \frac{\partial g}{\partial t_i}(t,y)]\, d\chi^{k-1}(y) \tag{5}$$

integrált kapjuk. A (4) és (5) integrálok folytonosan függnek a t paramétertől: ez könnyen következik abból a tényből, hogy a szereplő függvények folytonosak, és így kompakt halmazokon egyenletesen folytonosak.

III. Simítást fogunk használni annak bizonyítására, hogy $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ ezen előállítása érvényes akkor is, ha csak azt tesszük fel, hogy g folytonosan differenciálható, $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ létezik és folytonos. Legyen t' egy tetszőleges, de rögzített pontja V-nek. Válasszunk egy V^* nyílt gömböt t' középponttal, amelynek kompakt lezártja V-ben van, és egy W^* konvex nyílt halmazt, amely tartalmazza S-et és kompakt lezártja W-ben van. A $\overline{V^*} \times \overline{W^*}$ kompakt halmaz képe a g leképezésnél szintén kompakt. Válasszunk olyan U^* nyílt halmazt, amely tartalmazza ezt a kompakt képet, és amelynek a kompakt lezártja benne van U-ban. Az F függvényt a V^* halmazon fogjuk vizsgálni. Az

F értékei ezen a halmazon csak a g függvény $V^* \times W^*$-en és a h függvény $V^* \times U^*$-n felvett értékeitől függnek, így ha ezeket a függvényeket megszorozzuk egy-egy végtelen sokszor differenciálható függvénnyel, amely 1-et vesz fel $V^* \times W^*$-n illetve $V^* \times U^*$-n, F nem változik, így feltehetjük, hogy g és h kompakt tartójúak. Terjesszük ki g-t és h-t az értelmezési tartományuk komplementerére is úgy, hogy ott nullának definiáljuk, és az egyszerűség kedvéért jelöljük a kiterjesztett függvényeket ugyancsak g-vel illetve h-val. Legyen ω egy végtelen sokszor differenciálható függvény, amelynek a tartója $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k$ egységgömbjében van, és amelyre $\int_{\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k} \omega \, d\lambda^s \times \lambda^k = 1$. Legyen $\omega^\varepsilon(u) = \omega(u/\varepsilon)/\varepsilon^{s+k}$, ha $\varepsilon > 0$ és definiáljuk konvolúcióval a $g^\varepsilon = g * \omega^\varepsilon$ és $h^\varepsilon = h * \omega^\varepsilon$ függvényeket $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k$-n. Jól ismert, hogy g^ε és h^ε végtelen sokszor differenciálhatóak, $\dfrac{\partial g^\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial t} * \omega^\varepsilon$, $\dfrac{\partial g^\varepsilon}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y} * \omega^\varepsilon$, $\dfrac{\partial h^\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial h}{\partial t} * \omega^\varepsilon$, továbbá $g^\varepsilon \to g$, $h^\varepsilon \to h$, $\dfrac{\partial g^\varepsilon}{\partial t} \to \dfrac{\partial g}{\partial t}$, $\dfrac{\partial g^\varepsilon}{\partial y} \to \dfrac{\partial g}{\partial y}$ és $\dfrac{\partial h^\varepsilon}{\partial t} \to \dfrac{\partial h}{\partial t}$, ha $\varepsilon \downarrow 0$, és a konvergencia egyenletes a kompakt halmazokon. I. és II. eredményeit fogjuk használni a simított függvényekre. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy g_t^ε a W^* halmazt U^*-ba képezi le, invertálható W^*-on, és a Jacobi-determinánsa nem nulla, ha ε elég kicsi. Ha K egy kompakt környezete $\overline{V^*} \times \overline{W^*}$-nak $V \times W$-ben, akkor $g_t^\varepsilon \to g_t$ és $Jg_t^\varepsilon \to Jg_t$ egyenletesen a K-n, így csak g_t^ε invertálhatósága nem triviális. Vegyük észre, hogy g_t' mátrixának az inverze kifejezhető g_t' mátrixának determinánsával és aldeterminánsaival, így létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy ha $(t, y) \in K$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, akkor $g_t^{\varepsilon\prime}(y)$ inverze definiálva van és $g_t^{\varepsilon\prime}(y)^{-1} \to g_t'(y)^{-1}$ egyenletesen, ha $\varepsilon \downarrow 0$. Az inverz függvény tétel bizonyítását felhasználva azt kapjuk, hogy ha Y egy nyílt gömb $\mathbb{R}^k$-ban $y' \in \overline{W^*}$ középponttal, $(t, y) \in K$ és

$$\|g_t^{\varepsilon\prime}(y) - g_t^{\varepsilon\prime}(y')\| < \frac{1}{2\|g_t^{\varepsilon\prime}(y')^{-1}\|}$$

minden $y \in Y$-ra, akkor g_t^ε kölcsönösen egyértelmű függvény Y-on. Megmutatjuk, hogy az Y gömb sugara nagyobbnak választható, mint egy közös $r > 0$ szám, amely nem függ t-től és y'-től. Valóban, választva egy pozitív konstanst, amely kisebb, mint a

$$\frac{1}{2\|g_t'(y')^{-1}\|}$$

számok infimuma, és felhasználva, hogy $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ egyenletesen folytonos K-n, az r szám úgy választható, hogy ha $|y - y'| < r$, akkor

$$\|g_t'(y) - g_t'(y')\| < c$$

teljesüljön. Most szükség esetén csökkentve ε_0-at azt kapjuk, hogy

$$\|g_t^{\varepsilon\prime}(y) - g_t^{\varepsilon\prime}(y')\| < c < \frac{1}{2\|g_t^{\varepsilon\prime}(y')^{-1}\|}$$

a K-n, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Így megmutattuk, hogy a g_t^ε leképezés r-nél kisebb távolságú pontokat nem képezhet ugyanoda. r-nél nem kisebb távolságú pontokra sem lehetséges ez; ennek bizonyításához vegyük észre, hogy a $|g_t(y) - g_t(y')|$ folytonos függvény infimuma pozitív a

$$\{(t, y, y') : (t, y) \in K, (t, y') \in K, |y - y'| \geq r\}$$

kompakt halmazon, így választva egy d pozitív számot, amely kisebb, mint ez az infimum, szükség esetén csökkentve ε_0-at, azt kapjuk, hogy $|g_t^\varepsilon(y) - g_t^\varepsilon(y')| \geq d$ ezen a halmazon, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

IV. Megmutatjuk, hogy az általános esetben F parciálisan differenciálható és a parciális deriváltjai ugyanúgy állíthatók elő (4) és (5) típusú integrálok lineáris kombinációjaként, mint sima g és h esetén. Legyen

$$F^\varepsilon(t) = \int_{g_t^\varepsilon(S)} h^\varepsilon(t, x)\, d\lambda^k(x) = \int_S h^\varepsilon(t, g^\varepsilon(t, y)) J g_t^\varepsilon(y)\, d\lambda^k(y),$$

ha $t \in V^*$ és ε elég kicsi. Előállítva F-et hasonlóan, mint a jobb oldali integrál, és felhasználva, hogy a függvények egyenletesen folytonosak a kompakt halmazokon és a konvergencia egyenletes a kompakt halmazokon, ha $\varepsilon \downarrow 0$, kapjuk, hogy $F^\varepsilon(t) \to F(t)$, ha $t \in V^*$. Jelölje $f_1, \ldots, f_s$ az $\mathbb{R}^s$ szokásos bázisát. Nyilván létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $t' + \tau f_i \in V^*$, ha $|\tau| \leq \delta$. Legyen

$$\varphi^\varepsilon(\tau) = \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial t_i}(t' + \tau f_i), \qquad |\tau| \leq \delta.$$

Az eddig bizonyítottak szerint a $\varphi^\varepsilon(\tau)$ függvény előállítható (4) és (5) típusú integrálok lineáris kombinációjaként, ha t-t $t' + \tau f_i$-vel, h-t h^ε-nal és g-t g^ε-nal helyettesítjük. Képezzük ugyanezeket az integrálokat g-re és h-ra, és jelölje $\varphi(\tau)$ ugyanazt a lineáris kombinációjukat. Ugyanúgy, mint az F^ε függvények esetében, azt kapjuk, hogy $\varphi^\varepsilon \to \varphi$ egyenletesen a $[-\delta, \delta]$ intervallumon, ha $\varepsilon \downarrow 0$. Így a

$$\tau \mapsto \int_{-\delta}^{\tau} \varphi^\varepsilon(\varrho)\, d\varrho$$

függvények egyenletesen konvergálnak a

$$\tau \mapsto \int_{-\delta}^{\tau} \varphi(\varrho)\, d\varrho$$

függvényhez. Másrészt

$$\int_{-\delta}^{\tau} \varphi^\varepsilon(\varrho)\, d\varrho = F^\varepsilon(t' + \tau f_i) - F^\varepsilon(t' - \delta f_i) \to F(t' + \tau f_i) - F(t' - \delta f_i),$$

ha $\varepsilon \downarrow 0$. Innen azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\delta}^{\tau} \varphi(\varrho)\, d\varrho = F(t' + \tau f_i) - F(t' - \delta f_i), \qquad |\tau| \leq \delta.$$

A II. lépés szerint a φ^ε függvények folytonosak, így φ is folytonos a $[-\delta,\delta]$ intervallumon. Ebből következik, hogy $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ létezik és megegyezik $\varphi(0)$-al, azaz a $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ parciális derivált (4) és (5) típusú integrálok lineáris kombinációja.

V. Utolsó lépésként vegyük észre, hogy a II. lépésben csak a (4) és (5) integrálokban szereplő függvények folytonosságát használtuk fel. Így a II. lépésben használt okoskodást megismételve azt kapjuk, hogy $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}$ folytonos. Mivel F parciális deriváltjai folytonosak, F folytonosan differenciálható. Végül, a (4) és (5) előállításokból kapjuk a tételben szereplő becslést.

11.2. Lemma. *Legyenek T, Y és U nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^k$ illetve $\mathbb{R}^r$-nek, D nyílt részhalmaza $T\times Y$-nak, $h : D\times U \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, amelyre $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ és $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ is folytonosak, $g : D \to U$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, $(t_0,y_0)\in D$, és tegyük fel, hogy $\dfrac{\partial g}{\partial y}(t_0,y_0)$ rangja r. Legyen S egy szimplex $\mathbb{R}^k$ egységgömbjében, amelynek a belseje nem üres. Ekkor létezik olyan V_0 konvex környezete t_0-nak, $R_0>0$ valós szám és C konstans, hogy minden R-re, amire $0<R<R_0$ fennáll, hogy $RS+y_0\subset D_t$ és a*

$$t\mapsto \int_{RS+y_0} h(t,y,g(t,y))\,dy$$

függvény folytonosan differenciálható V_0-on, gradiense pedig korlátos CR^{k-1} korláttal.

Bizonyítás. A bizonyítás a fenti, paraméteres integrálok differenciálásáról szóló tételen múlik.

Legyen $g_t(y) = x = (x_1,x_2,\dots,x_r)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\dots,x_r)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_r)}$$

Jacobi-determináns pozitív a (t_0,y_0) pontban. Válasszunk V_0 és W_0 nyílt gömböket t_0 illetve y_0 középponttal úgy, hogy $V_0\times W_0\subset D$ teljesüljön, és ez a Jacobi-determináns pozitív legyen, ha $t\in V_0$, $y\in W_0$. Legyen R_0 a W_0 sugara. Definiáljuk $x^*=(x_1^*,\dots,x_r^*,x_{r+1}^*,\dots,x_k^*)$-ot a következőképpen: $x_i^*=x_i$, ha $1\le i\le r$ és $x_i^*=y_i$, ha $r<i\le k$. Az $y\mapsto x^*$ leképezést g_t^*-gal fogjuk jelölni. Legyen $p(x^*)=x$. Világos, hogy a

$$\frac{\partial(x_1^*,\dots,x_k^*)}{\partial(y_1,\dots,y_k)}$$

Jacobi-determináns értéke megegyezik a fenti Jacobi-determináns értékével, így nem nulla, ha $t\in V_0$ és $y\in W_0$. Legyen $L(t)={g_t^*}'(y_0)$. Tegyük fel, hogy

$$\|{g_t^*}'(y)-L(t)\| < \frac{1}{2\|L(t_0)^{-1}\|},$$

ha $y \in W_0$. Ekkor az inverz függvény tétel bizonyítása szerint (lásd Rudin [137], 9.24 tétel), g_t^* homeomorfizmusa W-nek az $\mathbb{R}^k$ egy nyílt részhalmazára. Legyen

$$0 < c < \frac{1}{2\|L(t)^{-1}\|}.$$

R_0-at és V-t szükség esetén kisebbel helyettesítve, elérhetjük, hogy

$$\|g_t^{*\prime} - L(t)\| < c < \frac{1}{2\|L(t)^{-1}\|}$$

teljesüljön, ha $t \in V$ és $y \in W$.

Most legyen U_0 egy nyílt halmaz, amelynek kompakt lezártja benne van $g_{t_0}^*(W)$-ben. Kisebb V-t véve feltehetjük, hogy $U_0 \subset g_t^*(W)$ minden $t \in V$-re. Most csökkentve V-t és R_0-at, feltehetjük, hogy $g_t^*(W) \subset U$ minden $t \in V$-re. Az $x^* = g_t^*(y)$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy az

$$F(t) = \int_{g_t^*(RS+y_0)} h\left(t, g_t^{*-1}(x^*), p(x^*)\right) J\left(g_t^{*-1}(x^*)\right) d\lambda^k(x^*)$$

paraméteres integrál minden $t \in V$-re teljesíti az előző tétel feltételeit. Alkalmazva ezt a tételt, kapjuk, hogy F folytonosan differenciálható V felett, és gradiense korlátos CR^{k-1}-el valamely C konstansra.

11.3. Tétel. *Legyenek n, k, $r_1, \ldots, r_n$, $m_1, \ldots, m_n$ és s pozitív egészek. Legyen X_i egy nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek ($i = 1, 2, \ldots, n$), legyen T nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^s$-nek, Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, Z_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{m_i}$-nek ($i = 1, 2, \ldots, n$), legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak, és legyen Z egy euklidészi tér. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h_i : D \times Z_i \to Z$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) és $h_0 : D \to Z$ függvényeket. Legyen $(t_0, y_0) \in D$ és tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h_0(t, y) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t, y, f_i(g_i(t, y)));$$

(2) h_0 és $\dfrac{\partial h_0}{\partial t}$ folytonosak, valamint h_i, $\dfrac{\partial h_i}{\partial t}$ és $\dfrac{\partial h_i}{\partial y}$ folytonosak ($1 \le i \le n$);

(3) f_i folytonos X_i-n;

(4) g_i kétszer folytonosan differenciálható és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t_0, y_0)$ rangja r_i, $1 \le i \le n$.

Ekkor f folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Koordinátákra térve át, feltehetjük, hogy $Z = \mathbb{R}$. Válasszunk egy elég kis S szimplexet és egy elég kis V nyílt halmazt, amelyekre

S környezete y_0-nak, V környezete t_0-nak, és $V \times S \subset D$. Integráljuk az (1) egyenletet S felett y szerint. Azt kapjuk, hogy

$$(5) \qquad f(t) \int_S dy = \int_S h_0(t,y)\,dy + \sum_{i=1}^{n} \int_S h_i\left(t, y, f_i\left(g_i(t,y)\right)\right) dy.$$

Mivel $\int_S dy$ egy nem nulla konstans, azt kell megmutatnunk, hogy (5) jobb oldala folytonosan differenciálható V felett t szerint, ha S és V elég kicsik. Ez következik az előző lemmából.

11.4. Tétel. *Legyenek T, Y, X_1, Z_0 és Z_1 nyílt részhalmazai az s, k, r_1, m_0 illetve 1 dimenziós euklidészi tereknek. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük a $g_1 : D \to X_1$, $f : T \to \mathbb{R}^m$, $f_0 : Y \to Z_0$, $f_1 : X_1 \to Z_1$ és $h : D \times Z_0 \times Z_1 \to \mathbb{R}^m$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és a következő feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t,y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t,y)\right)\right);$$

(2) h lokálisan Lipschitz;

(3) g_1 kétszer folytonosan differenciálható;

(4) f_0 és f_1 folytonosak;

(5) létezik olyan y_0, amelyre $(t_0,y_0) \in D$ és $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(t_0,y_0)$ rangja r_1.

Ekkor f Lipschitz-feltételnek tesz eleget a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan V környezete t_0-nak, és olyan M valós szám, amelyre

$$|f(t) - f(t')| \le M|t - t'| \qquad \text{ha } t, t' \in V.$$

Legyen $z_0 = f_0(y_0)$, $z_1 = f_1\left(g_1(t_0,y_0)\right)$. Válasszunk $V \subset T$, $W \subset Y$, $U_0 \subset Z_0$ és $U_1 \subset \mathbb{R}$ gömböket rendre t_0, y_0, z_0 és z_1 középpontokkal úgy, hogy $f_0(y) \in U_0$, $f_1\left(g_1(t,y)\right) \in U_1$ és

$$\begin{aligned}|f(t) - f(t')| &= \left|h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t,y)\right)\right) - h\left(t', y, f_0(y), f_1\left(g_1(t',y)\right)\right)\right| \\ &\le M_1|t - t'| + M_2\left|f_1\left(g_1(t,y)\right) - f_1\left(g_1(t',y)\right)\right|,\end{aligned}$$

ha $t, t' \in V$ és $y \in W$.

Most, ha megmutatjuk, hogy (esetleg kisebb V-re) létezik olyan M_3 szám, hogy minden $t, t' \in V$-hez létezik egy $y \in W$, amelyre

$$\left|f_1\left(g_1(t,y)\right) - f_1\left(g_1(t',y)\right)\right| \le M_3|t - t'|,$$

akkor a bizonyítás teljes.

Legyen S egy szimplex, amely környezete y_0-nak, és legyen

$$F(t) = \int_S f_1\left(g_1(t, y)\right)\, dy.$$

Az előző lemmából következik, hogy F folytonosan differenciálható korlátos deriválttal, ha S és V elég kicsik, azaz létezik olyan M_4 szám, amelyre

$$|F(t) - F(t')| \leq M_4|t - t'|, \quad \text{ha} \quad t, t' \in V.$$

Másrészt, mivel f_1 valós értékű folytonos függvény és

$$F(t) - F(t') = \int_S \left(f_1\left(g_1(t, y)\right) - f_1\left(g_1(t', y)\right)\right)\, dy,$$

létezik olyan $y \in S$, amelyre, λ^k-val jelölve a Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}^k$-n,

$$F(t) - F(t') = \lambda^k(S) \cdot \left(f_1\left(g_1(t, y)\right) - f_1\left(g_1(t'y)\right)\right).$$

Ezzel az y-nal és $M_3 = M_4/\lambda^k(S)$ jelöléssel

$$\left|f_1\left(g_1(t, y)\right) - f_1\left(g_1(t', y)\right)\right| \leq M_3|t - t'|.$$

Ezzel a bizonyítás teljes.

Az adott g_i függvényekre vonatkozó erősebb feltételek mellett egy ismeretlen függvényt tartalmazó egyenletre meg tudjuk mutatni, hogy a folytonos megoldások lokálisan Lipschitz függvények. A valós változós valós értékű ismeretlen függvény esetét a Járai [84] dolgozat tárgyalja. Az általános, vektor változós, vektor értékű ismeretlen függvényre vonatkozó változat bizonyítása a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálhatóságán, és a derivált explicit becslésén múlik, amelyet az előző lemma alakjában fogunk felhasználni. Ez az általánosabb változat — kicsit eltérő alakban — a Járai [82] dolgozatban került publikálásra.

11.5. Tétel. *Legyen Z egy nyílt részhalmaza egy euklidészi térnek. Legyenek T és Y nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^s$-nek illetve $\mathbb{R}^k$-nak. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak, C kompakt részhalmaza T-nek. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to T$ $(i = 1, \ldots, n)$, $h : D \times Z^n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f(g_1(t, y)), \ldots, f(g_n(t, y)));$$

(2) h kétszer folytonosan differenciálható;

(3) g_i kétszer folytonosan differenciálható D-n és minden $t \in T$-hez van olyan y, amelyre $(t, y) \in D$, $g_i(t, y) \in C$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t, y)$ rangja s, ha $i = 1, \ldots, n$;

(4) az f függvény folytonos.

Ekkor f lokálisan Lipschitz függvény T-n.

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata az f folytonossági modulusának használata. Mivel ez nem feltétlenül szubadditív, egy módosítását fogjuk használni. Erre egy függvényegyenlőtlenséget vezetünk le, és abból nyerjük a tétel bizonyítását. Ha $\varepsilon > 0$, jelölje $C_\varepsilon = \{x : \operatorname{dist}(x, C) \leq \varepsilon\}$ a (zárt) ε környezetét C-nek. Ha $\varepsilon \leq 0$, legyen $C_\varepsilon = C$. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$-t, amelyre $C_\varepsilon \subset T$. Ekkor $|f|$ korlátos egy B korláttal C_ε-on. Legyen S egy szimplex $\mathbb{R}^k$ egységgömbjében, amelynek a belseje nem üres. Minden $0 \leq r \leq \varepsilon$-ra legyen

$$\omega(r) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x \in C_\varepsilon, |x - y| \leq r, y \in C_{\varepsilon - |x-y|}\}.$$

Nyilván ω növekvő, $\omega(0) = 0$, ω folytonos a nullában, mivel f egyenletesen folytonos a C_ε kompakt halmazon, és $\omega(r_1 + r_2) \leq \omega(r_1) + \omega(r_2)$, ha $0 \leq r_1, r_2, r_1 + r_2 \leq \varepsilon$; az utolsó állítás bizonyításához tegyük fel, hogy ez az egyenlőtlenség nem teljesül. Ekkor léteznek x és y úgy, hogy $|x-y| \leq r_1 + r_2$, $x \in C_\varepsilon$ és $y \in C_{\varepsilon - |x-y|}$, de $|f(x) - f(y)| > \omega(r_1) + \omega(r_2)$. Tegyük fel, hogy $r_2 \leq r_1$. Az y benne van valamely C-beli pont $\varepsilon - |x - y|$-környezetében, így x benne van ugyanezen pont ε-környezetében. Választva egy z-t az x-et és y-t összekötő szakaszon úgy, hogy $|x - z| \leq r_1$ és $|z - y| \leq r_2$teljesülsön, azt kapjuk, hogy $z \in C_{\varepsilon - |x-z|}$, ahonnan $|f(x) - f(z)| \leq \omega(r_1)$ és $|f(z) - f(y)| \leq \omega(r_2)$, ami ellentmondás.

Egy tetszőleges $t_0 \in C_\varepsilon$-hoz válasszunk egy (t_0-tól függő) y_0-t (3) szerint. Alkalmazva az előző lemmát az f koordináta-függvényeire, azt kapjuk, hogy léteznek $\delta_{t_0} > 0$, $R_{t_0} > 0$ és c_{t_0} úgy, hogy a t_0 középpontú $2\delta_{t_0}$ sugarú V_{t_0} nyílt gömbre és az y_0 középpontú és R_{t_0} sugarú zárt W_{t_0} gömbre $V_{t_0} \times W_{t_0}$ lezártja benne van D-ben, és a

$$t \mapsto \int_{RS+y_0} f(g_i(t, y))\, dy$$

leképezések folytonosan differenciálhatóak V_{t_0}-on, gradiensük pedig korlátos $c_{t_0} R^{k-1}$ korláttal, ha $0 < R < R_{t_0}$. Válasszunk egy η_{t_0} pozitív konstanst úgy, hogy $\{t_0\} \times \{y_0\} \times f(C)^n$ zárt $(n+2)\eta_{t_0}$-környezete benne legyen $D \times Z^n$-ben. Válasszunk egy $0 < \varepsilon_{t_0} \leq \varepsilon/3$-at úgy, hogy $\omega(\varepsilon_{t_0}) \leq \eta_{t_0}$ teljesüljön. Szükség esetén csökkentve δ_{t_0}-t és R_{t_0}-t feltehetjük, hogy $2\delta_{t_0} \leq \eta_{t_0}$, $R_{t_0} \leq \eta_{t_0}$, $g_i(V_{t_0} \times W_{t_0})$ benne van a $g_i(t_0, y_0)$ középpontú ε_{t_0} sugarú zárt gömbben, és minden g_i Lipschitz-függvény $V_{t_0} \times W_{t_0}$-on L_{t_0} Lipschitz-konstanssal. Feltehetjük, hogy L_{t_0} egész szám.

A $t_0 \in C_\varepsilon$ középpontú és δ_{t_0} sugarú nyílt gömbök a C_ε kompakt halmaz egy nyílt lefedését adják. Innen létezik egy $T_0 \subset C_\varepsilon$ véges halmaz úgy, hogy a $t_0 \in T_0$ pontoknak megfelelő nyílt gömbök egy nyílt lefedését adják C_ε-nak. Legyen $L = \sup\{L_{t_0} : t_0 \in T_0\}$ és legyen $0 < \delta \leq \inf\{\delta_{t_0} : t_0 \in T_0\}$, $0 < R_0 \leq \inf\{R_{t_0} : t_0 \in T_0\}$ úgy, hogy $L(\delta + R_0) \leq \varepsilon$. Jelölje K a $V_{t_0} \times W_{t_0}$ halmazok $t_0 \in T_0$-ra vett egyesítésének lezártját. Nyilván K kompakt részhalmaza D-nek. Hasonlóan, jelölje K' az $\{t_0\} \times \{y_0\} \times f(C)^n$ halmazok zárt $(n+2)\eta_{t_0}$-környezeteinek egyesítését $t_0 \in T_0$-ra. Ekkor K' kompakt részhalmaza $D \times Z^n$-nek, és így a $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ függvények Lipschitz-folytonosak rajta L_i' Lipschitz-konstanssal, a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|$ és $\left|\dfrac{\partial h}{\partial z_i}\right|$ függvények pedig korlátosak B_0' illetve B_i' korláttal $(i = 1, 2, \dots, n)$. Legyen t egy tetszőleges eleme C_ε-nak, és legyen t' egy eleme $C_{\varepsilon - |t-t'|}$-nak, amelyre $|t - t'| < \delta$. Ekkor létezik olyan $t_0 \in T_0$, amelyre $|t - t_0| < \delta_{t_0}$. A továbbiakban rögzítsük ezt a t_0-t, a hozzá tartozó y_0-t, $V = V_{t_0}$-t és $W = W_{t_0}$-t. Nyilván $t, t' \in V$. Legyen R egy tetszőleges valós szám, amelyre $0 < R < R_0$. Integráljuk a függvényegyenlet mindkét oldalát az $RS + y_0$ szimplex felett y szerint. Azt kapjuk, hogy

$$cR^k f(t) = \int_{RS+y_0} h(t, y, f(g_1(t,y)), \dots, f(g_n(t,y)))\, dy,$$

ahol $c > 0$ az S szimplex mértéke. Innen

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| = \frac{1}{cR^k} \bigg| \int_{RS+y_0} & h(t, y, f(g_1(t,y)), \dots, f(g_n(t,y))) \\ & - h(t', y, f(g_1(t',y)), \dots, f(g_n(t',y)))\, dy \bigg|. \end{aligned}$$

Hogy a bal oldalra egy jó felső becslést kapjunk, a

$$\begin{aligned} & h(t, y, f(g_1(t,y)), \dots, f(g_n(t,y))) \\ & - h(t', y, f(g_1(t',y)), \dots, f(g_n(t',y))) \end{aligned}$$

különbség egy jó felső becslésére van szükségünk. Alkalmazhatjuk a Taylor-tételt a h függvényre a

$$z = (t, y, z_1, \dots, z_n) \quad \text{és} \quad z' = (t', y, z_1', \dots, z_n')$$

pontokkal, ahol $t', t \in V$, $y \in W$, $z_i = f(g_i(t,y))$ és $z_i' = f(g_i(t',y))$, ha $i = 1, \dots, n$. A z és z' pontok, így az őket összekötő szakasz is, benne van a

$$(t_0, y_0, f(g_1(t_0, y_0)), \dots, f(g_n(t_0, y_0))$$

középpontú és $(n+2)\eta_{t_0}$ sugarú zárt gömbben, amely része K'-nek. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h(z) - h(z') = & \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z + (1-\tau)z')(t - t')\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z')(z_i - z_i')\, d\tau. \end{aligned}$$

Felhasználva ezt, és elhagyva a változók kiírását, azt kapjuk, hogy

$$cR^k|f(t')-f(t)| = \Big|\int_{RS+y_0}\Big(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z+(1-\tau)z')(t-t')\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z')(z_i-z_i')\,d\tau\Big)\,dy\Big|.$$

A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával $n+1$ tagot kapunk a jobb oldalon. Az első tagra a triviális $cR^kB_0'|t'-t|$ felső korlátot kapjuk, ahol B_0' az $\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|$ felső korlátja. Legyen $z_i^0 = f(g_i(t,y_0))$ $(i=1,2,\dots,n)$, és legyen $z^0 = (t,y_0,z_1^0,\dots,z_n^0)$. Ha h_i' jelöli a $\frac{\partial h}{\partial z_i}$ parciális derivált értékét a z^0 pontban, akkor a többi tagot úgy írhatjuk, mint

$$\int_{RS+y_0}\int_0^1\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z')-h_i'\right)(z_i-z_i')\,d\tau\,dy + h_i'\int_{RS+y_0}(z_i-z_i')\,dy$$

normáját. Először ezen összeg első tagjának normájára adunk egy felső becslést. $|z_i-z_i'|$ egy felső becslése $\omega(L|t-t'|)$, mivel L Lipschitz-konstans g_i számára $V\times W$-n. Innen

$$\left|\int_{RS+y_0}\int_0^1\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z')-h_i'\right)(z_i-z_i')\,d\tau\,dy\right| \le \omega(L|t-t'|)\int_{RS+y_0}\int_0^1\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z')-h_i'\right|\,d\tau\,dy.$$

Szükségünk van a $\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z')-\frac{\partial h}{\partial z_i}(z^0)\right|$ különbség becslésére. Ez a különbség nem nagyobb, mint L_i'-ször a $\tau z+(1-\tau)z'-z^0$ különbség normája, azaz L_i'-ször a maximális távolság a z' és $z^0=(t,y_0,z_1^0,\dots,z_n^0)$ vektorok között, ahol L_i' a Lipschitz-konstans $\frac{\partial h}{\partial z_i}$ számára. A maximális távolság z' és z^0 között $|t-t'|+R+n\omega(L(|t-t'|+R))$-vel becsülhető. Így a

$$cR^k\omega(|t-t'|L)L_i'\Big(|t-t'|+R+n\omega\big(L(|t-t'|+R)\big)\Big)$$

felső korlátot kapjuk az első tagra.

Hogy a második tagra is kapjunk egy felső korlátot,

$$\int_{RS+y_0}(z_i-z_i')\,dy = \int_{RS+y_0}\left(f(g_i(t,y))-f(g_i(t',y))\right)\,dy$$

abszolút értékének becslésére van szükségünk, mivel $|h_i'|$ triviálisan korlátos a B_i' felső korlátjával $\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}\right|$-nek. Erre az integrálra a $|t-t'|c_0R^{k-1}$ felső korlátot kapjuk a $c_0=\sup\{c_{t_0}: t_0\in T_0\}$ jelöléssel.

Összegezve a fenti becsléseket, az

$$|f(t) - f(t')| \le B_0'|t-t'| + \sum_{i=1}^{n} B_i'|t-t'|c_0/(cR) \\ + \omega(L|t-t'|)\sum_{i=1}^{n} L_i'\Big(|t-t'| + R + n\omega\big(L(|t-t'|+R)\big)\Big)$$

becsléshez jutunk. Ha $|t-t'| \le R$, ez a becslés

$$|f(t) - f(t')| \le c_1|t-t'| + c_2\omega(|t-t'|)R + c_3\omega(|t-t'|)\omega(R) + c_4|t-t'|/R$$

alakban írható, ahol c_1, c_2, c_3 és c_4 nem függ t-től, t'-től és R-től. Szuprémumot véve először a jobb, majd a bal oldalon $t \in C_\varepsilon$, $t' \in C_{\varepsilon-|t-t'|}$, $|t-t'| \le r$-re, azt kapjuk, hogy

$$\omega(r) \le c_1 r + c_2\omega(r)R + c_3\omega(r)\omega(R) + c_4 r/R,$$

ha $0 \le r \le \delta$. Ha úgy választjuk R-et, hogy teljesítse a $c_2R + c_3\omega(R) \le 1/2$ feltételt — ami mindig megtehető, szükség esetén csökkentve δ-t — azt kapjuk, hogy

$$\omega(r) \le 2(c_1 + c_4/R)r,$$

valahányszor $0 \le r \le \delta$. Ez azt mutatja, hogy f lokálisan Lipschitz függvény C-n. Egy tetszőleges $t \in T$-re az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy t belső pontja C-nek, mivel helyettesíthetjük C-t C és a t egy kompakt környezetének az uniójával. Így a bizonyítás teljes.

11.6. Példa. Rendszerint a fenti tételt némi kiegészítő érveléssel érdemes használni: egy egyszerű példával illusztráljuk ezt. Komplikáltabb esetek hasonlóan kezelhetők. (Lásd az alkalmazásoknál a 21.12 pontban a „kockakettőzés egyenletét”, és a 23. paragrafusban a Weierstrass-féle szigmafüggvény karakterizációját.) Tegyük fel, hogy f eleget tesz az

$$f(t) = h(t, y, f(A_1t + B_1y), f(A_2t + B_2y), \dots, f(A_nt + B_ny)), \quad t, y \in \mathbb{R}^m$$

függvényegyenletnek, ahol $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ az ismeretlen függvény, h adott $\mathcal{C}^\infty$ függvény, A_i, B_i mátrixok m sorral és m oszloppal, B_i nem szinguláris és $\|A_i\| < 1$. Ekkor minden folytonos megoldás lokálisan Lipschitz (innen minden mérhető vagy Baire-tulajdonságú megoldás $\mathcal{C}^\infty$). Ennek bizonyítására rögzítsünk egy $N > 0$ természetes számot, legyen T egy origó középpontú N sugarú nyílt gömb, válasszunk egy $0 < r < 1$ számot úgy, hogy $\|A_i\| + r\|B_i\| < 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ teljesüljön, és legyen $D = T \times Y$, ahol Y egy origó középpontú rN sugarú nyílt gömb. Tételünket felhasználva, azt kapjuk, hogy f lokálisan Lipschitz T-n, innen mindenütt, mivel N tetszőleges.

12.§ Hölder-folytonos megoldások

Itt egyetlen tételt bizonyítunk, amely lehet, hogy hasznos láncszemnek bizonyul a „folytonosságból következik a lokális Lipschitz-tulajdonság” lépés teljes általánosságban való bizonyításában. Mindenesetre mutatja, hogy az 1.17 probléma feltételei mellett, ha egy megoldás lokális Hölder-feltételnek tesz eleget valamely $0 < \alpha < 1$-re, akkor lokális Hölder-feltételnek tesz eleget *minden* $0 < \alpha < 1$-re. Ennek a tételnek első, csak valós változós függvényekre vonatkozó bizonyítása (Járai [81]) eszközként a Campanato-terek elméletének alaplemmáját használta fel, amely a parciális differenciálegyenletek regularitás-elméletéből ismert híres klasszikus Morrey-lemma általánosítása. (További hivatkozásokat illetően lásd Zeidler könyvét, [165], II/A, 90–93. o.) Később sikerült egyszerűbb bizonyítást találni, és a tételt magasabb dimenzióra általánosítani. (Járai [80].) Ez az egyszerűbb bizonyítás képezte aztán a 11.5 tétel bizonyításának alapját.

12.1. Tétel. *Legyen $0 < \alpha < 1$, és legyenek Z, Z_i euklidészi terek nyílt részhalmazai ($i = 1, 2, \dots, n$). Legyenek T, Y és X_i az $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^k$ és $\mathbb{R}^{r_i}$ nyílt részhalmazai. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nek. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$ ($i = 1, \dots, n$), $g_i : D \to X_i$ ($i = 1, \dots, n$), $h : D \times Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) h kétszer folytonosan differenciálható;

(3) g_i kétszer folytonosan differenciálható D-n, és minden $t \in T$-hez létezik egy y, amelyre $(t, y) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t, y)$ rangja r_i, ha $i = 1, \dots, n$;

(4) az f_i, $i = 1, \dots, n$ függvények lokálisan Hölder folytonosak α kitevővel.

Ekkor f is lokálisan Hölder folytonos $2\alpha/(\alpha + 1)$ kitevővel.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy minden $t_0 \in T$ pontra az f függvény Hölder folytonos a t_0 egy környezetén $2\alpha/(1+\alpha)$ kitevővel. Az f_i-t a koordinátáival helyettesítve, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $Z_i \subset \mathbb{R}$, ha $i = 1, \dots, n$. Válasszunk (3) szerint egy y_0-at t_0-hoz. A 11.2 lemma szerint létezik t_0-nak egy konvex nyílt V_0 környezete, egy nem üres belsejű szimplex az egységgömbben, valamint $R_0 > 0$ és C konstansok úgy, hogy az y_0 középpontú és R_0 sugarú W_0 zárt gömbre $V_0 \times W_0 \subset D$, és a

$$t \mapsto \int_{RS+y_0} f_i(g_i(t, y))\, dy$$

leképezések folytonosan differenciálhatóak V_0-on, gradiensük pedig korlátos CR^{k-1} korláttal. Szükség esetén csökkentve V_0-at és R_0-at feltehetjük, hogy $R_0 \le 1$ és g_i Lipschitz-függvény L Lipschitz-konstanssal $V_0 \times W_0$-n. Hasonlóan, feltehetjük, hogy f_i Hölder folytonos α kitevővel és H Hölder konstanssal, $|f_i|$ korlátos B korláttal $g_i(V_0 \times W_0)$-n, továbbá egy konvex zárt részhalmazon, amely tartalmazza a

$$V_0 \times W_0 \times f_1(g_1(V_0 \times W_0)) \times \cdots \times f_n(g_n(V_0 \times W_0))$$

halmazt, a $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ függvények Lipschitz-folytonosak L_i' Lipschitz-konstanssal, és a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|$ és $\left|\dfrac{\partial h}{\partial z_i}\right|$ függvények korlátosak B_0' illetve B_i' korláttal $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Rögzítsük R_0-at, V_0-at, W_0-at és y_0-at. Meg fogjuk mutatni, hogy f lokálisan Hölder folytonos V_0-on $2\alpha/(1+\alpha)$ kitevővel. Jelöljék t, t' tetszőleges elemeit V_0-nak, és legyen $0 < R < R_0$. Integráljuk a függvényegyenlet mindkét oldalát az $RS + y_0$ szimplex felett. Ekkor

$$cR^k f(t) = \int_{RS+y_0} h(t, y, f_1(g_1(t,y)), \ldots, f_n(g_n(t,y)))\, dy,$$

ahol $c > 0$ az S szimplex mértéke. Ebből

$$\begin{aligned}|f(t) - f(t')| = \frac{1}{cR^k}\bigg| \int_{RS+y_0} & h(t, y, f_1(g_1(t,y)), \ldots, f_n(g_n(t,y))) \\ & - h(t', y, f_1(g_1(t',y)), \ldots, f_n(g_n(t',y)))\, dy\bigg|.\end{aligned}$$

Hogy a bal oldalra egy jó felső becslést kapjunk, a

$$h(t, y, f_1(g_1(t,y)), \ldots, f_n(g_n(t,y))) - h(t', y, f_1(g_1(t',y)), \ldots, f_n(g_n(t',y)))$$

különbség egy felső becslésére van szükségünk. Alkalmazhatjuk a Taylor-tételt a h függvényre a

$$z = (t, y, z_1, \ldots, z_n) \quad \text{és} \quad z' = (t', y, z_1', \ldots, z_n')$$

pontokkal, ahol $t', t \in V$, $y \in W$, $z_i = f_i(g_i(t,y))$ és $z_i' = f_i(g_i(t',y))$, ha $i = 1, \ldots, n$. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}h(z) - h(z') = & \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z + (1-\tau)z')(t - t')\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z')(z_i - z_i')\, d\tau.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva, elhagyva a változók kiírását, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}cR^k|f(t') - f(t)| = \bigg| \int_{RS+y_0} \Big(& \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z + (1-\tau)z')(t - t')\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z')(z_i - z_i')\, d\tau\Big)\, dy\bigg|.\end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával $n+1$ tagot kapunk a jobb oldalon. Az első tagra a triviális $cR^kB'_0|t'-t|$ felső korlátot kapjuk, ahol B'_0 a $\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|$ felső korlátja. Legyen $z_i^0 = f_i(g_i(t,y_0))$ $(i=1,2,\dots,n)$, és legyen $z^0 = (t, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$. Ha h'_i jelöli a $\frac{\partial h}{\partial z_i}$ parciális derivált értékét a z^0 pontban, akkor a többi tagot átírhatjuk az

$$\int_{RS+y_0}\int_0^1 \left(\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z') - h'_i\right)(z_i - z'_i)\,d\tau\,dy + h'_i\int_{RS+y_0}(z_i-z'_i)\,dy$$

formába. Először ezen összeg első tagjának abszolút értékére adunk felső becslést. $|z_i - z'_i|$ egy felső becslése $H(L|t-t'|)^\alpha$, ahol H egy Hölder konstans f_i számára, és L Lipschitz-konstans g_i számára. Innen

$$\begin{aligned}&\left|\int_{RS+y_0}\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z') - h'_i)(z_i - z'_i)\,d\tau\,dy\right|\\ &\le H(L|t-t'|)^\alpha\int_{RS+y_0}\int_0^1\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z') - h'_i\right|\,d\tau\,dy.\end{aligned}$$

Szükségünk van még a $\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z+(1-\tau)z') - \frac{\partial h}{\partial z_i}(z^0)\right|$ különbség felső becslésére. Ez nem nagyobb, mint L'_i szorozva $\tau z+(1-\tau)z' - z^0$ normájával, azaz L'_i-szer a maximális távolság a z' és $z^0 = (t, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$ vektorok között, ahol L'_i a Lipschitz-konstans $\frac{\partial h}{\partial z_i}$ számára. A maximális távolság z' és z^0 között $|t-t'| + R + nH(L(|t-t'|+R))^\alpha$-val becsülhető. Így a

$$cR^kH(|t-t'|L)^\alpha L'_i(|t-t'| + R + nH(L(|t-t'|+R))^\alpha)$$

felső korlátot kapjuk az első tagra.

Ahhoz, hogy a második tagra felső korlátot kapjunk,

$$\int_{RS+y_0}(z_i - z'_i)\,dy = \int_{RS+y_0} f_i(g_i(t,y)) - f_i(g_i(t',y))\,dy$$

abszolút értékének egy felső korlátjára van szükségünk, mivel $|h'_i|$ triviálisan korlátos a B'_i felső korlátjával $\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}\right|$-nek. A lemmából a $|t-t'|CR^{k-1}$ felső korlátot kapjuk erre az integrálra.

Összegezve mindezeket a becsléseket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|f(t)-f(t')| &\le B'_0|t-t'| + \sum_{i=1}^n B'_i|t-t'|C/R\\ &\quad + H(L|t-t'|)^\alpha\sum_{i=1}^n L'_i(|t-t'| + R + nH(L(|t-t'|+R))^\alpha).\end{aligned}$$

Ha $|t-t'|\le R$, ez

$$|f(t)-f(t')| \le C_0|t-t'| + C_1|t-t'|^\alpha R^\alpha + C_2|t-t'|/R$$

alakba írható, ahol C_0, C_1 és C_2 nem függ t-től, t'-től és R-től. Ha egy olyan R-et választunk, amely teljesíti az $R = |t-t'|^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$ feltételt, akkor azt kapjuk, hogy

$$|f(t) - f(t')| \le (C_0 + C_1 + C_2)|t-t'|^{2\alpha/(1+\alpha)},$$

ha $|t - t'| < R_0^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}$ és $t, t' \in V_0$. Ez mutatja, hogy f lokálisan Hölder folytonos V_0-on $2\alpha/(1+\alpha)$ Hölder-kitevővel, amiből következik a tétel.

12.2. Következmény. *Az 1.17 probléma feltételei mellett, ha a h és g_i függvények kétszer folytonosan differenciálhatóak, akkor minden f megoldás, amely lokálisan Hölder-folytonos valamely $0 < \alpha < 1$ kitevővel, lokálisan Hölder-folytonos minden $0 < \alpha < 1$ kitevővel.*

Bizonyítás. Ha f Hölder-folytonos valamely $\alpha_0 = \alpha$, $0 < \alpha_0 < 1$ kitevővel, akkor az előző tétel szerint Hölder-folytonos minden $\alpha_n = 2\alpha_{n-1}/(1+\alpha_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ kitevővel is. Mivel $\alpha_n \uparrow 1$, kapjuk az állítást.

13.§ Korlátos változású megoldások

Mint a jelöléseknél leírtuk, többváltozós korlátos változású függvényekkel kapcsolatban Giusti [48] könyvének terminológiáját követjük, így, szigorúan véve, ez a fogalom nem az egyváltozós korlátos változású függvények fogalmának általánosítása, hanem a korlátos lényeges változással rendelkező függvényeké.

Egyetlen tételt fogunk bizonyítani, mely szerint lokálisan korlátos változású megoldások lokális Lipschitz-feltételnek tesznek eleget. A következő lemma tételünk bizonyításának a kulcsa.

13.1. Lemma. *Legyenek V, W és U nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^k$ illetve $\mathbb{R}^r$-nek, $f : U \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény, $g : V \times W \to U$ folytonosan differenciálható függvény, $t_0 \in V$, $y_0 \in W$, és tegyük fel, hogy $\dfrac{\partial g}{\partial y}(t_0, y_0)$ rangja r. Ekkor létezik olyan $V_0 \subset V$ környezete t_0-nak, $B \subset W$ gömb y_0 középponttal, és egy C konstans, hogy*

$$\int_B |f(g(t', y)) - f(g(t, y))|\, dy \le C|t' - t|,$$

ha $t', t \in V_0$.

Bizonyítás. Az $y \mapsto g(t, y)$ parciális függvények jelölésére használni fogjuk a g_t jelölést. Szükség esetén kisebb U, V és W halmazokat véve az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy U, V és W korlátos konvex nyílt halmazok, $W = W' \times W''$ ahol $W' \subset \mathbb{R}^r$ és $W'' \subset \mathbb{R}^{k-r}$, g Lipschitz-függvény $V \times W$-n M Lipschitz-konstanssal, továbbá, hogy

$$\frac{\partial g_{t_0}}{\partial y'}(y', y'')$$

determinánsa nem nulla az y_0 pontban, ahol $y' \in W'$, $y'' \in W''$. Jelölje p az $(y', y'') \mapsto y'$ projekciót, ami $\mathbb{R}^k$-t $\mathbb{R}^r$-re képezi. Jelölje g_t^* a $W = W' \times W''$-nek $U \times W''$-be való $(y', y'') \mapsto (g_t(y', y''), y'')$ leképezését. Az $L_0 = {g_{t_0}^*}'(y_0)$ lineáris operátor determinánsa megegyezik

$$\frac{\partial g_{t_0}}{\partial y'}(y_0)$$

determinánsával, így nem nulla. Legyen

$$0 < c < \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|}.$$

Válasszunk L_0-nak egy X konvex nyílt környezetét úgy, hogy minden X-beli L operátor invertálható legyen és teljesüljön rá, hogy

$$c < \frac{1}{2\|L^{-1}\|}.$$

Szükség esetén t_0 egy kis konvex $V_0 \subset V$ környezetét és egy kisebb W-t véve feltehetjük, hogy ${g_t^*}'(y_0) \in X$ és

$$\|{g_t^*}'(y) - {g_t^*}'(y_0)\| < c,$$

ha $t \in V$ és $y \in W$. A két utolsó egyenlőtlenségből

$$\|{g_t^*}'(y) - {g_t^*}'(y_0)\| < \frac{1}{2\|{g_t^*}'(y_0)^{-1}\|},$$

ha $y \in W$ és $t \in V_0$. Az inverz függvény tétel bizonyítása szerint (lásd Rudin [1964], 9.24 tétel) ebből következik, hogy g_t^* homeomorfizmusa W-nek $U \times W''$ egy nyílt részhalmazára. Ennél valamivel erősebb állításra lesz szükségünk. Legyen $t, t' \in V$ és $0 \le \tau \le 1$. Legyen $G_{t,t',\tau}(y) = \tau g_t^*(y) + (1-\tau) g_{t'}^*(y)$. Ugyanazon állításra lesz szükségünk, de erre a függvényre. Mivel $G'_{t,t',\tau}(y) = \tau {g_t^*}'(y) + (1-\tau){g_t^*}'(y)$ és X konvex, ez a lineáris operátor X-ben van. Másrészt,

$$G'_{t,t',\tau}(y) - G'_{t,t',\tau}(y_0) = \tau({g_t^*}'(y) - {g_t^*}'(y_0)) + (1-\tau)({g_t^*}'(y) - {g_t^*}'(y_0)),$$

és így

$$\|G'_{t,t',\tau}(y) - G'_{t,t',\tau}(y_0)\| < c < \frac{1}{2\|G'_{t,t',\tau}(y_0)^{-1}\|}.$$

Ez azt mutatja, hogy alkalmazhatjuk az inverz függvény tétel bizonyítását $G_{t,t',\tau}$-ra, és kapjuk, hogy $G_{t,t',\tau}$ homeomorfizmusa W-nek $U \times W''$-be. Megjegyezzük továbbá, hogy a

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \le \frac{\|T - S\| \|T^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\| \|T^{-1}\|}$$

becslésből, amely teljesül, ha $\|T - S\| < 1/\|T^{-1}\|$, azt kapjuk, hogy $\|g_t^{*\prime}(y)^{-1}\| \leq 1/c$ és $\|G'_{t,t',\tau}(y)^{-1}\| \leq 1/c$, valahányszor $t, t' \in V_0$, $0 \leq \tau \leq 1$ és $y \in W$; innen g_t^{*-1} és $G_{t,t',\tau}^{-1}$ Lipschitz-függvények $g_t^*(W)$-n illetve $G_{t,t',\tau}(W)$-n $1/c$ Lipschitz-konstanssal.

Most már készen állunk arra, hogy bebizonyítsuk a lemmát — először egy folytonosan differenciálható f függvényre. Legyen B egy tetszőleges zárt gömb W-ben y_0 középponttal. A Taylor-tételt és az $x^* = G_{t,t',\tau}(y)$ helyettesítést használva, a következő becsléshez jutunk:

$$\begin{aligned}
&\int_B |f(g(t,y)) - f(g(t',y))|\, dy \\
&\quad = \int_B \left| \int_0^1 f'(\tau g(t,y) + (1-\tau) g(t',y))\, (g(t,y) - g(t',y))\, d\tau \right| dy \\
&\quad \leq \int_0^1 \int_B |f'(\tau g(t,y) + (1-\tau) g(t',y))| M |t - t'|\, dy\, d\tau \\
&\quad = M|t - t'| \int_0^1 \int_{G_{t,t',\tau}(B)} |f'(p(x^*))| J(G_{t,t',\tau}^{-1})(x^*)\, dx^*\, d\tau \\
&\quad \leq \frac{M|t - t'|}{c^k} \int_0^1 \int_{G_{t,t',\tau}(B)} |f'(p(x^*))|\, dx^*\, d\tau \\
&\quad \leq \frac{M|t - t'|}{c^k} \int_0^1 \int_{U \times W''} |f'(p(x^*))|\, dx^*\, d\tau \\
&\quad = \frac{M|t - t'|}{c^k} \int_U \int_{W''} |f'(x)|\, dy''\, dx = \frac{M|t - t'||W''|}{c^k} \int_U |f'(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

ahol $|W''|$ a W'' Lebesgue-mértéke, és J a Jacobi-determináns abszolút értéke.

Végül, hogy a lemma állítását kapjuk, az 1.17 tételt fogjuk használni Giusti [48] könyvéből. E szerint a tétel szerint létezik U-n $\mathcal{C}^\infty$-függvényeknek egy olyan sorozata, hogy

$$\lim_{j \to \infty} \int_U |f_j - f| = 0$$

és

$$\lim_{j \to \infty} \int_U |f_j'| = \int_U |f'|.$$

Ezt a tételt felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_B |f(g(t,y)) - f(g(t',y))|\,dy &\le \int_B |f(g(t,y)) - f_j(g(t,y))|\,dy \\
&\quad + \int_B |f_j(g(t,y)) - f_j(g(t',y))|\,dy + \int_B |f_j(g(t',y)) - f(g(t',y))|\,dy \\
&\le \frac{M|t-t'||W''|}{c^k} \int_U |f_j'(x)|\,dx + \int_{g_t^*(B)} |f(p(x^*)) - f_j(p(x^*))| J(g_t^{*\,-1})(x^*)\,dx^* \\
&\quad + \int_{g_{t'}^*(B)} |f(p(x^*)) - f_j(p(x^*))| J(g_{t'}^{*\,-1})(x^*)\,dx^* \\
&\to \frac{M|t-t'||W''|}{c^k} \int_U |f'| + 0 + 0,
\end{aligned}$$

ha $j \to \infty$, valahányszor $t, t' \in V$. Ezzel a lemma bizonyítása teljes.

13.2. Tétel. *Legyenek T, Y, $X_1, \dots, X_n$ nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^k$ illetve $\mathbb{R}^{r_1}, \dots, \mathbb{R}^{r_n}$-nek, és Z, $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ euklidészi terek nyílt részhalmazai. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \cdots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f_0(y), f_1(g_1(t,y)), \dots, f_n(g_n(t,y)));$$

(2) h folytonosan differenciálható;

(3) g_i folytonosan differenciálható D-n és minden $t \in T$-hez létezik olyan y, hogy $(t,y) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t,y)$ rangja r_i, ha $i = 1, \dots, n$;

(4) f_0 folytonos és az f_i, $i = 1, \dots, n$ függvények folytonosak és lokálisan korlátos változásúak.

Ekkor f lokálisan Lipschitz függvény.

Bizonyítás. Az f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ függvényt a koordinátáival helyettesítve, feltehetjük, hogy minden f_i valós értékű. Legyen $t_0 \in T$ és válasszuk meg y_0-at (3) szerint. Válasszunk olyan U_i nyílt környezetét $g_i(t_0, y_0)$-nak, amelyen f_i korlátos változású, és olyan V, W nyílt környezeteit t_0 illetve y_0-nak, hogy g_i a $V \times W$-t U_i-be képezze. Ha V és W elég kicsik, alkalmazhatjuk a Taylor-formulát a h függvényre $z = (t, y, z_0, z_1, \dots, z_n)$ és $z' = (t', y, z_0, z_1', \dots, z_n)$ pontokkal, ahol $t', t \in V$, $y \in W$, $z_0 = f_0(y)$, $z_i = f_i(g_i(t,y))$ és $z_i' = f_i(g_i(t',y))$, ha $i = 1, \dots, n$. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f(t') - f(t) = h(z') - h(z) &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z' + (1-\tau)z)(t'-t)\,d\tau \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z' + (1-\tau)z)(z_i' - z_i)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Ha V és W elég kicsik, a h parciális deriváltjai korlátosak egy K konstanssal. Az előző lemmát felhasználva választhatunk $V_0 \subset V$ és $B \subset W$-t úgy, hogy a lemma állítása teljesül $i = 1, 2, \dots, n$-re. Mindkét oldalt integrálva B felett, azt kapjuk, hogy

$$|f(t') - f(t)| \cdot |B| \leq K|t' - t| + K \sum_{i=1}^{n} \int_B |f_i(g_i(t', y)) - f_i(g_i(t, y))| \, dy,$$

ahol $|B|$ a B Lebesgue-mértéke. A lemmát felhasználva, ebből következik, hogy f Lipschitz-feltételnek tesz eleget V_0-on.

14.§ Differenciálhatóság

Az egyik előző paragrafusban bebizonyítottuk, hogy összeg alakú függvényegyenletekre a megoldások folytonosságából következik azok folytonos differenciálhatósága. Két másik esetben a folytonosságból csak a lokális Lipschitz-tulajdonság következik. Mint jól ismert, Rademacher tétele szerint (lásd Federer [42], 3.1.6) egy $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény λ^m-majdnem mindenütt differenciálható. Hasonló állítás igaz minden, valamely euklidészi tér egy nyílt részhalmazát egy másik euklidészi térbe képező lokálisan Lipschitz függvényre. (Lásd, általánosabban, Sztyepanov tételét Federer [42] könyvében, 3.1.9.)

Ebben a paragrafusban a függvényegyenletek 1.7 pontban megadott általános típusára meg fogjuk mutatni, hogy a majdnem mindenütti differenciálhatóságból következik a folytonos differenciálhatóság. A bizonyításban fel fogjuk használni a mérhető megoldások folytonosságával kapcsolatos eredményeket. Az előbb említett tételekkel együtt így a megoldások lokális Lipschitz-tulajdonságából azok folytonos differenciálhatóságára következtethetünk. Lebesgue tétele értelmében, valós változós valós értékű, monoton vagy korlátos változású megoldásokra, illetve valós változós vektor értékű korlátos változású megoldásokra is alkalmazható ez az állítás, és kapjuk a folytonos differenciálhatóságot. (Ezt először más módszerrel bizonyítottam a [82] dolgozatban.) Szükségünk van azonban arra, hogy egy majdnem mindenütt differenciálható függvény deriváltja Lebesgue-mérhető. Ennél jóval többet fogunk bebizonyítani. Megmutatjuk, hogy egy euklidészi tér egy nyílt részhalmazán értelmezett, szeparábilis Banach-térbeli értékű függvény deriváltja Borel-halmazon van értelmezve és Borel-függvény. Ez az eredmény a Járai [70] dolgozatban került publikálásra, és általánosítja a Federer könyvében található, *folytonos* függvényekre vonatkozó hasonló tételt ([42], 3.1.1.). Úgy vélem, az eredmény önmagában is érdekes.

14.1. Tétel. *Legyen U az X véges dimenziós normált tér nyílt részhalmaza, Y szeperábilis Banach-tér, és $f : U \to Y$ egy tetszőleges függvény. Ekkor $(f')^{-1}(F)$ az $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ halmazosztályban van az X-et Y-ba képező folytonos lineáris operátorok $\mathcal{L}(X, Y)$ normált terének bármely F zárt részhalmazára.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $U = X$. Jól ismert (lásd például Hewitt és Stromberg [55] könyvét, 78. o.), hogy az f összes folytonossági pontjainak C halmaza egy $\mathcal{G}_\delta$-halmaz X-ben. Világos, hogy $\mathcal{L}(X,Y)$ szeparábilis Banach-tér. Válasszunk egy $L_1, L_2, \dots$ sűrű halmazt F-ben.

Ha i, j és k pozitív egészek, legyen

$$C_{i,j,k} = \{x \ :\ x \in C,\ |f(x+h) - f(x) - L_k(h)| \le |h|/i, \text{ ha } |h| < 1/j\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $C_{i,j,k}$ relatív zárt részhalmaza C-nek. Legyen $x \in C \setminus C_{i,j,k}$. Ekkor van olyan $h \in X$, amelyre $|h| < 1/j$, de

$$|f(x+h) - f(x) - L_k(h)| > \frac{|h|}{i}.$$

Definiáljuk h'-t a $h' = h + x - x'$ összefüggéssel, ha $x' \in X$. Vegyük észre, hogy $x' + h' = x + h$, így $f(x' + h') = f(x+h)$. Mivel f folytonos x-ben, van olyan $\delta > 0$, hogy $|h'| < 1/j$ és

$$|f(x'+h') - f(x') - L_k(h')| > \frac{|h'|}{i},$$

ha $|x - x'| < \delta$.

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$(f')^{-1}(F) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,j,k}. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy $f'(x) = L \in F$. Ekkor $x \in C$, és minden i-hez van olyan $L_{k(i)}$ és $j(i)$, amelyre

$$\|L - L_{k(i)}\| < \frac{1}{2i} \quad \text{és} \quad |f(x+h) - f(x) - L(h)| \le \frac{|h|}{2i},$$

ha $|h| < j(i)$. Ebből

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - L_{k(i)}(h)| &\le |f(x+h) - f(x) - L(h)| + |L(h) - L_{k(i)}(h)| \\ &\le \frac{|h|}{2i} + \frac{|h|}{2i} = \frac{|h|}{i}, \end{aligned}$$

ha $|h| < 1/j(i)$, azaz $x \in C_{i,j(i),k(i)}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $x \in C$ és minden i-hez van olyan $j(i)$ és $k(i)$, amelyre

$$|f(x+h) - f(x) - L_{k(i)}(h)| \le \frac{|h|}{i},$$

ha $|h| < 1/j(i)$. Legyen i_1 és i_2 két pozitív egész, és becsüljük meg az $\|L_{k(i_1)} - L_{k(i_2)}\|$ távolságot. Ha $|h| < 1/j(i_1)$ és $|h| < 1/j(i_2)$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |L_{k(i_1)}(h) - L_{k(i_2)}(h)| &\le |L_{k(i_1)}(h) - f(x+h) + f(x)| \\ &\quad + |f(x+h) - f(x) - L_{k(i_2)}(h)| \le \frac{|h|}{i_1} + \frac{|h|}{i_2}, \end{aligned}$$

így
$$\|L_{k(i_1)} - L_{k(i_2)}\| \le \frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2}.$$
Ez azt mutatja, hogy $L_{k(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Cauchy-sorozat $\mathcal{L}(X, Y)$-ban. Jelölje L ennek a sorozatnak a határértékét. Nyilván $L \in F$. Egy tetszőleges i-hez van olyan $i^* \ge i$, amelyre $\|L_{k(i^*)} - L\| < 1/i$. Innen
$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x) - L(h)| &\le |f(x+h) - f(x) - L_{k(i^*)}(h)| + |L_{k(i^*)}(h) - L(h)| \\ &\le \frac{|h|}{i^*} + \frac{|h|}{i} \le \frac{2|h|}{i},\end{aligned}$$
ha $|h| < 1/j(i^*)$, és ez azt mutatja, hogy L az f függvény x-beli differenciálja.

Most (1)-ből, és abból, hogy C egy $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, következik, hogy léteznek olyan $F_{s,t}$ zárt részhalmazai X-nek, hogy
$$C = \bigcap_{s=-\infty}^{0} \bigcup_{t=1}^{\infty} F_{s,t}$$
és
$$(f')^{-1}(F) = \Big(\bigcap_{s=-\infty}^{0} \bigcup_{t=1}^{\infty} F_{s,t}\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} F_{s,t}\Big) = \bigcap_{s=-\infty}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} F_{s,t},$$
azaz $(f')^{-1}(F) \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$.

14.2. Tétel. *Legyen Z normált tér, Z_0 egy euklidészi tér nyílt részhalmaza, a Z_i-k szeparábilis Banach-terek nyílt részhalmazai ($i = 1, 2, \ldots, n$), legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, T nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^s$-nek, és X_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $g_i : D \to X_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $f_0 : Y \to Z_0$, $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re
$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$
(2) h és a $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ valamint $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) parciális deriváltjai folytonosak;

(3) az f_i függvény λ^{r_i}-majdnem mindenütt differenciálható ($i = 1, 2, \ldots, n$);

(4) g_i folytonosan differenciálható, és van olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és a $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t_0, y_0)$ mátrix rangja r_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Ekkor f folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Válasszunk T' és Y' kompakt lezártú nyílt halmazokat, amelyekre $(t_0, y_0) \in T' \times Y' \subset \overline{T'} \times \overline{Y'} \subset D$, és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\lambda^{r_i}\left(g_{i,t}(B)\right) \ge \delta$, ha $t \in \overline{T'}$, $B \subset \overline{Y'}$, és $\lambda^k(B) \ge \varepsilon$. Ilyen nyílt halmazok léteznek a 3.10 segédtétel szerint.

Most legyen D' az összes olyan (t',y') párok halmaza, amelyre $t'\in T'$, $y'\in Y'$, és f_i differenciálható a $g_i(t',y')$ pontban, ha $1\le i\le n$. Legyen $X_i'=g_i(\overline{T'}\times\overline{Y'})$ $(i=1,2,\dots,n)$. Tegyük fel, hogy $(t',y')\in D'$, és rögzítsük y'-t. A

$$t\mapsto h\left(t,y',f_0(y'),f_1\left(g_1(t,y')\right),\dots,f_n\left(g_n(t,y')\right)\right)$$

függvényt fogjuk vizsgálni. Ez a függvény definiálva van a t' egy környezetében, és differenciálható t'-ben. Ebből f differenciálható t'-ben, és

$$\begin{aligned}f'(t')&=\frac{\partial h}{\partial t}\left(t',y',f_0(y'),f_1\left(g_1(t',y')\right),\dots,f_n\left(g_n(t',y')\right)\right)\\&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial z_i}\left(t',y',f_0(y'),f_1\left(g_1(t',y')\right),\dots,f_n\left(g_n(t',y')\right)\right)f_i'\left(g_i(t',y')\right)\frac{\partial g_i}{\partial t}(t',y').\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $f',f_0,f_1,f_1',\dots,f_n,f_n'$ eleget tesznek egy

$$f'(t')=H\left(t',y',f_0(y'),\dots,f_n\left(g_n(t',y')\right),f_n'\left(g_n(t',y')\right)\right) \tag{5}$$

típusú egyenletnek minden $(t',y')\in D'$-re. A 8.1 tételt fogjuk alkalmazni erre az egyenletre, annak bizonyítására, hogy f' folytonos T'-n. Legyen t_0' egy tetszőleges eleme T'-nek. Meg akarjuk mutatni, hogy az (5) egyenlet teljesíti a 8.1 tétel feltételeit.

Világos, hogy a függvények értelmezési tartományára és értékkészletére vonatkozó feltételek teljesülnek, azzal az eltéréssel, hogy az f_i', $(1\le i\le n)$ függvények csak majdnem mindenütt vannak definiálva. Ezen nagyon könnyű segíteni: válasszunk egy tetszőleges kiterjesztését f_i'-nek X_i'-re. Ekkor 8.1.(1) és 8.1.(4) teljesülnek, és az előző tétel szerint teljesül 8.1.(3) is. (Az, hogy az f_i függvények mérhetőek, könnyen következik abból, hogy majdnem mindenütt differenciálhatóak.) A 8.1.(2) feltétel teljesülése h és g_i parciális deriváltjainak folytonosságán múlik. 8.1.(6) világos $\overline{T'}$ és $\overline{Y'}$ választása miatt. 8.1.(5) bizonyításához vegyük észre, hogy 8.1.(6) szerint az

$$\{y' : y'\in Y', f_i' \text{ nem létezik a } g_i(t',y') \text{ pontban}\}$$

halmaz nulla mértékű minden $t'\in T'$-re, mivel a $g_{i,t'}$ szerinti képe nulla mértékű X_i-ben. Ez azt mutatja, hogy $Y'\backslash D_{t'}'$ nulla mértékű minden $t'\in T'$-re, így $D_{t'}'\cap D_{t_0'}'$ mértéke megegyezik Y' mértékével.

Most alkalmazva a 8.1 tételt kapjuk, hogy f' folytonos T'-n.

15.§ Többszöri differenciálhatóság

Ebben a paragrafusban azt a kérdést tanulmányozzuk, hogy a megoldások p-szeri differenciálhatóságából következik-e a $p+1$-szer való differenciálhatóság. Két tételt bizonyítunk be. A két tétel az f_i és h függvényekre vonatkozó feltételekben különbözik.

15.1. Tétel. *Legyen Z normált tér, Y és Z_0 egy-egy euklidészi tér nyílt részhalmaza, Z_i szeparábilis Banach-tér nyílt részhalmaza $(i = 1, 2, \dots, n)$, T és X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ az $\mathbb{R}^s$, illetve az $\mathbb{R}^{r_i}$ nyílt részhalmazai, D a $T \times Y$ egy nyílt részhalmaza. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $f_0 : Y \to Z_0$, $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \dots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $p > 0$, $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \dots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) minden $\partial_t^{\alpha_0}\partial_{z_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{z_n}^{\alpha_n}h$ parciális derivált folytonos, ahol $0 \le |\alpha| \le p$;

(3) az f_i függvények λ^{r_i}-majdnem mindenütt p-szer differenciálhatóak $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(4) a g_i függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak, és létezik olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t_0, y_0)$ rangja r_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Ekkor az f függvény p-szer folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Ez a tétel $p = 1$-re az előző paragrafus utolsó tételét adja vissza. Bizonyítására hasonlóan fogunk eljárni, mint az előző paragrafusban. Válasszunk T' és Y' kompakt lezártú nyílt halmazokat, amelyekre $(t_0, y_0) \in T' \times Y' \subset \overline{T'} \times \overline{Y'} \subset D$, és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\lambda^{r_i}\left(g_{i,t}(B)\right) \ge \delta$, ha $t \in \overline{T'}$, $B \subset \overline{Y'}$, és $\lambda^k(B) \ge \varepsilon$. Ilyen nyílt halmazok léteznek a 3.10 segédtétel szerint.

Most legyen D' az összes olyan (t', y') párok halmaza, amelyre $t' \in T'$, $y' \in Y'$, és $f_i^{(j)}$ létezik a $g_i(t', y')$ pontban, ha $1 \le j \le p$ és $1 \le i \le n$. Legyen $X_i' = g_i(\overline{T'} \times \overline{Y'})$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, kapjuk, hogy $f', f_0, f_1, f_1', \dots, f_n, f_n'$ eleget tesznek egy

$$f'(t') = h_1\left(t', y', f_0(y'), \dots, f_n\left(g_n(t', y')\right), f_n'\left(g_n(t', y')\right)\right)$$

típusú egyenletnek minden $(t', y') \in D'$-re. Itt h_1 eleget tesz a tételben h-ra kirótt feltételeknek, de p helyett $p-1$-re. Tegyük fel, hogy $(t', y') \in D'$, és rögzítsük y'-t. A

$$t \mapsto h_1\left(t', y', f_0(y'), \dots, f_n\left(g_n(t', y')\right), f_n'\left(g_n(t', y')\right)\right)$$

függvény definiálva van a t' egy környezetében, és differenciálható t'-ben. Ebből f' differenciálható t'-ben, és differenciálva, kapjuk, hogy

$$f'', f_0, f_1, f_1', f_1'', \dots, f_n, f_n', f_n''$$

eleget tesznek egy

$$f''(t') = h_2\left(t', y', f_0(y'), \dots, f_n\left(g_n(t', y')\right), f_n'\left(g_n(t', y')\right), f_n''\left(g_n(t', y')\right)\right)$$

típusú egyenletnek minden $(t', y') \in D'$-re. Indukcióval folytatva, azt kapjuk, hogy $f^{(p)}, f_0, f_1, \dots, f_1^{(p)}, \dots, f_n, \dots, f_n^{(p)}$ eleget tesznek egy

$$f^{(p)}(t') = h_p\big(t', y', f_0(y'), \dots, f_n\left(g_n(t', y')\right), \dots, f_n^{(p)}\left(g_n(t', y')\right)\big) \tag{5}$$

típusú egyenletnek minden $(t', y') \in D'$-re, és h_p folytonos.

Most ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, a 8.1 tételt alkalmazhatjuk erre az egyenletre, és kapjuk, hogy $f^{(p)}$ folytonos T'-n.

15.2. Tétel. *Legyen Z egy euklidészi tér, Y és Z_i euklidészi terek nyílt részhalmazai $(1 \le i \le n)$, továbbá legyenek T és X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^s$-nek, illetve $\mathbb{R}^{r_i}$-nek, és D egy nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $f_i : X_i :\to Z_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $h : D \times Z_1 \times \dots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $p > 0$, $t_0 \in T$, és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) az összes $\partial_t^{\alpha_0} \partial_{z_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{z_n}^{\alpha_n} h$ parciális deriváltak folytonosan differenciálhatóak $0 \le |\alpha| \le p$ esetén;

(3) az f_i, $i = 1, 2, \dots, n$ függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak;

(4) a g_i függvények $p+1$-szer folytonosan differenciálhatóak, és létezik olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t_0, y_0)$ rangja r_i, ha $i = 1, 2, \dots, n$.

Ekkor az f függvény $p+1$-szer folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Legyen $1 \le q \le s$ és differenciáljuk az (1) egyenletet parciálisan t_q szerint. Elhagyva a változók kiírását, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial t_q} = \frac{\partial h}{\partial t_q} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} \frac{\partial h}{\partial z_{i,j}} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_{i,k}} \frac{\partial g_{i,k}}{\partial t_q}.$$

Itt $z_i = (z_{i,j})$, $x_i = (x_{i,k})$, $f_i = (f_{i,j})$ és $g_i = (g_{i,k})$. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy ha $\alpha \in \mathbb{N}^s$ és $|\alpha| = 1$, akkor $\partial^\alpha f$ eleget tesz egy

$$\partial^\alpha f(t) = h_{\alpha,0}(t, y) + \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} h_{\alpha,\beta}(t, y) f_{\alpha,\beta}\left(g_{\alpha,\beta}(t, y)\right)$$

alakú függvényegyenletnek minden $(t, y) \in D$-re. Itt, ha az α vektor q-adik koordinátája egy, a többi nulla, akkor

$$h_{\alpha,0}(t, y) = \frac{\partial h}{\partial t_q}(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y))),$$

$$g_{\alpha,\beta} = g_i \qquad \text{valamely } 1 \le i \le n\text{-re},$$

$$f_{\alpha,\beta} = \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_{i,k}} \qquad \text{valamely } i, j, k\text{-ra},$$

és

$$h_{\alpha,\beta}(t,y) = \frac{\partial h}{\partial z_{i,j}}(t, y, f_1(g_1(t,y)), \dots, f_n(g_n(t,y)))\frac{\partial g_{i,k}}{\partial t_q}(t,y)$$

valamely i, j, k-ra.

Világos, hogy a $h_{\alpha,\beta}$ függvény összes t szerinti, legfeljebb $p-1$-edik parciális deriváltja folytonosan differenciálható, továbbá $f_{\alpha,\beta}$ valamely X_i-t képezi le $\mathbb{R}$-be és $p-1$-szer folytonosan differenciálható, ha $0 \le \beta \le n_\alpha$. Megismételve ezt az eljárást, $|\alpha|$ szerinti indukcióval azt kapjuk, hogy ha $\alpha \in \mathbb{N}^s$, $1 \le |\alpha| \le p$, akkor $\partial^\alpha f$ eleget tesz az

$$(5) \qquad \partial^\alpha f(t) = h_{\alpha,0}(t,y) + \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} h_{\alpha,\beta}(t,y) f_{\alpha,\beta}\left(g_{\alpha,\beta}(t,y)\right)$$

függvényegyenletnek minden $(t,y) \in D$-re. Itt $h_{\alpha,\beta} : D \to Z$ és minden t szerinti legfeljebb $p - |\alpha|$-adik parciális deriváltja folytonosan differenciálható, továbbá $f_{\alpha,\beta} : X_i \to \mathbb{R}$ valamely $1 \le i \le n$-re, és az $f_{\alpha,\beta}$ függvények $p-|\alpha|$-szor folytonosan differenciálhatóak, végül $g_{\alpha,\beta} = g_i$ arra az i-re, amelyre $\operatorname{dmn} f_{\alpha,\beta} = X_i$.

Legyen most $\alpha \in \mathbb{N}^s$, $|\alpha| = p$, és használjuk fel a 11.3 tételt. Azt kapjuk, hogy az f függvény $p+1$-edik parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a t_0 egy környezetében, így az f függvény $p+1$-szer folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

16.§ Analitikusság

Ebben a paragrafusban egyetlen tételt fogunk bizonyítani, amely kezdeti lépésnek tekinthető ebbe az irányba, és a Járai [83] dolgozatban került publikálásra. A témakörrel kapcsolatban meg kell említenünk Páles [134] dolgozatát, amely egy általános módszert tartalmaz, melynek segítségével kétváltozós függvényegyenletek egy általános típusára a $\mathcal{C}^\infty$-megoldásokra differenciálegyenlet kapható; Páles az így kapott differenciálegyenletet használja fel annak bizonyítására, hogy a $\mathcal{C}^\infty$-megoldások egy „nagy" halmazon analitikusak.

Szükségünk lesz egy segédtételre, amely más jelölésekkel megtalálható Federer [42] könyvében, 239. o.

16.1. Segédtétel. *Ha az f és g valós függvények p-szer differenciálhatóak a t, illetve $x = g(t)$ pontban, akkor*

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^p}{dt^p}(f \circ g)(t) = \sum_{\alpha \in S(p)} e_\alpha \frac{d^{\Sigma\alpha} f}{dy^{\Sigma\alpha}}(g(t)) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{d^j g}{dx^j}(t) \right)^{\alpha_j},$$

ahol az összegzés az összes olyan p-tagú nemnegatív egész számokból álló α sorozatok $S(p)$ halmazára történik, amelyekre

$$\sum_{j=1}^{p} j\alpha_j = p,$$

az e_α-k pedig csak az α-tól függő pozitív egész számok. Ha A és B nemnegatív valós számok, akkor

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\alpha \in S(p)} e_\alpha B^{\Sigma\alpha} (\Sigma\alpha)! \prod_{j=1}^{p} (A^j j!)^{\alpha_j} = A^p p! B(B+1)^{p-1}.$$

Bizonyítás. (1) könnyen igazolható p szerinti teljes indukcióval. (2) bizonyításához tekintsük a

$$g(t) = \frac{At}{1 - At},$$

valamint az

$$f(x) = \frac{Bx}{1 - Bx}$$

függvényeket. Ekkor

$$(f \circ g)(t) = \frac{ABt}{1 - A(B+1)t},$$

és a deriváltak könnyen számolhatók. Alkalmazva (1)-et ezekre a függvényekre a $t = 0$ pontban, éppen az állítást kapjuk.

16.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ ismeretlen függvény eleget tesz az*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f\left(g_i(t,y)\right) \qquad \text{minden } t, y \in \,]a,b[\text{-re} \tag{1}$$

függvényegyenletnek, ahol a c_i-k valós konstansok, a

$$g_i :]a,b[\times]a,b[\to]a,b[\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

függvények adottak, és teljesülnek az alábbi feltételek:

(2) $g_i(t,y)$ a t és y közé esik minden $t, y \in]a,b[$-re;

(3) g_i analitikus és

$$\left| \frac{\partial^p g_i}{\partial^k t \partial^{p-k} y}(t,y) \right| \leq A^p p!$$

teljesül minden $t, y \in \,]a,b[$-re és $p = 1, 2, \ldots$-re valamely $0 < A < 1$ konstanssal;

(4) minden $t \in \,]a,b[$-re és $i = 1, 2, \ldots, n$-re az $]a,b[$-nek $]a,b[$-be való $y \mapsto g_i(t,y)$ leképezése szigorúan monoton, és az a $\overline{g_i}(t,x)$ függvény, amelyre az $x \mapsto \overline{g_i}(t,x)$ leképezés az $y \mapsto g_i(t,y)$ inverze, kétszer folytonosan differenciálható az értelmezési tartományán.

Ekkor (1) bármely végtelen sokszor differenciálható f megoldása analitikus $]a,b[$-n.

Bizonyítás. Meg fogjuk mutatni, hogy ha $[c,d]$ az $]a,b[$ egy kompakt részintervalluma, akkor létezik olyan $0 < B < \infty$ valós konstans, hogy

$$\left| \frac{d^p f}{dx^p}(t) \right| \leq B^p p! \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

minden $t \in [c,d]$-re. Ebből következik, hogy f analitikus $]c,d[$-n, és így analitikus $]a,b[$-n is.

Hogy az (5) becslést megkapjuk, p szerinti teljes indukciót fogunk használni. A $\dfrac{df}{dt}$ első deriváltra ilyen B létezése nyilvánvaló, mivel folytonos. Differenciáljuk az (1) egyenlet mindkét oldalát p-szer. Ekkor a bal oldalon $\dfrac{d^p f}{dt^p}(t)$ áll, a jobb oldalon pedig n darab $f\left(g(t,y)\right)$ típusú tag t szerinti p-edik parciális deriváltjának lineáris kombinációja. Egy ilyen parciális derivált, elhagyva az i indexet, az előző segédtétel szerint a következőképpen néz ki:

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} f\left(g(t,y)\right) = \sum_{\alpha \in S(p)} e_\alpha \frac{\partial^{\Sigma\alpha} f}{\partial x^{\Sigma\alpha}}\left(g(t,y)\right) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,y) \right)^{\alpha_j}, \tag{6}$$

ahol $S(p)$ az összes olyan nemnegatív egész számokból álló p-tagú α sorozatok halmaza, amelyekre

$$\sum_{j=1}^{p} j\alpha_j = p,$$

az e_α-k pedig pozitív egész számok.

Integráljuk a p-szeri differenciálással kapott egyenlet mindkét oldalát y szerint c-től d-ig. Ekkor a bal oldalon a

$$(d-c)\frac{d^p f}{dt^p}(t)$$

kifejezést kapjuk, a jobb oldalon pedig (6) szerint

$$\int_c^d \frac{\partial^{\Sigma\alpha} f}{\partial x^{\Sigma\alpha}}(g(t,y)) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,y)\right)^{\alpha_i} dy \tag{7}$$

típusú tagok lineáris kombinációját. Minden ilyen tagban bevezethetünk egy $x = g(t,y)$ helyettesítéssel egy új változót, és azt kapjuk, hogy

$$\int_{g(t,c)}^{g(t,d)} \frac{\partial^{\Sigma\alpha} f}{\partial x^{\Sigma\alpha}}(x) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,\overline{g}(t,x))\right)^{\alpha_j} \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}(t,x)\, dx. \tag{8}$$

Az integrál, mint a felső határ függvénye differenciálhatóságára, valamint a paraméteres integrálok differenciálására vonatkozó tétel szerint a (8) kifejezés differenciálható t szerint, és deriváltja

$$\begin{aligned} &\int_{g(t,c)}^{g(t,d)} \frac{\partial^{\Sigma\alpha} f}{\partial x^{\Sigma\alpha}}(x) \frac{\partial}{\partial t}\left(\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,\overline{g}(t,x))\right)^{\alpha_j} \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}(t,x)\right) dx \\ &+ \frac{d^{\Sigma\alpha} f}{dx^{\Sigma\alpha}}(g(t,d)) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,\overline{g}(t,g(t,d)))\right)^{\alpha_j} \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}(t,g(t,d)) \frac{\partial g}{\partial t}(t,d) \\ &- \frac{d^{\Sigma\alpha} f}{dx^{\Sigma\alpha}}(g(t,c)) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,\overline{g}(g(t,c)))\right)^{\alpha_j} \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}(t,g(t,c)) \frac{\partial g}{\partial t}(t,c). \end{aligned} \tag{9}$$

Ennek a kifejezésnek az abszolút értékére egy felső becslést a következőképpen kaphatunk:

Mivel $\overline{g}_i$ kétszer folytonosan differenciálható értelmezési tartományán, van olyan $1 < E < \infty$ konstans, hogy a

$$H_i = \big\{(t, g_i(t,y)) : t, y \in [c,d]\big\}$$

kompakt halmazon

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \overline{g_i}}{\partial t}(t,x)\right| &\le E, \quad \text{ha} \quad (t,x) \in H_i, \\ \left|\frac{\partial \overline{g_i}}{\partial x}(t,x)\right| &\le E, \quad \text{ha} \quad (t,x) \in H_i, \\ \left|\frac{\partial^2 \overline{g}_i}{\partial x \partial t}(t,x)\right| &\le 2E^2, \quad \text{ha} \quad (t,x) \in H_i. \end{aligned}$$

Így a (9)-ben szereplő második és harmadik tag abszolút értékére a következő felső becslést kaphatjuk:

$$B^{\Sigma\alpha}(\Sigma\alpha)!\prod_{j=1}^{p}\left(A^j j!\right)^{\alpha_j} EA. \tag{10}$$

Az integrálos tag becslése valamivel nehezebb. Ha a zárójelben álló, differenciálandó szorzat utolsó tényezőjét deriváljuk t szerint, akkor a kapott tag becslése

$$\prod_{j=1}^{p}\left(A^j j!\right)^{\alpha_j} 2E^2, \tag{11}$$

ha viszont a j-edik tényezőt deriváljuk, akkor a kapott tag becslése

$$\begin{aligned}&\alpha_j\left(A^j j!\right)^{\alpha_j-1} A^{j+1}(j+1)!(E+1)E\prod_{s\neq j}\left(A^s s!\right)^{\alpha_s}\\ &\qquad = AE(E+1)(j+1)\alpha_j\prod_{s=1}^{p}\left(A^s s!\right)^{\alpha_s}.\end{aligned} \tag{12}$$

Így az integrál teljes felső becslése a következő:

$$\begin{aligned}&(d-c)B^{\Sigma\alpha}(\Sigma\alpha)!\prod_{s=1}^{p}\left(A^s s!\right)^{\alpha_s}\left(2E^2+AE(E+1)\sum_{j=1}^{p}(j+1)\alpha_j\right)\\ &\leq (d-c)4E^2pB^{\Sigma\alpha}(\Sigma\alpha)!\prod_{s=1}^{p}\left(A^s s!\right)^{\alpha_s}.\end{aligned} \tag{13}$$

Összegezve $\alpha\in S(p)$-re, az egy $f\left(g_i(t,y)\right)$ tagból keletkezett tagok felső becsléseként az előző segédtétel felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}&(4E^2p(d-c)+2E)\sum_{\alpha\in S(p)}B^{\Sigma\alpha}(\Sigma\alpha)!\prod_{s=1}^{p}\left(A^s s!\right)^{\alpha_s}\\ &= (4E^2p(d-c)+2E)A^p p!B(B+1)^{p-1}\\ &\leq (4E^2(d-c)+2E)A^p(B+1)^p(p+1)!.\end{aligned} \tag{14}$$

Végül, összegezve i-re, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^{p+1}f}{dt^{p+1}}(t)\right| &\leq \left(A(B+1)\right)^p(p+1)!\left(4E^2+\frac{2E}{d-c}\right)\sum_{i=1}^{n}|c_i|\\ &\leq B^{p+1}(p+1)!\end{aligned} \tag{15}$$

minden $t\in[c,d]$-re, ha

$$B\geq\left(4E^2+\frac{2E}{d-c}\right)\sum_{i=1}^{n}|c_i| \qquad \text{és} \qquad B\geq\frac{A}{1-A}.$$

Ezzel beláttuk, hogy f analitikus $]c,d[$-n.

V. Regularitási tételek sokaságokon

17.§ Regularitás sokaságokon

Mint a bevezetésben említettük, regularitási tételeink nagy része átvihető differenciálható sokaságokra. A legtöbb tétel lokális jellegű, ezeknél az átvitel semmi nehézséget nem okoz. A 11.5 tétel azonban globális jellegű, így bár a bizonyítás mutatja az általánosítás lehetőségét, számos technikai részletben különböző új bizonyítást kell adnunk sokaságok esetében. Az alábbiakban csak a legfontosabb tételek sokaságokra vonatkozó változatát tárgyaljuk, a lokális jellegű tételek esetén az euklidészi térre vonatkozó megfelelő tételre vezetve vissza az általánosabb esetet, és az egyetlen globális jellegű eredmény esetén új bizonyítást adva.

17.1. Tétel: mérhetőségből következik a folytonosság. *Legyen Z teljesen reguláris tér, Z_0 egy σ-kompakt teljesen reguláris tér, Z_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ megszámlálható bázisú teljesen reguláris tér, és T tetszőleges topologikus tér. Legyenek Y és X_i differenciálható sokaságok $(i = 1, 2, \dots, n)$ és D egy nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ és $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \dots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) h folytonos;

(3) az f_i függvény Lebesgue-mérhető az A_i részhalmazán X_i-nek $(1 \le i \le n)$;

(4) minden $g_{i,t}$ parciális leképezés $\mathcal{C}^1$-szubmerzió $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(5) $\bigcap_{i=1}^n g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$ nem nulla mértékű;

(6) a $(t, y) \in D$ és v az Y sokaság y-beli érintőterében van feltételekkel a T és az Y érintőnyalábja szorzatában megadott nyílt halmazon értelmezett, X_i érintőnyalábjába képező $(t, y, v) \mapsto \big(g_{i,t}(y), g'_{i,t}(y)\big)$ leképezés folytonos.

Ekkor f folytonos a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Ezt a tételt a 8.3 tételre fogjuk visszavezetni, koordinátákra áttérve. Mivel megszámlálható sok térkép értelmezési tartománya lefedi Y-t, van olyan φ térkép, hogy W értelmezési tartományának a metszete a

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$$

halmazzal nem nullahalmaz. Tekintsük ennek a halmaznak φ általi képét, és legyen y_0^* ennek egy sűrűségi pontja. A $g_i(t_0, y_0)$ pontok elég kis környezetein létezik egy-egy ξ_i térkép. A t_0 elég kis V környezetét választva és szükség esetén csökkentve W-t elérhetjük, hogy $V \times W \subset D$ és $g_i(V \times W) \subset \operatorname{dmn} \xi_i$ teljesüljön $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Legyen $W^* = \operatorname{rng}(\varphi)$, $D^* = V \times W^*$, $X_i^* = \operatorname{rng}(\xi_i)$, $A_i^* = \xi_i(A_i)$, $g_i^*(t, y^*) = \xi_i(g_i(t, \varphi^{-1}(y^*)))$, ha $(t, y^*) \in D^*$, $f_0^* = f_0 \circ \varphi$, $f_i^* = f_i \circ \xi_i$ és $h^*(t, y^*, z_0, z_1, \ldots, z_n) = h(t, \varphi^{-1}(y^*, z_0, z_1, \ldots, z_n)$, ha $(t, y^*) \in D^*$ és $z_i \in Z_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. A *-gal jelzett halmazokra és függvényekre alkalmazható a 8.3 tétel, és így a bizonyítás teljes.

17.2. Tétel: Baire-tulajdonságból következik a folytonosság. *Legyen T topologikus tér, Y és X_i differenciálható sokaságok, Z teljesen reguláris tér, Z_0 egy σ-kompakt tér, Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ megszámlálható bázisú topologikus tér, és legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) h folytonos;

(3) f_i Baire-tulajdonságú az A_i részhalmazán X_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) minden $g_{i,t}$ parciális leképezés $\mathcal{C}^1$-szubmerzió $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(5) $\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$ második kategóriájú részhalmaza Y-nak;

(6) a $(t, y) \in D$ és v az Y sokaság y-beli érintőterében van feltételekkel a T és az Y érintőnyalábja szorzatában megadott nyílt halmazon értelmezett, X_i érintőnyalábjába képező $(t, y, v) \mapsto \big(g_{i,t}(y), g'_{i,t}(y)\big)$ leképezés folytonos.

Ekkor f folytonos a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. A tételt a 10.2 tételre vezetjük vissza. Mivel (5) szerint

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)$$

második kategóriájú halmaz Y-ban, létezik olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és y_0 minden nyílt W környezetére a

$$W \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} g_{i,t_0}^{-1}(A_i)\Big)$$

halmaz második kategóriájú. A $g_i(t_0, y_0)$ pontok elég kis környezetein létezik egy-egy ξ_i térkép. Válasszunk olyan kis V környezetét t_0-nak és olyan kis W-t, hogy W-n szintén létezzen egy φ térkép, $V \times W \subset D$ legyen és $g_i(V \times W) \subset \operatorname{dmn} \xi_i$ teljesüljön $(i = 1, 2, \dots, n)$. Legyen $W^* = \operatorname{rng}(\varphi)$, $D^* = V \times W^*$, $X_i^* = \operatorname{rng}(\xi_i)$, $A_i^* = \xi_i(A_i)$, $g_i^*(t, y^*) = \xi_i(g_i(t, \varphi^{-1}(y^*)))$, ha $(t, y^*) \in D^*$, $f_0^* = f_0 \circ \varphi$, $f_i^* = f_i \circ \xi_i$ és $h^*(t, y^*, z_0, z_1, \dots, z_n) = h(t, \varphi^{-1}(y^*, z_0, z_1, \dots, z_n)$, ha $(t, y^*) \in D^*$ és $z_i \in Z_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. A *-gal jelzett halmazokra és függvényekre alkalmazható a 10.2 tétel, és így a bizonyítás teljes.

Az következő tétel ennek a paragrafusnak a legfontosabb eredménye. Bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

17.3. Lemma. *Legyen Z nyílt részhalmaza egy euklidészi térnek, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ euklidészi terek konvex nyílt részhalmazai. Legyenek T és Y nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^s$-nek illetve $\mathbb{R}^k$-nak, X_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$-nek $(i = 1, 2, \dots, n)$. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak, $(t_0, y_0) \in D$. Tekintsük az $f : T \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $h : D \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) h folytonosan differenciálható, a $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ függvények Lipschitz-folytonosak L_i' Lipschitz-konstanssal, a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|$ és $\left|\dfrac{\partial h}{\partial z_i}\right|$ függvények korlátosak B_0' illetve B_i' korláttal $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(3) g_i kétszer folytonosan differenciálható Lipschitz-függvény L_i Lipschitz-konstanssal, és $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}(t_0, y_0)$ rangja r_i, ha $i = 1, \dots, n$;

(4) az f_i függvények folytonosak, folytonossági moduluszuk ω_i.

Ekkor léteznek olyan $R_0 > 0$ és $c_0 > 0$ konstansok és V nyílt gömbkörnyezete t_0-nak, hogy ha $t, t' \in V$, $0 < R < R_0$, akkor

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| \le B_0'|t - t'| + \sum_{i=1}^{n} B_i'|t - t'|c_0/R \\ + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(L_i|t - t'|)L_i'\Big(|t - t'| + R + \sum_{j=1}^{n} \omega_j\big(L_j(|t - t'| + R)\big)\Big). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy S szimplexet $\mathbb{R}^k$ egységgömbjében, amely belsejében tartalmazza az origót. Alkalmazva a 11.2 lemmát az f_i koordinátafüggvényeire, azt kapjuk, hogy léteznek $\delta > 0$, $R_0 > 0$ és C úgy, hogy a t_0 középpontú δ sugarú V nyílt gömbre és az y_0 középpontú és R_0 sugarú zárt W gömbre $V \times W$ benne van D-ben, és a

$$t \mapsto \int_{RS+y_0} f_i(g_i(t, y))\, dy$$

leképezések folytonosan differenciálhatóak V-n, gradiensük pedig korlátos CR^{k-1} korláttal, ha $0 < R < R_0$. Legyen $t, t' \in V$. Legyen R egy tetszőleges valós szám, amelyre $0 < R < R_0$. Integráljuk a függvényegyenlet mindkét oldalát az $RS + y_0$ szimplex felett y szerint. Azt kapjuk, hogy

$$|S|R^k f(t) = \int_{RS+y_0} h(t, y, f_1(g_1(t,y)), \dots, f_n(g_n(t,y)))\, dy,$$

ahol $|S| > 0$ az S szimplex mértéke. Innen

$$\begin{aligned}|S|R^k|f(t) - f(t')| = \bigg| \int_{RS+y_0} & h(t, y, f_1(g_1(t,y)), \dots, f_n(g_n(t,y))) \\ & - h(t', y, f_1(g_1(t',y)), \dots, f_n(g_n(t',y)))\, dy \bigg|.\end{aligned}$$

Hogy a bal oldalra egy jó felső becslést kapjunk, a

$$\begin{aligned}& h(t, y, f_1(g_1(t,y)), \dots, f_n(g_n(t,y))) \\ & \quad - h(t', y, f_1(g_1(t',y)), \dots, f_n(g_n(t',y)))\end{aligned}$$

különbség egy jó felső becslésére van szükségünk. Alkalmazhatjuk a Taylor-tételt a h függvényre a

$$z = (t, y, z_1, \dots, z_n) \quad \text{és} \quad z' = (t', y, z'_1, \dots, z'_n)$$

pontokkal, ahol $t', t \in V$, $y \in W$, $z_i = f_i(g_i(t,y))$ és $z'_i = f_i(g_i(t',y))$, ha $i = 1, \dots, n$. A z és z' pontok, így az őket összekötő szakasz is, benne van $V \times W \times Z_1 \times \dots \times Z_n$-ben. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}h(z) - h(z') = & \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z + (1-\tau)z')(t - t')\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z')(z_i - z'_i)\, d\tau.\end{aligned}$$

Felhasználva ezt, és elhagyva a változók kiírását, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|S|R^k|f(t') - f(t)| = \bigg| \int_{RS+y_0} & \Big(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(\tau z + (1-\tau)z')(t - t')\, d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z')(z_i - z'_i)\, d\tau \Big)\, dy \bigg|.\end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával $n+1$ tagot kapunk a jobb oldalon. Az első tagra a triviális $|S|R^k B'_0|t' - t|$ felső korlátot kapjuk, ahol B'_0 az $\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|$ felső korlátja. Legyen $z_i^0 = f_i(g_i(t, y_0))$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, és legyen

$z^0 = (t, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$. Ha h_i' jelöli a $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ parciális derivált értéket a z^0 pontban, akkor a többi tagot úgy írhatjuk, mint

$$\int_{RS+y_0} \int_0^1 \left(\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z') - h_i' \right) (z_i - z_i') \, d\tau \, dy$$
$$+ h_i' \int_{RS+y_0} (z_i - z_i') \, dy$$

normáját. Először ezen összeg első tagjának normájára adunk egy felső becslést. $|z_i - z_i'|$ egy felső becslése $\omega_i(L_i|t-t'|)$, mivel L_i Lipschitz-konstans g_i számára $V \times W$-n. Innen

$$\left| \int_{RS+y_0} \int_0^1 \left(\frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z') - h_i' \right) (z_i - z_i') \, d\tau \, dy \right|$$
$$\leq \omega_i(L_i|t-t'|) \int_{RS+y_0} \int_0^1 \left| \frac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z') - h_i' \right| d\tau \, dy.$$

Szükségünk van a $\left| \dfrac{\partial h}{\partial z_i}(\tau z + (1-\tau)z') - \dfrac{\partial h}{\partial z_i}(z^0) \right|$ különbség becslésére. Ez a különbség nem nagyobb, mint L_i'-ször a $\tau z + (1-\tau)z' - z^0$ különbség normája, azaz L_i'-ször a maximális távolság a z' és $z^0 = (t, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$ vektorok között, ahol L_i' a Lipschitz-konstans $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ számára. A maximális távolság z' és z^0 között $|t-t'| + R + \sum_{j=1}^n \omega_j\big(L_j(|t-t'|+R)\big)$-rel becsülhető. Így az

$$|S| R^k \omega_i(L_i|t-t'|) L_i' \Big(|t-t'| + R + \sum_{j=1}^n \omega_j \big(L_j(|t-t'| + R) \big) \Big)$$

felső korlátot kapjuk az első tagra.

Hogy a második tagra is kapjunk egy felső korlátot,

$$\int_{RS+y_0} (z_i - z_i') \, dy = \int_{RS+y_0} \big(f_i(g_i(t,y)) - f_i(g_i(t',y))\big) \, dy$$

abszolút értékének becslésére van szükségünk, mivel $|h_i'|$ triviálisan korlátos a B_i' felső korlátjával $\left| \dfrac{\partial h}{\partial z_i} \right|$-nek. A lemmából erre az integrálra a $|t-t'| C R^{k-1}$ felső korlátot kapjuk.

Összegezve a fenti becsléseket, az

$$|f(t) - f(t')| \leq B_0'|t-t'| + \sum_{i=1}^n B_i'|t-t'| C/(|S|R)$$
$$+ \sum_{i=1}^n \omega_i(L_i|t-t'|) L_i' \Big(|t-t'| + R + \sum_{j=1}^n \omega_j \big(L_j(|t-t'| + R) \big) \Big)$$

becsléshez jutunk, ami éppen a lemma állítását adja $c_0 = C/|S|$ jelöléssel.

17.4. Tétel: folytonos megoldások lokális Lipschitz tulajdonsága. *Legyenek Z, T és Y differenciálható sokaságok, D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak, C egy kompakt részhalmaza T-nek. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to T$ $(i = 1, \dots, n)$, $h : D \times Z^n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h(t, y, f(g_1(t, y)), \dots, f(g_n(t, y)));$$

(2) h kétszer folytonosan differenciálható;

(3) g_i kétszer folytonosan differenciálható D-n és minden $t_0 \in T$-hez van olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$, $g_i(t_0, y_0) \in C$ és $y \mapsto g_i(t_0, y)$ szubmerzió y_0-ban, ha $i = 1, \dots, n$;

(4) f folytonos.

Ekkor f lokálisan Lipschitz függvény T-n.

Bizonyítás. Válasszunk és rögzítsünk egy-egy Riemann-struktúrát Z-n, Y-on és T-n (lásd [39], 20.7.13). Mindhárom sokaságon egy, a rögzített Riemann-struktúrából származó távolságot fogunk használni, és ezt az egyszerűség kedvéért mindhárom esetben ϱ-val jelöljük. Ezt a távolságot a következőképpen definiáljuk: az adott sokaság minden komponensén létezik egy, a Riemann-struktúrából származó ϱ' távolság ([39], 20.16.3). Legyen $\varrho(x, y) = \min\{1, \varrho'(x, y)\}$, ha x és y a sokaság ugyanazon komponensében vannak, egyébként legyen $\varrho(x, y) = 1$. Ezzel a definícióval ϱ a sokaság topológiáját indukáló távolság, és ha $\varrho(x, y) < 1$, akkor x és y ugyanabban a komponensben vannak, $\varrho'(x, y)$ is értelmezve van, és megegyezik $\varrho(x, y)$-nal.

A bizonyítás alapgondolata az f folytonossági moduluszának használata. Mivel ez általában nem szubadditív, egy módosítását fogjuk használni. Erre megmutatjuk, hogy eleget tesz egy függvényegyenlőtlenségnek, és ebből fog következni, hogy f lokálisan Lipschitz függvény.

Egy $\varepsilon > 0$-ra jelölje $C_\varepsilon = \{x : \varrho(x, C) \le \varepsilon\}$ a C (zárt) ε-környezetét. Legyen $C_\varepsilon = C$, ha $\varepsilon \le 0$. Mivel T lokálisan kompakt, létezik nyílt környezete C-nek, amelynek a lezártja kompakt. Ezen környezet komplementerének a távolsága C-től pozitív. Ha ε kisebb mint ez a távolság, akkor C_ε kompakt. Válasszunk C minden t pontjához egy V_t nyílt környezetet ugyanabban a komponensben, és egy $0 < \varepsilon_t < 1/2$ számot úgy, hogy minden V_t-beli középpontú, ε_t sugarú nyílt gömb szigorúan geodetikusan konvex legyen (lásd [39], 20.17.5). Válasszunk ki a V_t, $t \in C$ nyílt lefedéséből C-nek egy véges lefedését, és legyen $\varepsilon > 0$ kisebb a megfelelő ε_t értékeknél úgy, hogy C_ε is kompakt legyen. Legyen

$$\omega(r) = \sup\{\varrho(f(x), f(y)) : x \in C_\varepsilon, \varrho(x, y) \le r, y \in C_{\varepsilon - \varrho(x,y)}\}.$$

Nyilván ω monoton növekvő, $\omega(0) = 0$ és ω folytonos a nullában, mivel f egyenletesen folytonos a C_ε kompakt halmazon. Megmutatjuk, hogy

$$\omega(r_1 + r_2) \le \omega(r_1) + \omega(r_2), \quad \text{ha} \quad 0 \le r_1, r_2, r_1 + r_2 \le \varepsilon.$$

Feltehetjük, hogy $r_2 \le r_1$. Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(r_1 + r_2) > \omega(r_1) + \omega(r_2)$. Ekkor léteznek x és y úgy, hogy $\varrho(x, y) \le r_1 + r_2$, $x \in C_\varepsilon$ és $y \in C_{\varepsilon - \varrho(x,y)}$, de $\varrho(f(x), f(y)) > \omega(r_1) + \omega(r_2)$. Valamely $c \in C$-re

$$\varrho(y, c) = \varrho(y, C) \le \varepsilon - \varrho(x, y),$$

így $\varrho(x, c) \le \varepsilon$. Valamely $\varepsilon_t > \varepsilon$-ra a c középpontú, ε_t sugarú nyílt gömb szigorúan geodetikusan konvex, így pontosan egy olyan geodetikus ív létezik, amely x-et y-nal köti össze, és amelynek hossza $\varrho(x, y)$. Bármely z pontra ezen az íven $\varrho(x, y) = \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$. A z pontot úgy választva, hogy $\varrho(y, z) \le \varrho(x, z)$, $\varrho(x, z) \le r_1$ és $\varrho(z, y) \le r_2$ fennálljon, kapjuk, hogy

$$\varrho(z, c) \le \varrho(y, c) + \varrho(z, y) \le \varepsilon - \varrho(x, y) + \varrho(y, z) = \varepsilon - \varrho(x, z),$$

így $z \in C_{\varepsilon - \varrho(x,z)} \subset C_{\varepsilon - \varrho(y,z)}$, ahonnan $\varrho(f(x), f(z)) \le \omega(r_1)$ és $\varrho(f(z), f(y)) \le \omega(r_2)$, ami ellentmondás.

Rögzítsünk egy $\eta > 1$ *egész* számot (például $\eta = 2$ megfelelő). Egy tetszőleges $t_0 \in C_\varepsilon$-hez válasszunk egy (t_0-tól függő) y_0-t (3) szerint. Legyen $z_0 = f(t_0)$, $x_i^0 = g_i(t_0, y_0)$ és $z_i^0 = f(x_i^0)$, ha $i = 1, 2, \dots, n$. A Z sokaság z_0-t tartalmazó komponensére alkalmazva [39] 20.17.1, 20.17.5-öt, azt kapjuk, hogy van olyan $0 < \delta_{t_0} < 1/2$, hogy $0 < r \le \delta_{t_0}$ esetén a z_0 középpontú r sugarú nyílt gömb szigorúan geodetikusan konvex. Szükség esetén csökkentve δ_{t_0}-at elérhetjük, hogy a ψ normál koordinátázás értelmezve van a δ_{t_0} sugarú z_0 középpontú nyílt gömbön, továbbá, hogy ha z és z' ezen gömb pontjai, akkor

$$\frac{1}{\eta}|\psi(z) - \psi(z')| \le \varrho(z, z') \le \eta|\psi(z) - \psi(z')|,$$

azaz a normál koordinátázás és inverze is Lipschitz-függvény a z_0 pont δ_{t_0} sugarú környezete és annak koordináta-térbeli képe (amely szintén δ_{t_0} sugarú nyílt gömb $z_0^* = \psi(z_0)$ középponttal) között. (Lásd [39], 20.16.4, 20.16.5.) Legyen Z^* a z_0^* középpontú, δ_{t_0} sugarú nyílt gömb.

Hasonlóan eljárva, választhatunk a T, Y és Z sokaságok t_0, y_0 és z_i^0 pontjaihoz szigorúan geodetikusan konvex nyílt gömböket, amelyeken a τ, φ illetve ψ_i normál koordinátázások értelmezve vannak, Lipschitz-függvények η Lipschitz-konstanssal, és inverzeik is Lipschitz-függvények η Lipschitz-konstanssal. Jelölje a T^*, Y^* illetve Z_i^* ezen gömbök képét a megfelelő koordináta-térben. Szükség esetén csökkentve a sugarakat elérhetjük, hogy $\tau^{-1}(T^*) \times \varphi^{-1}(Y^*) \subset D$ teljesüljön, és a

$$(t^*, y^*, z_1^*, \dots, z_n^*) \mapsto \psi(h(\tau^{-1}(t^*), \varphi^{-1}(y^*), \psi_1^{-1}(z_1^*), \dots, \psi_n^{-1}(z_n^*)))$$

leképezés $T^* \times Y^* \times Z_1^* \times \cdots \times Z_n^*$-ot Z^*-ba képezze le. Ezt a leképezést h^*-gal fogjuk jelölni. Tovább csökkentve a sugarakat, elérhetjük, hogy h^* parciális deriváltjai korlátos Lipschitz-függvények legyenek. Hasonlóan folytatva, a T sokaság x_i^0 pontjaihoz választunk szigorúan geodetikusan konvex nyílt X_i gömböket legfeljebb $\varepsilon/3$ sugárral, amelyeken a ξ_i normál koordinátázások értelmezve vannak, Lipschitz-függvények η Lipschitz-konstanssal, és inverzeik is Lipschitz-függvények η Lipschitz-konstanssal. Jelölje X_i^* ezen gömbök képét a megfelelő koordináta-térben. Szükség esetén csökkentve a sugarakat elérhetjük, hogy a

$$x_i^* \mapsto \psi_i(f(\xi_i^{-1}(x_i^*)))$$

leképezés X_i^*-ot Z_i^*-ba képezze le. Ezt a leképezést f_i^*-gal fogjuk jelölni. Szükség esetén csökkentve a $t_0^* = \tau(t_0)$ és $y_0^* = \psi(y_0)$ pontok körüli T^* illetve Y^* gömbök sugarait elérhetjük, hogy a

$$(t^*, y^*) \mapsto \xi_i(g_i(\tau^{-1}(t^*), \varphi^{-1}(y^*)))$$

leképezés $T^* \times Y^*$-ot X_i^*-ba képező Lipschitz-leképezés legyen. Ezt a leképezést g_i^*-gal fogjuk jelölni. Jelölje f^* a $t^* \mapsto \psi^{-1}(f(\tau(t^*)))$ leképezését T^*-nak Z^*-ba.

Jelölje ω_i^* a (szokásos értelemben vett) folytonossági moduluszát f_i^*-nak. Megmutatjuk, hogy $\omega_i^*(r) \le \eta\omega(\eta r)$ minden $r \ge 0$-ra. Ha $x_i, x_i' \in X_i$, akkor $\varrho(x_i, x_i^0) < \varepsilon/3$ és $\varrho(x_i', x_i^0) < \varepsilon/3$, így felhasználva, hogy $x_i^0 \in C$, azt kapjuk, hogy $x_i \in C_\varepsilon$ és $\varrho(x_i, x_i') < 2\varepsilon/3$, így $x_i' \in C_{\varepsilon - \varrho(x_i, x_i')}$. Tegyük fel, hogy $|\xi_i(x_i) - \xi_i(x_i')| \le r$. Ekkor $\varrho(x_i, x_i') \le \eta r$, amiből $\varrho(f(x_i), f(x_i')) \le \omega(\eta r)$. Innen

$$|f_i^*(\xi_i(x_i)) - f_i^*(\xi_i(x_i'))| = |\psi_i(f(x_i)) - \psi_i(f(x_i'))| \le \eta\omega(\eta r).$$

Szuprémumot véve a bal oldalon, kapjuk az $\omega_i^*(r) \le \eta\omega(\eta r)$ egyenlőtlenséget.

Alkalmazzuk az előző lemmát a *-gal jelölt halmazokkal és függvényekkel. Azt kapjuk, hogy létezik olyan t_0 középpontú, $0 < \varepsilon_{t_0} < 1/2$ sugarú, szigorúan geodetikusan konvex nyílt gömb, amelyen a τ normál koordinátázás értelmezve van, $R_{t_0} > 0$ és c_{t_0} konstansok, hogy ha t, t' a nyílt gömb elemei, $0 < R < R_{t_0}$, akkor

$$\begin{aligned}
&|f^*(\tau(t)) - f^*(\tau(t'))| \le B_0'|\tau(t) - \tau(t')| + \sum_{i=1}^n B_i'|\tau(t) - \tau(t')|c_0/R \\
&+ \sum_{i=1}^n \omega_i^*\big(L_i|\tau(t) - \tau(t')|\big)L_i'\Big(|\tau(t) - \tau(t')| + R + \sum_{j=1}^n \omega_j^*\big(L_j(|\tau(t) - \tau(t')| + R)\big)\Big) \\
&\le B_0'\eta\varrho(t, t') + \sum_{i=1}^n B_i'\eta\varrho(t, t')c_{t_0}/R \\
&+ \sum_{i=1}^n \omega_i^*\big(L_i\eta\varrho(t, t')\big)L_i'\Big(\eta\varrho(t, t') + R + \sum_{j=1}^n \omega_j^*\big(L_j(\eta\varrho(t, t') + R)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Természetesen itt a B_0', B_i', L_i és L_i' konstansok t_0-tól függnek, ami a jelölésben nem jut kifejezésre. Felhasználva az ω_i^* és ω között fennálló egyenlőtlenséget, a fenti összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$|f^*(\tau(t)) - f^*(\tau(t'))| \le B_0'\eta\varrho(t,t') + \sum_{i=1}^n B_i'\eta\varrho(t,t')c_{t_0}/R$$
$$+\sum_{i=1}^n \eta\omega(L_i\eta^2\varrho(t,t'))L_i'\Big(\eta\varrho(t,t') + R + \sum_{j=1}^n \eta\omega\big(\eta L_j(\eta\varrho(t,t')+R)\big)\Big).$$

A t_0 középpontú, ε_{t_0} sugarú V_{t_0} nyílt gömbök egy lefedését adják a C_ε kompakt halmaznak. Így létezik egy $T_0 \subset C_\varepsilon$ véges halmaz úgy, hogy a $t_0 \in T_0$ pontoknak megfelelő nyílt gömbök egy nyílt lefedését adják C_ε-nak. Jelöljön L egy pozitív *egész* számot, amely az összes $t_0 \in T_0$-hoz tartozó összes L_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ konstansnál nagyobb, vagy egyenlő. Hasonlóan, jelöljön B', L' és c_0 egy-egy konstanst, amely az összes $t_0 \in T_0$-hoz tartozó összes B_i' $(i = 0, 1, \dots, n)$, L_i' $(i = 1, 2, \dots, n)$ illetve c_{t_0} konstansnál nagyobb, vagy egyenlő. Azt kapjuk, hogy ha t és t' ugyanabban a V_{t_0} gömbben vannak, és $0 < R < R_{t_0}$, akkor

$$\begin{aligned}\varrho(f(t), f(t')) &= \varrho(\varphi^{-1}(f^*(\tau(t))), \varphi^{-1}(f^*(\tau(t')))) \le \eta|f^*(\tau(t)) - f^*(\tau(t'))|\\ &\le B'\eta^2\varrho(t,t') + nB'\eta^2\varrho(t,t')c_0/R\\ &\quad + n\eta^2\omega(L\eta^2\varrho(t,t'))L'\left(\eta\varrho(t,t') + R + n\eta\omega(\eta L(\eta\varrho(t,t') + R))\right).\end{aligned}$$

Jelölje $\delta > 0$ a C_ε kompakt halmaz V_{t_0}, $t_0 \in T_0$ véges lefedéséhez tartozó Lebesgue-számot, azaz válasszuk úgy δ-t, hogy ha $t, t' \in C_\varepsilon$, $\varrho(t,t') < \delta$, akkor van olyan $t_0 \in T_0$, hogy $t, t' \in V_{t_0}$. Legyen $0 < R_0 \le \inf\{R_{t_0} : t_0 \in T_0\}$. Tovább csökkentve R_0-at és δ-t, elérhetjük, hogy $\eta L(\eta\delta + R_0) \le \varepsilon$ teljesüljön. Legyen t egy tetszőleges eleme C_ε-nak, és legyen t' egy eleme $C_{\varepsilon-\varrho(t,t')}$-nek amelyre $\varrho(t,t') < \delta$. Ekkor létezik olyan $t_0 \in T_0$, amelyre $t, t' \in V_{t_0}$. Felhasználva a fenti becslést, azt, hogy L és η egészek, valamint ω szubadditivitását, azt kapjuk, hogy tetszőleges R valós számra, amelyre $0 < R < R_0$,

$$\begin{aligned}\varrho(f(t), f(t')) &\le B'\eta^2\varrho(t,t') + nB'\eta^2\varrho(t,t')c_0/R\\ &\quad + nL\eta^4\omega(\varrho(t,t'))L'\left(\eta\varrho(t,t') + R + nL\eta^2(\eta\omega(\varrho(t,t')) + \omega(R))\right).\end{aligned}$$

Ha $\varrho(t,t') \le R$, ez a becslés

$$\varrho(f(t), f(t')) \le c_1\varrho(t,t') + c_2\omega(\varrho(t,t'))R + c_3\omega(\varrho(t,t'))\omega(R) + c_4\varrho(t,t')/R$$

alakban írható, ahol c_1, c_2, c_3 és c_4 nem függ t-től, t'-től és R-től. Szuprémumot véve először a jobb, majd a bal oldalon $t \in C_\varepsilon$, $t' \in C_{\varepsilon-\varrho(t,t')}$, $\varrho(t,t') \le r$-re, azt kapjuk, hogy

$$\omega(r) \le c_1 r + c_2\omega(r)R + c_3\omega(r)\omega(R) + c_4 r/R,$$

ha $0 \le r \le \delta \le R < R_0$. Ha úgy választjuk R-et, hogy teljesítse a $c_2R + c_3\omega(R) \le 1/2$ feltételt — ami szükség esetén csökkentve δ-t mindig megtehető — azt kapjuk, hogy

$$\omega(r) \le 2(c_1 + c_4/R)r,$$

valahányszor $0 \leq r \leq \delta$. Ez azt mutatja, hogy f lokálisan Lipschitz függvény C-n. Egy tetszőleges $t \in T$-re az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy t belső pontja C-nek, mivel helyettesíthetjük C-t C és a t egy kompakt környezetének az uniójával. Így a bizonyítás teljes.

Megjegyezzük, hogy ugyanúgy, mint a 11.5 tételt, ezt a tételt is gyakran némi kiegészítő érveléssel érdemes használni (lásd a 11.5 tétel után adott példát).

Összeg alakú egyenletekre többet mondhatunk.

17.5. Tétel. *Legyen Z egy euklidészi tér és T, Y, X_i és Z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) differenciálható sokaságok. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h_i : D \times Z_i \to Z$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) és $h_0 : D \to Z$ függvényeket. Legyen $(t_0, y_0) \in D$ és tegyük fel, hogy*

(1) minden $(t, y) \in D$-re

$$f(t) = h_0(t, y) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t, y, f_i(g_i(t, y)));$$

(2) h_i folytonosan differenciálható ($0 \leq i \leq n$);

(3) f_i folytonos X_i-n ($1 \leq i \leq n$);

(4) g_i kétszer folytonosan differenciálható és $y \mapsto g_i(t_0, y)$ szubmerzió y_0-ban, ha $1 \leq i \leq n$.

Ekkor f folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. A tételt a 11.3 tételre fogjuk visszavezetni. Legyen $x_i^0 = g_i(t_0, y_0)$ és $z_i^0 = f_i(x_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. A t_0 pont valamely környezetén értelmezett τ és az y_0 pont valamely környezetén értelmezett φ térképeket megválaszthatjuk úgy, hogy $\mathrm{dmn}(\tau) \times \mathrm{dmn}(\varphi) \subset D$ teljesüljön. Válasszunk a z_i^0 pont egy környezetén értelmezett ψ_i térképet. Az x_i^0 egy alkalmas környezetén választva egy ξ_i térképet, $f_i(\mathrm{dmn}(\xi_i)) \subset \mathrm{dmn}(\psi_i)$ teljesül. Végül, szükség esetén csökkentve τ és φ értelmezési tartományát elérhetjük, hogy $g_i(\mathrm{dmn}(\tau) \times \mathrm{dmn}(\varphi)) \subset \mathrm{dmn}(\xi_i)$ teljesüljön, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Jelölje T^*, Y^*, X_i^* és Z_i^* a τ, φ, ξ_i illetve ψ_i térképek értékkészletét, legyen $D^* = T^* \times Y^*$, és legyen $g_i^*(t^*, y^*) = \xi_i(g_i(\tau^{-1}(t^*), \varphi^{-1}(y^*)))$, $f_i^* = \psi_i \circ f_i \circ \xi_i^{-1}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, $f^* = f \circ \tau^{-1}$, $h_0^*(t^*, y^*) = h_0(\tau^{-1}(t^*), \varphi^{-1}(y^*))$ és

$$h_i^*(t^*, y^*, z_i^*) = h_i(\tau^{-1}(t^*), \varphi^{-1}(y^*), \psi_i^{-1}(z_i^*))).$$

Most alkalmazhatjuk a 11.3 tételt a *-gal jelzett halmazokra és függvényekre.

Ha ismeretlen függvény csak háromszor szerepel az egyenletben, és legalább az egyik ismeretlen függvény valós értékű, akkor is több mondható.

17.6. Tétel. *Legyenek Z, T, Y, X_1, Z_0 és Z_1 differenciálható sokaságok, Z_1 egydimenziós. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük a $g_1 : D \to X_1$, $f : T \to Z$, $f_0 : Y \to Z_0$, $f_1 : X_1 \to Z_1$ és $h : D \times Z_0 \times Z_1 \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és a következő feltételek teljesülnek:*

(1) *minden $(t, y) \in D$-re*

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right)\right);$$

(2) *h lokálisan Lipschitz;*

(3) *g_1 kétszer folytonosan differenciálható;*

(4) *f_0 és f_1 folytonosak;*

(5) *létezik olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és $y \mapsto g_1(t_0, y)$ szubmerzió y_0-ban.*

Ekkor f Lipschitz-feltételnek tesz eleget a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításában használt módszerrel a tétel a 11.4 tételre vezethető vissza.

17.7. Tétel: majdnem mindenütt differenciálható megoldások folytonosan differenciálhatóak. *Legyen Z egy Banach-sokaság, Z_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ szeparábilis Banach-sokaságok, Y, T és X_i differenciálható sokaságok. Legyen D egy nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$, $f_i : X_i \to Z_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $t_0 \in T$ és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) *minden $(t, y) \in D$-re*

$$f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y)));$$

(2) *minden rögzített $y \in Y$-ra a $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ és $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ parciális deriváltak folytonosak a többi változóban;*

(3) *f_i majdnem mindenütt differenciálható $(i = 1, 2, \dots, n)$;*

(4) *g_i folytonosan differenciálható, és van olyan y_0, amelyre $(t_0, y_0) \in D$ és az $y \mapsto g_i(t_0, y)$ leképezés szubmerzió y_0-ban $(i = 1, 2, \dots, n)$.*

Ekkor f folytonosan differenciálható a t_0 egy környezetében.

Bizonyítás. A 17.5 tétel bizonyításában használt módon a tételt a 14.2 tételre vezethetjük vissza.

17.8. Tétel: $\mathcal{C}^p$ megoldások $\mathcal{C}^{p+1}$-ben vannak. *Legyenek Z, Y, T, X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ és Z_i $(0 \le i \le n)$ differenciálható sokaságok. Legyen D nyílt részhalmaza $T \times Y$-nak. Tekintsük az $f : T \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $f_i : X_i :\to Z_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $f_0 : Y \to Z_0$, $h : D \times Z_0 \times Z_1 \times \dots \times Z_n \to Z$ függvényeket. Tegyük fel, hogy $p > 0$, $t_0 \in T$, és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(t, y) \in D$*-re*

$$f(t) = h\left(t, y, f_0(y), f_1\left(g_1(t, y)\right), \ldots, f_n\left(g_n(t, y)\right)\right);$$

(2) a h *függvény* $p+1$*-szer folytonosan differenciálható;*

(3) f_0 *folytonosan differenciálható, az* f_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *függvények pedig* p*-szer folytonosan differenciálhatóak;*

(4) a g_i *függvények* $p+1$*-szer folytonosan differenciálhatóak, és létezik olyan* y_0*, amelyre* $(t_0, y_0) \in D$ *és* $y \mapsto g_i(t_0, y)$ *szubmerzió* y_0*-ban, ha* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Ekkor az f *függvény* $p+1$*-szer folytonosan differenciálható a* t_0 *egy környezetében.*

Bizonyítás. A 17.5 tétel bizonyításában látott módon, a tételt a 15.2 tételre vezethetjük vissza.

VI. Regularitási tételek kevesebb változóval

18.§ A mérhetőség és a folytonosság között

Első lépésként itt is „mérhetőségből következik a folytonosság" típusú eredményeket fogunk bizonyítani. Tudomásom szerint ilyen eredmények az 1.17 probléma (3) feltételében szereplő erős rang feltétel, vagy annak valamely absztrakt változata nélkül csak nagyon speciális egyenletekre ismeretesek, például a McKiernan [129] dolgozatában tárgyalt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f(x + y e_i), \quad x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}$$

egyenletre, ahol $\mu_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in \mathbb{R}^n$ rögzítettek. Ott a bizonyítás a megoldások algebrai tulajdonságain múlik.

Ebben a paragrafusban az 1.17 problémában szereplő általános nem lineáris explicit egyenletre fogunk „mérhetőségből következik a folytonosság" típusú tételeket bizonyítani az 1.17.(3) feltételben a belső függvényekre kirótt erős rang feltétel nélkül. Az 1.7 pontban leírt „bootstrap" módszernek megfelelően, — durván szólva — a mérhetőség és a folytonosság között elhelyezkedő tulajdonságok egy sorozatát fogjuk bevezetni. Ezek képezik azokat a lépcsőket, amelyeken felkapaszkodhatunk a mérhetőségtől a folytonosságig. Először megvizsgáljuk az új fogalmak legalapvetőbb tulajdonságait. Ezután bizonyítjuk regularitási tételünket. Egy példát mutatunk a tétel alkalmazására nem triviális esetekben. A tétel egy finomítását is bebizonyítjuk. Végül az új fogalmak további tulajdonságait vizsgáljuk.

18.1. Definíció. Legyen X egy halmaz, Y metrikus tér, és $f : X \to Y$ egy függvény. Legyen U Hausdorff-tér, μ Radon-mérték U-n, és P egy topologikus tér, a „paraméter tér", egy adott $p_0 \in P$ ponttal. Legyen φ egy függvény, amely $U \times P$-t X-be képezi. A φ függvényt egy, a p paramétertől függő $\varphi_p : u \mapsto \varphi(u,p)$ felületseregnek képzeljük el.

Luzin tétele (2.7) és a 3. § általánosított Steinhaus-tétele azt sugallják, hogy az alábbi feltétel a mérhetőséggel kapcsolatos:

(L) *Minden $\varepsilon > 0$-hoz, $\sigma > 0$-hoz és $C \subset U$ kompakt halmazhoz van olyan P_0 környezete p_0-nak, amelyre ha $p \in P_0$, akkor*

$$\mu\left\{u \in C : \operatorname{dist}\left(f(\varphi(u,p)), f(\varphi(u,p_0))\right) \geq \sigma\right\} \leq \varepsilon.$$

A fenti feltétel sorozatokkal az alábbi módon fogalmazható:

(S) *Minden $\sigma > 0$-ra, minden $C \subset U$ kompakt halmazra, és minden $p_m \to p_0$ sorozatra*

$$\mu\{u \in C : \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p_m)), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma\} \to 0.$$

Ebben a formában a feltétel erősen emlékeztet a mértékben való konvergenciára. Riesz tétele az alábbi feltételt sugallja:

(R) *Minden $p_m \to p_0$ sorozatnak van olyan p_{m_i} részsorozata, hogy majdnem minden $u \in U$-ra*

$$f(\varphi(u, p_{m_i})) \to f(\varphi(u, p_0)).$$

Ez a feltétel az alábbi, Trautner által mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire vizsgált feltételre emlékeztet (lásd a megjegyzést is, később):

(T) *Minden $p_m \to p_0$ sorozatra majdnem minden $u \in U$-ra van olyan p_{m_i} részsorozat, hogy*

$$f(\varphi(u, p_{m_i})) \to f(\varphi(u, p_0)).$$

A fenti feltételek közötti kapcsolatok vizsgálatához szükségünk lesz valamilyen mérhetőség-szerű feltételre:

(M) *Az $u \mapsto f(\varphi(u, p_0))$ leképezés μ-mérhető.*

Világos, hogy az (L) és (S) feltételek akkor is értelmesek, ha f értékei egy Y uniform térben vannak; σ-t egyszerűen helyettesíthetjük egy, az Y uniformitásából vett reflexív szimmetrikus relációval, és azon u pontok halmazát kell tekintenünk, amelyekre f két értéke nincs σ-közel. Az (R) feltétel előnye az, hogy még akkor is értelmes, ha Y csak topologikus tér. Ugyanez igaz (T)-re és (M)-re is. Úgy tűnik, hogy (T) semmiben sem hasznosabb, mint (R), sőt regularitási tételeink bizonyításához kifejezetten nem alkalmas.

Az (L) [(S), (R), (T), (M)] feltételeket gyakran lokálisan fogjuk ellenőrizni. Ha minden $u_0 \in U$-hoz van olyan U_0 környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy $\varphi|U_0 \times P_0$-ra teljesül (L) [(S)], akkor φ-re is fennáll (L) [(S)]. Ennek belátásához válasszunk C-nek egy véges lefedését, amely véges mértékű nyílt halmazokból áll, és alkalmazzuk az (L) [(S)] feltételt ezeknek a nyílt halmazoknak kompakt halmazokkal való elég jó belső közelítéseire: Válasszunk minden $x \in C$-re egy U_x környezetét x-nek és egy P_x környezetét p_0-nak úgy, hogy $\varphi|U_x \times P_x$ tegyen eleget (L)-nek. Az U_x-et kisebb környezettel helyettesítve, ha szükséges, feltehetjük hogy nyílt és μ-mértéke véges. Legyen $U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}$ egy véges lefedése C-nek. Legyen $\varepsilon, \sigma > 0$, és válasszunk olyan $C_i \subset U_{x_i}$ kompakt halmazokat, amelyekre $\mu(U_{x_i} \setminus C_i) < \varepsilon/(2r)$. Olyan P_0 környezetét választva p_0-nak, amelyre $P_0 \subset \cap_{i=1}^r P_{x_i}$ és amelyre az

$$R_i(p) = \Big\{u \in C_i : \operatorname{dist}\Big(f\big(\varphi(u,p)\big), f\big(\varphi(u,p_0)\big)\Big) \geq \sigma\Big\}$$

halmazok μ-mértéke kisebb, mint $\varepsilon/(2r)$ minden $p \in P_0$-ra, azt kapjuk, hogy

$$\mu\Big\{u \in C : \operatorname{dist}\Big(f\big(\varphi(u,p)\big), f\big(\varphi(u,p_0)\big)\Big) \geq \sigma\Big\} \leq \varepsilon,$$

mivel ez a halmaz része az $\cup_{i=1}^r R_i(p) \cup \cup_{i=1}^r (U_{x_i} \setminus C_i)$ halmaznak. Hasonlóan, ha $p_m \to p_0$ és (S) teljesül $\varphi|U_x \times P_x$-re, akkor adott $\varepsilon, \sigma > 0$-ra és $i = 1, 2, \ldots, r$-re létezik olyan M_i, hogy ha $m \geq M_i$, akkor $p_m \in P_{x_i}$ és $R_i(p_m)$ μ-mértéke kisebb, mint $\varepsilon/(2r)$. Innen ha $m \geq M = \max_{1 \leq i \leq r} M_i$, akkor

$$\mu\Big\{u \in C : \operatorname{dist}\Big(f\big(\varphi(u,p_m)\big), f\big(\varphi(u,p_0)\big)\Big) \geq \sigma\Big\} \leq \varepsilon.$$

Hasonlóan, ha minden $u_0 \in U$-ra van olyan U_0 környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy $\varphi|U_0 \times P_0$-ra teljesül (R) [(T), (M)], akkor , feltéve, hogy U Lindelöf-tér, kapjuk, hogy φ-re is fennáll (R) [(T), (M)]. Az (R) feltételnél ez a diagonális eljárással kapható: megszámlálható sok U_0 lefedi U-t. Rendezzük sorozatba ezeket a nyílt halmazokat, és tekintsünk a p_m sorozatnak rész-rész-... sorozatait. A diagonális eljárás egy olyan részsorozatot eredményez, amelyre a konvergencia majdnem mindenütt fennáll. (T) és (M) esetén az állítás nyilvánvaló.

Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és $0 \leq k \leq n$. Az összes olyan f függvények osztályát, amelyekre az (L) [(S), (R), (T), (M)] feltétel teljesül, hacsak U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, $\mu = \lambda^k$, P valamely euklidészi tér egy nyílt részhalmaza, $p_0 \in P$ és $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden $p \in P$-re φ_p immerziója U-nak X-be, jelölje $\mathcal{L}_k(X,Y)$, vagy röviden csak $\mathcal{L}_k$ [$\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$, $\mathcal{T}_k$, $\mathcal{M}_k$]. (Emlékeztetünk rá, hogy egy $\mathcal{C}^1$-leképezése U-nak X-be immerzió, ha U minden pontjában a deriváltja injektív lineáris leképezés. Ha $k = 0$, akkor legyen $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ és $\lambda^0\big(\{0\}\big) = 1$, azaz λ^0 a számláló mérték $\mathbb{R}^0$-on. Egy $\varphi : \{0\} \times P \to X$ függvényt pontosan akor tekintünk $\mathcal{C}^1$-függvénynek, ha $p \mapsto \varphi(0,p)$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény. Bármely függvényt, amely $\mathbb{R}^0$ egy részhalmazát, azaz $\{0\}$-t vagy az üres halmazt X-be képezi, immerziónak tekintünk.) Az első két feltétel esetén azt tesszük fel, hogy f értékei egy Y uniform térben vannak, a másik három feltétel esetén pedig, hogy egy Y topologikus térben. Világos, hogy $f \in \mathcal{M}_k$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{R}^k$ bármely U nyílt részhalmazának bármely X-be történő ψ immerziójára $\mu = \lambda^k$-val fennáll, hogy

(M′) *az $f \circ \psi$ függvény μ-mérhető.*

18.2. Megjegyzések. (1) Céljainknak az $\mathcal{R}_k(X,Y)$ függvényosztály fog a legjobban megfelelni, mivel el akarjuk kerülni annak feltételezését, hogy Y uniform tér. Ami még fontosabb, $\mathcal{R}_k(X,Y)$-t használva regularitási tételeinkben elkerülhetjük az ismert függvények egyenletes folytonosságának feltételezését, elég folytonosságot feltenni. Az $\mathcal{M}_k$ és $\mathcal{L}_k$ osztályok is szerepet fognak játszani. Fő eredményünk azt mutatja, hogy durván szólva, egy $\mathcal{R}_{k+1}$-beli f megoldás $\mathcal{R}_k$-ban is benne van. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathcal{R}_0$ a folytonos függvények osztálya, és hogy bármely, egy $X \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazt egy Y megszámlálható bázisú térbe képező $f : X \to Y$ Lebesgue-mérhető függvény $\mathcal{R}_n$-ben van. Így, lépésenként, a megoldások mérhetőségéből következik azok folytonossága.

(2) Trautner [159] megmutatta, hogy $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy pozitív mértékű Lebesgue-mérhető M részhalmazához és egy $p_m \in [a,b]$ sorozathoz létezik olyan $u \in \mathbb{R}$ és p_{m_s} részsorozat, hogy $p_{m_s} + u \in M$. Ez következik abból, hogy egy Lebesgue-mérhető függvény $\mathcal{T}_1$-ben van. Valóban, helyettesítsük p_m-et egy részsorozatával, amely egy $p_0 \in [a,b]$ ponthoz konvergál. Legyen $f = \xi_M$ az M halmaz karakterisztikus függvénye, és legyen $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\varphi(u,p) = u - p$ összefüggéssel definiálva. $\xi_M \in \mathcal{T}_1$-ből következik, hogy majdnem minden $u \in M + p_0$-ra van olyan p_{m_s} részsorozat, hogy

$$\xi_M(u - p_{m_s}) \to \xi_M(u - p_0) = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy $u + p_{m_s} \in M$, ha s elég nagy.

Trautner tételét — egyebek mellett — arra használta fel, hogy új bizonyítást adjon Steinhaus eredményére, mely szerint $\mathbb{R}$ egy mérhető additív leképezése önmagába folytonos.

Trautner módszerét lokálisan kompakt csoportokra, illetve még általánosabb esetekre általánosította Grosse-Erdmann [49]. Eredményeire a 8. paragrafusban is hivatkoztunk.

(3) Az $\mathcal{L}_k$ [$\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$, $\mathcal{T}_k$, $\mathcal{M}_k$] osztály nem változik, ha csak azt tesszük fel, hogy az (L) [(S), (R), (T), (M)] feltétel teljesül, valahányszor U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, $\mu = \lambda^k$, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$ és $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre φ_p beágyazása (azaz olyan immerziója, amely homeomorfizmus az értelmezési tartomány és értékkészlet között) U-nak X-be, ha $p \in P$. Ez azonnal következik a definícióban említett lokalitási elvből.

Hasonlóan, ha csak azt tesszük fel, hogy φ_{p_0} immerzió, a kapott $\mathcal{L}_k$ [$\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$, $\mathcal{T}_k$, $\mathcal{M}_k$] osztály ugyanaz marad.

(4) Ha az (L) [(S)] feltételben azt hogy „minden $C \subset U$ kompakt halmazra” azzal helyettesítjük, hogy „minden σ-véges mérhető $C \subset U$-ra”, akkor ekvivalens feltételt kapunk. Ez könnyen következik, ha kompakt halmazokkal belülről történő approximációt használunk.

Az $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$, $\mathcal{T}_k$ és $\mathcal{M}_k$ osztályok közötti legegyszerűbb kapcsolatok vizsgálatával kezdünk.

18.3. Tétel. *A fenti definíció jelöléseivel, az (L) feltétel fennállásából következik, hogy (S) is teljesül. Ha a p_0 pontnak van megszámlálható környezetbázisa, akkor (L) következik (S)-ből. Ha Y uniformitásának van megszámlálható bázisa, μ pedig σ-véges, akkor (S)-ből következik (R). (R)-ből mindig következik (T). Ha Y uniform tér, melynek topológiája megszámlálható bázisú, továbbá (R) teljesül és (M) teljesül minden $p_0 \in P$-re, akkor (S) is. Így, ha Y szeparábilis metrikus tér, akkor $\mathcal{L}_k = \mathcal{S}_k \subset \mathcal{R}_k \subset \mathcal{T}_k$ és $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{R}_k \cap \mathcal{M}_k$.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy (L)-ből következik (S), és ha a p_0 pontnak van megszámlálható környezetbázisa, akkor megfordítva, (L) következik (S)-ből. Az (R)-ből nyilván következik (T).

Annak bizonyítása, hogy ha Y metrikus tér, μ pedig σ-véges, akkor (S)-ből következik (R), a klasszikus Riesz-féle kiválasztási tétel bizonyítását utánozza: Legyen C egy tetszőleges kompakt részhalmaza U-nak, válasszunk egy $\sigma_i \downarrow 0$ sorozatot. Választhatunk olyan p_{m_i} részsorozatot, hogy a

$$\{u \in C : \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p_{m_i})), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma_i\}$$

halmaz (külső) μ-mértéke kisebb, mint 2^{-i}. Jelölje A_i ennek a halmaznak egy μ-burkát. Ha u nincs a $\cap_{j=1}^{\infty} \cup_{i=j}^{\infty} A_i$ nulla mértékű halmazban, akkor

$$\operatorname{dist}(f(\varphi(u, p_{m_i})), f(\varphi(u, p_0))) < \sigma_i$$

minden $i \geq j$-re valamely j-től. Válasszunk U-nak egy kompakt halmazokkal való $C_1, C_2, \ldots$ majdnem lefedését. Válasszuk ki indukcióval a p_m sorozat rész-rész-…-sorozatait. A diagonális eljárás egy olyan részsorozatot eredményez, amelyre a konvergencia majdnem mindenütt teljesül. Ez a bizonyítás olyan uniform terekre is működik, melyek uniformitásának van megszámlálható bázisa.

Tegyük fel most, hogy Y szeparábilis metrikus tér. Ha f-re teljesül (M) minden $p_0 \in P$-re, akkor az $u \mapsto \varphi(u, p)$ függvény μ-mérhető minden $p \in P$-re. Felhasználva, hogy Y szeparábilis, az kapjuk, hogy bármely $p, p' \in P$ párra az $u \mapsto (f(\varphi(u, p)), f(\varphi(u, p')))$ leképezése U-nak $Y \times Y$-ba szintén mérhető. Ebből következik, hogy minden $p, p' \in P$ párra az

$$u \mapsto \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p)), f(\varphi(u, p')))$$

leképezés is mérhető. Tegyük fel, hogy (S) nem teljesül φ-re és $p_0 \in P$-re. Ez azt jelenti, hogy van olyan $p_m \to p_0$ sorozat, $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$, és egy $C \subset U$ kompakt halmaz, hogy a

$$\{u \in C : \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p_m)), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma\}$$

mérhető halmazok mértéke nagyobb, mint ε végtelen sok m-re. Válasszunk egy olyan p_{m_i} részsorozatot, amelyre az

$$A_i = \{u \in C : \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p_{m_i})), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma\}$$

mérhető halmazok mértéke $\geq \varepsilon$. Ekkor egy tetszőleges $p_{m_{i_j}}$ részsorozatra bármely u-ra a $\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{j=k}^{\infty} A_{i_j}$ mérhető és legalább ε mértékű mérhető halmazból

$$f(\varphi(u, p_{m_{i_j}})) \not\to f(\varphi(u, p_0)).$$

Ez ellentmond annak, hogy f-re fennáll (R). Így

$$\mu \{u \in C : \mathrm{dist}\,(f(\varphi(u, p_m)), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma\} \to 0.$$

Ugyanez a bizonyítás működik akkor is, ha Y olyan uniform tér, amelynek topológiája második megszámlálható.

18.4. Tétel. *18.1 jelöléseit használva, legyen Y topologikus tér és X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor $\mathcal{M}_0(X,Y) = Y^X$ és $\mathcal{R}_0(X,Y) = \mathcal{T}_0(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$, az X-et Y-be képező folytonos függvények osztálya. Ha Y uniform tér, akkor $\mathcal{L}_0(X,Y) = \mathcal{S}_0(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ is fennáll.*

Bizonyítás. Triviális, hogy $\mathcal{M}_0$ minden X-et Y-ba képező függvényt tartalmaz.

Megmutatjuk, hogy minden $f : X \to Y$ folytonos függvény benne van $\mathcal{R}_0$-ban, és így $\mathcal{T}_0$-ban is. Csak két lehetőség van, $U = \emptyset$ vagy $U = \{0\}$. Az első esetben nincs mit bizonyítani; a második esetben $p_{m_k} = p_k$ választható.

A megfordítást indirekt módon bizonyítjuk: Ha $f \in \mathcal{T}_0$, de nem folytonos, akkor létezik olyan $x_0 \in X$, olyan $x_n \to x_0$ sorozat és W környezete $f(x_0)$-nak, hogy $f(x_n) \notin W$. Legyen $U = \{0\}$, $P = X$, $p_0 = x_0$, $\varphi(0,p) = p$, ha $p \in P$. A $p_m = x_m$ sorozatnak olyan részsorozatát választva, amelyre

$$f(\varphi(0, p_{m_k})) = f(x_{m_k}) \to f(x_0) = f(\varphi(0, p_0)),$$

ellentmondásra jutunk.

Hasonlóan, ha Y uniform tér és f folytonos, csak két eset van, $C = \emptyset$ vagy $C = \{0\}$. Az első esetben nincs mit bizonyítani. A második esetben $f \circ \varphi$ folytonosságából következik, hogy elég nagy m-re az $f(\varphi(0, p_m))$ és $f(\varphi(0, p_0))$ értékek elég közel vannak.

Ha $f \in \mathcal{L}_0 = \mathcal{S}_0$ és $x_0 \in X$, akkor $U = C = \{0\}$ választással, ha $P = X$, $p_0 = x_0$ és $\varphi(0,p) = p$, ha $p \in P$, akkor

$$f(\varphi(0, p_m)) = f(x_m) \to f(x_0) = f(\varphi(0, p_0))$$

bármely $p_m = x_m \to x_0$ sorozatra, amiből következik f folytonossága.

Meg fogjuk mutatni, hogy az $\mathbb{R}^n$ valamely X nyílt részhalmazán Lebesgue-mérhető függvények $\mathcal{R}_n$-ben vannak. Hogy a 3., 5., 6., 8. és 9. paragrafusok eredményeivel való kapcsolatot világossá tegyük, és más helyeken is felhasználható eredményeket kapjunk, a bizonyítás lényeges részét az alábbi absztrakt formában fogalmazzuk meg:

18.5. Tétel. *A 18.1 definíció jelöléseit fogjuk használni. Legyen P topologikus tér, U és X Hausdorff-terek μ illetve ν Radon-mértékekkel. Tegyük fel, hogy a μ mérték σ-véges, és hogy $\varphi : U \times P \to X$ folytonos függvény az alábbi tulajdonsággal:*

(1) Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $p \in P$, $B \subset U$, $\mu(B) \geq \varepsilon$, akkor $\nu(\varphi_p(B)) \geq \delta$.

Tegyük fel továbbá, hogy $p_0 \in P$ és az f függvény Luzin ν-mérhető a $\varphi_{p_0}(U)$-t tartalmazó mérhető D halmazon valamely Y topologikus térbeli értékekkel. Ekkor az (M), (R) és (T) feltételek teljesülnek U, P, p_0, φ, f és μ-re. Ha még Y uniform tér is, akkor (L) és (S) is teljesülnek.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy (M) teljesül. Állítsuk elő U-t megszámlálható sok kompakt halmaz és egy nullmértékű halmaz egyesítéseként. Legyen D_i, $i = 1, 2, \ldots$ ezen kompakt halmazok φ_{p_0} általi képe. Legyen $D' = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$. Ekkor $\nu(D_i) < \infty$ és $\mu(\varphi_{p_0}^{-1}(D \setminus D')) = 0$. Válasszunk D_i-ben kompakt halmazoknak egy olyan $K_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots$ sorozatát, amelyre $\nu(D_i \setminus K_{i,j}) \to 0$, ha $j \to \infty$ és $f|K_{i,j}$ folytonos. Legyen V nyílt részhalmaza Y-nak. Mivel $(f|K_{i,j})^{-1}(V)$ relatív nyílt $K_{i,j}$-ben, Borel-halmaz X-ben. A $K = \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$ jelöléssel $B = (f|K)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz X-ben. Az $E = D' \setminus K$ halmaz ν-mértéke nulla, így az $N = (f|E)^{-1}(V)$ halmaz szintén nulla mértékű. Most vegyük észre, hogy

$$(f \circ \varphi_{p_0})^{-1}(V) = \varphi_{p_0}^{-1}(B) \cup \varphi_{p_0}^{-1}(N) \cup \varphi_{p_0}^{-1}\left((D \setminus D') \cap f^{-1}(V)\right).$$

A bal oldalon $\varphi_{p_0}^{-1}(B)$ Borel-halmaz, az (1) feltétel miatt pedig a $\varphi_{p_0}^{-1}(N)$ és $\varphi_{p_0}^{-1}(D \setminus D')$ halmazok nulla mértékűek. Ez azt jelenti, hogy (M) teljesül.

Most tegyük fel, hogy Y uniform tér. Megmutatjuk, hogy (L) teljesül. Legyen C kompakt részhalmaz U-nak, és legyen $K = \varphi_{p_0}(C)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan $\delta > 0$-t, amely (1)-ben $\varepsilon/2$-nek felel meg. Válasszunk egy V nyílt halmazt, amely tartalmazza K-t, és amelyre $\nu(V \setminus K) < \delta/2$. Mivel f Luzin ν-mérhető, van olyan K_0 kompakt részhalmaza K-nak, amelyre $\nu(K \setminus K_0) < \delta/2$ és $f|K_0$ folytonos. Válasszunk a K_0 kompakt Hausdorff-téren egy, a topológiával kompatibilis uniformitást. Mivel $f|K_0$ egyenletesen is folytonos, bármely α reflexív szimmetrikus relációhoz az Y uniformitásából van olyan β reflexív szimmetrikus reláció a K_0 uniformitásából, amelyre az $f(x)$ és $f(x')$ pontok α-közel vannak Y-ban, ha az x és x' pontok β-közel vannak K_0-ban. Válasszunk olyan γ reflexív szimmetrikus relációt K_0 uniformitásából, amelyre $\gamma \circ \gamma \subset \beta$. Minden $u \in C$-hez létezik olyan $U_u \subset U$ nyílt környezete u-nak és P_u nyílt környezete p_0-nak, hogy $U_u \times P_u$-t φ a V-be képezi, és $\varphi(U_u \times P_u)$ minden pontja, amely K_0-ban van, γ-közel van $\varphi(u, p_0)$-hoz. Választva egy véges $U_{u_1}, U_{u_2}, \ldots, U_{u_n}$ részlefedését C-nek, $P_0 = \cap_{i=1}^{n} P_{u_i}$-vel azt kapjuk, hogy minden $p \in P_0$-ra a φ_p leképezés C-t V-be képezi, és bármely $u \in C$-re, ha $\varphi(u, p)$ a K_0-ban van, akkor β-közel van $\varphi(u, p_0)$-hoz. Legyen $p \in P_0$ és tekintsük a $C \cap \varphi_p^{-1}(K_0) \cap \varphi_{p_0}^{-1}(K_0)$ halmazt. Ezt a halmazt φ_p és φ_{p_0} is a

K_0 halmazba képezi, és bármely u elemére a $\varphi(u,p)$ és $\varphi(u,p_0)$ pontok β-közel vannak K_0-ban, így a $f(\varphi(u,p))$ és $f(\varphi(u,p_0))$ pontok α-közel vannak Y-ban. Ha megmutatjuk, hogy ennek a halmaznak a komplementere ε-nál kisebb mértékű, akkor készen vagyunk. Mivel ennek a halmaznak a C-re vonatkozó komplementerét lefedi a $C\setminus\varphi_p^{-1}(K_0)$ és $C\setminus\varphi_{p_0}^{-1}(K_0)$ halmazok egyesítése, elég ezen halmazok mértékét megbecsülni. Az első halmazt φ_p a $V\setminus K_0$ halmazba képezi, így mértéke nem lehet nagyobb vagy egyenlő mint $\varepsilon/2$. A második halmazt φ_{p_0} képezi $V\setminus K_0$-ba, így, hasonlóan, mértéke kisebb, mint $\varepsilon/2$.

A bizonyítás további részéhez vegyük észre, hogy ha K' kompakt részhalmaza X-nek és a $C'=\varphi_{p_0}^{-1}(K')$ halmaz μ-mértéke véges, akkor minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan P_0 környezete p_0-nak, hogy minden $p\in P_0$-ra $\mu(C'\setminus\varphi_p^{-1}(K'))<\varepsilon$. Ennek bizonyítására válasszunk a C' Borel-halmaznak olyan C'' kompakt részhalmazát, amelyre $\mu(C'\setminus C'')<\varepsilon/2$ és legyen $K''=\varphi_{p_0}(C'')$. Válasszunk egy K''-t tartalmazó V nyílt halmazt, amelyre $\nu(V\setminus K'')<\delta$, ahol δ-t (1) szerint $\varepsilon/2$-höz választottuk. Minden $u\in C''$-höz van olyan U_u és P_u nyílt környezete u-nak illetve p_0-nak, hogy $\varphi(U_u\times P_u)\subset V$. Válasszunk egy $U_{u_1},\dots,U_{u_n}$ véges részlefedést az U_u, $u\in C''$ lefedésből, és legyen $P_0=\cap_{i=1}^n P_{u_i}$. Ekkor, ha $p\in P_0$, a $C''\setminus\varphi_p^{-1}(K'')$ halmazt φ_p a $V\setminus K''$ halmazba képezi, így μ-mértéke kisebb, mint $\varepsilon/2$. Most mivel $K''\subset K'$ és $C'\setminus\varphi_p^{-1}(K')\subset(C'\setminus C'')\cup(C''\setminus\varphi_p^{-1}(K''))$, azt kapjuk, hogy $\mu(C'\setminus\varphi_p^{-1}(K'))<\varepsilon$.

Most csak azt tegyük fel, hogy Y topologikus tér. Megmutatjuk, hogy (R) teljesül, amiből következik, hogy (T) is. Legyen ismét C kompakt részhalmaza U-nak és legyen $K=\varphi_{p_0}(C)$, továbbá legyen $p_m\to p_0$ egy konvergens sorozat P-ben. Legyen $\varepsilon_i=2^{-i}$ és legyen $\delta_i>0$ a megfelelő, (1) szerint választott δ számok sorozata. Válasszunk egy olyan $K_1\subset K$ kompakt halmazt, amelyre $f|K_1$ folytonos és $\nu(K\setminus K_1)<\delta_1$, és legyen $C_1=\varphi_{p_0}^{-1}(K_1)$. Ekkor $\mu(C\setminus C_1)<\varepsilon_1$. Indukcióval, felhasználva amit az előző bekezdésben megmutattunk, találhatunk olyan $m_1<m_2<\dots$ indexsorozatot, amelyre $\mu(C_1\setminus\varphi_{p_j}^{-1}(K_1))<\varepsilon_{i+1}$, ha $j\ge m_i$. Ebből következik, hogy $\mu(C_1\setminus\cap_{r=1}^{\infty}\varphi_{p_{m_r}}^{-1}(K_1))<\varepsilon_1$. Legyen most K_2 egy kompakt részhalmaza K-nak, amelyre $f|K_2$ folytonos és $\nu(K\setminus K_2)<\delta_2$. Legyen $C_2=\varphi_{p_0}^{-1}(K_2)$, ekkor $\mu(C\setminus C_2)<\varepsilon_2$. Alkalmazzunk újra teljes indukciót, de most a részsorozatra az eredeti sorozat helyett. Ekkor egy olyan részsorozatot kapunk, amelyre $\mu(C_2\setminus\cap_{s=1}^{\infty}\varphi_{p_{m_{r_s}}}^{-1}(K_2))<\varepsilon_2$. Folytatva ezt az eljárást, és a diagonális sorozatot véve, a p_m sorozatnak egy olyan p_{m_t} részsorozatát kapjuk, amelyre az

$$E_i=(C\setminus C_i)\cup\Big(\cup_{t=i}^{\infty}(C_i\setminus\varphi_{p_{m_t}}^{-1}(K_i))\Big)$$

halmaz mértéke kisebb, mint $2\varepsilon_i$. Legyen most $E=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{i=k}^{\infty}E_i$. Világos, hogy $\mu(E)=0$. Ha $u\in C\setminus E$, akkor van olyan k, hogy $u\notin E_i$, ha $i\ge k$. Ez egyrészt azt jelenti, hogy $u\notin C\setminus C_i$, ha $i\ge k$, azaz $u\in C_i$, ha $i\ge k$. Ebből következik, hogy $\varphi_{p_0}(u)\in K_i$, ha $i\ge k$, speciálisan $\varphi_{p_0}(u)\in K_k$. Másrészt, ha $i\ge k$, akkor minden $t\ge i$-re $u\notin C_i\setminus\varphi_{p_{m_t}}^{-1}(K_i)$. Ezt csak $i=k$-ra fogjuk felhasználni, már ebből következik, hogy $\varphi_{p_{m_t}}(u) \in K_k$, ha $t \geq k$. Mivel $f|K_k$ folytonos, azt kapjuk, hogy $f(\varphi_{p_{m_t}}(u)) \to f(\varphi_{p_0}(u))$. Az általános esetet úgy kapjuk, hogy U-t előállítjuk egy σ-kompakt halmaz és egy nulla mértékű halmaz egyesítéseként és ismét alkalmazzuk az átlós eljárást.

18.6. Tétel. *A 18.1 definíció jelöléseit fogjuk használni. Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ha Y megszámlálható bázisú topologikus tér, akkor minden λ^n-mérhető $f : X \to Y$ függvény benne van $\mathcal{R}_n(X,Y)$-ban, $\mathcal{T}_n(X,Y)$-ban és $\mathcal{M}_n(X,Y)$-ban. Továbbá, ha Y még uniform tér is, akkor f benne van $\mathcal{L}_n(X,Y)$-ban és $\mathcal{S}_n(X,Y)$-ban.*

Bizonyítás. Luzin tétele szerint f Luzin λ^n-mérhető. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ beágyazás. Az előző tételt fogjuk alkalmazni lokálisan φ-re. Legyen $u_0 \in U$ és válasszunk olyan $c > 0$-t, amelyre $|\det(\varphi'_{p_0}(u_0))| > c$. Választva olyan kompakt lezártú U_0 környezetét u_0-nak és P_0 kompakt lezártú környezetét p_0-nak, amelyre φ_p kölcsönösen egyértelmű U_0-on, ha $p \in P_0$, továbbá $|\det(\varphi'_p(u))| > c$, ha $u \in U_0$ és $p \in P_0$, az integráltranszformációs formula szerint azt kapjuk, hogy bármely $B \subset U_0$ mérhető halmazra

$$\lambda^n(\varphi_p(B)) = \int_B \left|\det(\varphi'_p(u))\right| \, d\lambda^n(u) \geq c\lambda^n(B).$$

A $\lambda^n(\varphi_p(B)) \geq c\lambda^n(B)$ egyenlőtlenség nem mérhető B halmaz esetén is fennáll, mivel egyébként lenne olyan $A \supset \varphi_p(B)$ Borel-burok, amelyre $\lambda^n(A) < c\lambda^n(\varphi_p^{-1}(A))$ teljesülne valamely $p \in P_0$-ra. Ez ellentmondás, mivel $\varphi_p^{-1}(A)$ Borel-halmaz, tehát mérhető.

Így az előző tétel alkalmazható $\varphi|U_0 \times P_0$-ra. Mint a 18.1 definícióban említettük, ez elég annak bizonyítására, hogy (L) [(S), (R), (T), (M)] fennáll f, U, P, p_0, φ, λ^n-re.

18.7. Tétel. *A 18.1 definíció jelöléseit fogjuk használni. Legyenek Z, Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ topologikus terek. Legyenek X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és X euklidészi terek nyílt részhalmazai és legyen $Y \subset \mathbb{R}^l$ nyílt. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre φ_p immerziója U-nak X-be minden $p \in P$-re, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x, y) \in D$-re

$$f(x) = h(x, y, f_1(g_1(x, y)), \ldots, f_n(g_n(x, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra h folytonos a többi változóban;

(3) az f_i függvény $\mathcal{R}_{k+l}$-ben van X_i-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^1$-ben van D-n ($i = 1, 2, \dots, n$);
(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, hogy $(\varphi(u_0, p_0), y_0) \in D$ és az

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p_0), y)$$

leképezés deriváltjának rangja az (u_0, y_0) pontban $k + l$, ha $1 \le i \le n$.

Ekkor az (R) feltétel teljesül f, U, P, p_0, φ, λ^k-ra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $p_m \to p_0$. Válasszunk U_0, P_0, Y_0 nyílt környezetét u_0, p_0, y_0-nak úgy, hogy $(\varphi(u, p), y)$ a D-ben legyen, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$, $y \in Y_0$, továbbá, az $(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p), y)$ leképezés deriváltjának rangja $k + l$ legyen $u \in U_0$, $p \in P_0$, $y \in Y_0$ és $1 \le i \le n$ esetén. Ez lehetséges, mivel D nyílt, a g_i és φ függvények $\mathcal{C}^1$-ben vannak, a rang alulról félig folytonos, és $U \times Y$ dimenziója $k + l$, így a rang ennél nagyobb nem lehet.

Mivel az f_1 függvény $\mathcal{R}_{k+l}$-ben van, van olyan p_{m_r} részsrozata p_m-nek, hogy egy nulla λ^{k+l}-mértékű E_1 halmaz pontjait kivéve minden $(u, y) \in U_0 \times Y_0$ párra

$$f_1(g_1(\varphi(u, p_{m_r}), y)) \to f_1(g_1(\varphi(u, p_0), y)).$$

Most a p_{m_r} részsorozatra felhasználva, hogy f_2 a $\mathcal{R}_{k+l}$ osztályban van, olyan $p_{m_{r_s}}$ részsorozatot kapunk, amelyre egy nulla λ^{k+l}-mértékű E_2 halmazt kivéve, minden $(u, y) \in U_0 \times Y_0$ párra

$$f_2(g_2(\varphi(u, p_{m_{r_s}}), y)) \to f_2(g_2(\varphi(u, p_0), y)),$$

stb. Végül p_m egy olyan p_{m_t} részsorozatát kapjuk, hogy a nulla λ^{k+l}-mértékű $E = \cup_{i=1}^n E_i$ halmaz pontjait kivéve minden $(u, y) \in U_0 \times Y_0$ párra

$$f_i(g_i(\varphi(u, p_{m_t}), y)) \to f_i(g_i(\varphi(u, p_0), y)),$$

ha $i = 1, 2, \dots, n$. Fubini tétele szerint majdnem minden $y \in Y_0$-ra teljesül, hogy majdnem minden $u \in U_0$-ra $(u, y) \notin E$. Rögzítve bármely ilyen y-t, a függvényegyenletből, és abból, hogy rögzített y mellett h folytonos a többi változóban, azt kapjuk, hogy

$$f(\varphi(u, p_{m_t})) \to f(\varphi(u, p_0)),$$

amely az (R) feltétel a $\varphi | U_0 \times P_0$ függvényre.

Így megmutattuk, hogy minden $u_0 \in U$-hoz van olyan U_0 nyílt környezete u_0-nak és p_{m_t} részsorozata p_m-nek, hogy majdnem minden $u \in U_0$-ra

$$f(\varphi(u, p_{m_t})) \to f(\varphi(u, p_0)).$$

Mivel U Lindelöf-tér, a 18.1 definícióban tett megjegyzés szerint (R) teljesül.

18.8. Példa. A 18.1 definíció jelöléseit fogjuk használni. Tekintsük a következő függvényegyenletet:

$$\sum_{i=0}^{n} h_i(x,y) f(x+g_i(y)) = 0,$$

ha $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az $h_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvények folytonosak, és a $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ függvények $\mathcal{C}^1$-ben vannak. Bevezetve az $x_j = x + g_j(y)$ új változót x helyett, azt kapjuk, hogy

$$f(x_j) = -\sum_{i \neq j} \frac{h_i(x_j - g_j(y), y)}{h_j(x_j - g_j(y), y)} f(x_j - g_j(y) + g_i(y)). \tag{1}$$

Hogy megmutassuk, az előző tétel (5) feltétele teljesül, a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{p_0}^{(1)}}{\partial u_1}(u) & \dots & \dfrac{\partial \varphi_{p_0}^{(1)}}{\partial u_k}(u) & \dfrac{d\, g_i^{(1)}}{d\, y}(y) - \dfrac{d\, g_j^{(1)}}{d\, y}(y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{p_0}^{(m)}}{\partial u_1}(u) & \dots & \dfrac{\partial \varphi_{p_0}^{(m)}}{\partial u_k}(u) & \dfrac{d\, g_i^{(m)}}{d\, y}(y) - \dfrac{d\, g_i^{(m)}}{d\, y}(y) \end{pmatrix}$$

mátrix rangját kell megvizsgálnunk, ahol $\varphi_{p_0}^{(r)}$ és $g_i^{(r)}$ a φ_{p_0} és a g_i koordinátái. Ha ez $k+1$, akkor alkalmazhatjuk az előző tételt $l = 1$-el. A feltétel geometriailag azt jelenti, hogy a $g_i'(y) - g_j'(y)$ vektor nincs benne a $\varphi_{p_0}'(u)$ lineáris operátor képterében (amelyről tudjuk, hogy k-dimenziós). A képtér akármelyik k-dimenziós altere lehet $\mathbb{R}^m$-nek. Megtörténhet, hogy bármilyen k-dimenziós lineáris altérhez létezik olyan $y \in \mathbb{R}$, hogy a $g_i'(y) - g_j'(y)$, $i \neq j$ vektorok egyike sincs benne ebben az altérben. Ekkor tételünk közvetlenül alkalmazható, és mutatja, hogy $f \in \mathcal{R}_{k+1}$-ből következik $f \in \mathcal{R}_k$. Ha ez a helyzet $k = m-1, m-2, \dots, 0$-ra, akkor kapjuk, hogy minden mérhető megoldás folytonos. De vannak esetek, amikor nem ez a helyzet. Ha például a g_i függvények deriváltja konstans, azaz ha $g_i(y) = ya_i + b_i$, akkor semmilyen rögzített j-re sem alkalmazhatjuk az (1) egyenletet, hogy $f \in \mathcal{R}_{k+1}$-ből megkapjuk $f \in \mathcal{R}_k$-t, mivel valamilyen φ függvényre $\varphi_{p_0}'(u)$ képtere tartalmazni fog néhány $g_i'(y) - g_j'(y) = a_i - a_j$ vektort. De az (1) egyenletek közül *bármelyiket* használhatjuk. Mivel $\mathcal{R}_k$-ban lenni lokális tulajdonság, elég megmutatni, hogy $\mathbb{R}^m$ bármely k-dimenziós lineáris alteréhez van olyan j, hogy az $a_i - a_j$, $i \neq j$ vektorok egyike sincs az adott altérben. Például ez biztosan teljesül, ha $n \geq m$ és az $a_0, \dots, a_n$ vektorok általános helyzetben vannak. Ha ez a feltétel nem teljesül, még mindig lehetséges, hogy tételünk alkalmazható. Egy hasonló (de valamivel egyszerűbb) esetet meg fogunk vizsgálni az alkalmazások között, a 21.11 pontban.

18.9. Megjegyzés. Bár, mint a fenti példa mutatja, a 18.7 tétel számos esetben alkalmazható, nem kielégítő, mivel az (5) feltétel túl erős. Ha a 18.7 tételt alkalmazva akarjuk bizonyítani, hogy $f \in \mathcal{R}_k$, a φ függvény tetszőleges lehet. Így az (5) feltétel implicit módon azt jelenti, hogy $\dfrac{\partial g_i}{\partial x}$ rangja nagy kell legyen, még akkor is, ha $\dfrac{\partial g_i}{\partial y}$ rangja nagy. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy g_i-nek az x minden koordinátájától függenie kell, ami nem kényelmes. Enyhíteni szeretnénk ezt a feltételt. A helyett, hogy

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p_0), y)$$

rangja a maximálisan lehetséges $k + l$ az (u_0, y_0) pontban, csak azt fogjuk feltenni, hogy rangja egy (i-től függő) k_i konstans az (u_0, p_0, y_0) valamely környezetében. Azonban ekkor $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{M}_k$-beli függvényekkel kell dolgoznunk, és durván szólva, tételeink azt mondják, hogy $\mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{M}_{k+1}$-beli megoldások $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{M}_k$-ban is benne vannak.

Először csak az (M) mérhetőségi feltétellel fogunk foglalkozni. Az alábbi lemmát fogjuk felhasználni, hogy bebizonyítsuk, ha az (M) feltétel teljesül az f_i függvényekre, akkor f-re is.

18.10. Lemma. *18.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, Y topologikus tér, $0 \le k \le n$ és $f \in \mathcal{M}_k(X, Y)$. Ha ψ az $\mathbb{R}^m$ tér U nyílt részhalmazának $\mathcal{C}^1$-leképezése X-be, deriváltjának rangja mindenütt k, akkor az $f \circ \psi$ függvény λ^m-mérhető.*

Bizonyítás. A lemma közvetlenül következik a rangszám tételből. Valóban, a rangszám tétel szerint minden $u_0 \in U$-nak van olyan U_0 környezete, hogy $\psi|U_0$ felírható $\alpha \circ p \circ \beta$ alakban. Itt, az $I = \,]-1, 1[$ jelöléssel, a β leképezés diffeomorfizmusa U_0-nak I^m-re úgy, hogy $\beta(u_0) = 0$, a p projekciója I^m-nek I^n-be $p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ alakú, és α diffeomorfizmusa I^n-nek egy X_0 nyílt halmazra, amely 0-t $x_0 = \psi(u_0)$-ba viszi. Az $I^k \times \{0\} \subset I^n$ halmazt I^k-val azonosítva azt kapjuk, hogy $\alpha|I^k$ immerzió, így az $\left(f \circ (\alpha|I^k)\right)^{-1}(V)$ halmaz λ^k-mérhető Y minden V nyílt részhalmazára. Mivel a $p^{-1}(A)$ halmaz λ^m-mérhető I^k bármely λ^k-mérhető A részhalmazára, és a $\beta^{-1}(B)$ halmaz λ^m-mérhető I^m bármely λ^m-mérhető B részhalmazára, azt kapjuk, hogy az $f \circ (\psi|U_0)$ függvény λ^m-mérhető. Felhasználva, hogy U Lindelöf-tér, kapjuk az általános esetet.

18.11. Tétel. *18.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen Z topologikus tér, Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pedig szeparábilis metrikus tér. Legyenek X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és X nyílt részhalmazai valamely euklidészi tereknek és legyen $Y \subset \mathbb{R}^l$ nyílt. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak és tekintsük az $f : X \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, $\psi : U \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-immerziója U-nak X-be, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) *minden $(x, y) \in D$-re*

$$f(x) = h(x, y, f_1(g_1(x, y)), \ldots, f_n(g_n(x, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra h folytonos a többi változóban;
(3) az f_i függvény $\mathcal{M}_{k_i}$-ben van X_i-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;
(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^1$-ben van D-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;
(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, amelyre $(\psi(u_0), y_0) \in D$ és az

$$(u, y) \mapsto g_i(\psi(u), y)$$

leképezés deriváltjának rangja k_i az (u_0, y_0) egy környezetében, ha $1 \le i \le n$.

Ekkor $u \mapsto f(\psi(u))$ Lebesgue-mérhető.

Bizonyítás. Válasszunk olyan U_0 nyílt környezetét u_0-nak és Y_0 nyílt környezetét y_0-nak, amelyre $(\psi(u), y)$ a D-ben van, ha $u \in U_0$, $y \in Y_0$, továbbá, az $(u, y) \mapsto g_i(\psi(u), y)$ leképezés deriváltjának rangja k_i minden $u \in U_0$, $y \in Y_0$, $1 \le i \le n$-re. (5) szerint ez lehetséges. Az előző lemmából azt kapjuk, hogy az $(u, y) \mapsto f_i(g_i(\psi(u), y))$ leképezés λ^{k+l}-mérhető. Fubini tétele szerint, kivéve az Y halmaz y pontjainak egy nulla λ^l-mértékű E_i részhalmazát, az $u \mapsto f_i(g_i(\psi(u), y))$ leképezés λ^k-mérhető U_0-on. Innen, kivéve az $E = \cup_{i=1}^n E_i$ halmaz pontjait, minden $y \in Y_0$-ra az

$$u \mapsto (\psi(u), f_1(g_1(\psi(u), y)), \dots, f_n(g_n(\psi(u), y)))$$

leképezése U_0-nak $D_y \times Z_1 \times \cdots \times Z_n$-be mérhető. Mivel bármely rögzített y-ra a h függvény folytonos a többi változóban, azt kapjuk, hogy bármely rögzített $y \in Y_0 \setminus E$-re az

$$u \mapsto h(\psi(u), y, f_1(g_1(\psi(u), y)), \dots, f_n(g_n(\psi(u), y)))$$

leképezés mérhető. Ez azt jelenti, hogy $u \mapsto f(\psi(u))$ mérhető U_0-on.
Mivel U Lindelöf-tér, kapjuk az állítást.

Az alábbi tétel a kulcs az 18.7 tétel 18.13 általánosításához.

18.12. Tétel. *18.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen $U \subset \mathbb{R}^m$, X és P euklidészi terek nyílt részhalmazai, $p_0 \in P$, Y szeparábilis metrikus tér, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre* $\operatorname{rank} \varphi'_p(u) = k$ *minden $u \in U$, $p \in P$-re. Ha $f \in \mathcal{M}_k(X, Y) \cap \mathcal{L}_k(X, Y)$, akkor az (L) feltétel teljesül f, U, P, p_0, φ és λ^m-el.*

Bizonyítás. Legyen $u_0 \in U$. Mivel $\varphi'_{p_0}(u_0)$ rangja k, az u-t felírhatjuk $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ alakban úgy, hogy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_0, p_0)$$

determinánsa ne legyen 0. Így van olyan $U_1 \times U_2$ környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy $\overline{U_1}$, az U_1 lezártja kompakt, $\overline{U_1} \times U_2 \subset U$, és az

$$u_1 \mapsto \varphi(u_1, u_2, p)$$

leképezés immerziója U_1-nek minden $u_2 \in U_2$, $p \in P_0$-re. Feltehetjük, hogy $\lambda^k(U_1)$ és $\lambda^{m-k}(U_2)$ végesek. Mivel $f \in \mathcal{L}_k$, minden $\varepsilon, \sigma > 0$-hoz és minden $u_2 \in U_2$-höz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|u_2' - u_2| < \delta$, $|p - p_0| < \delta$, akkor $u_2' \in U_2$ és

$$\lambda^k\{u_1 \in U_1 : \operatorname{dist}(f(\varphi(u_1, u_2', p)), f(\varphi(u_1, u_2, p_0))) \geq \sigma/2\} \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda^{m-k}(U_2)}.$$

Alkalmazva ezt $p = p_0$-ra is, és kombinálva a két egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$(1) \quad \lambda^k\{u_1 \in U_1 : \operatorname{dist}(f(\varphi(u_1, u_2', p)), f(\varphi(u_1, u_2', p_0))) \geq \sigma\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^{m-k}(U_2)}$$

minden u_2'-re, amelyre $|u_2' - u_2| < \delta$ és minden p-re, amelyre $|p - p_0| < \delta$. Rögzített $\varepsilon, \sigma > 0$-ra legyen δ_{u_2} az $u_2 \in U_2$-nek megfelelő δ.

Legyen C tetszőleges kompakt részhalmaza $U_1 \times U_2$-nek és legyen $C_2 = \{u_2 : (u_1, u_2) \in C\}$ a projekciója C-nek. Az $u_2 \in C_2$ középpontú, δ_{u_2}-nél kisebb sugarú zárt gömbök Vitali-lefedését alkotják C_2-nek, így kiválaszthatunk belőlük egy B_i, $i = 1, 2 \dots$ diszjunkt sorozatot, amely λ^{m-k}-majdnem mindenütt lefedi C_2-t.

Mivel $f \in \mathcal{M}_k$, az előző lemma szerint az $u \mapsto f(\varphi(u, p))$ leképezések λ^m-mérhetőek minden $p \in P_0$-re. Így az

$$u \mapsto \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p)), f(\varphi(u, p_0)))$$

leképezés is mérhető, azaz az

$$(2) \qquad \{u \in U_1 \times B_i : \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p)), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma\}$$

halmazok λ^m-mérhetőek. Felhasználva (1)-et és a Fubini-tételt, azt kapjuk, hogy a (2) halmaz λ^m-mértéke legfeljebb $\lambda^{m-k}(B_i)\varepsilon/\lambda^{m-k}(U_2)$. Mivel a B_i halmazok diszjunkt majdnem lefedését alkotják C_2-nek, azt kapjuk, hogy

$$\lambda^m\{u \in C : \operatorname{dist}(f(\varphi(u, p)), f(\varphi(u, p_0))) \geq \sigma\} \leq \varepsilon.$$

Így megmutattuk, hogy minden $u_0 \in U$-nak van olyan $U_0 = U_1 \times U_2$ környezete, hogy (L) teljesül ezen a környezeten. Az (L) definíciójánál tett megjegyzés szerint következik az állítás.

18.13. Tétel. *18.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen Z topologikus tér, és legyenek Z_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ szeparábilis metrikus terek. Legyenek X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ és X különböző euklidészi terek nyílt részhalmazai és legyen $Y \subset \mathbb{R}^l$ is nyílt halmaz. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \dots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ immerziója U-nak X-be, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x, y) \in D$*-re*

$$f(x) = h(x, y, f_1(g_1(x, y)), \ldots , f_n(g_n(x, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$*-ra* h *folytonos a többi változóban;*
(3) az f_i *függvény* $\mathcal{R}_{k_i} \cap \mathcal{M}_{k_i}$*-ben van* $(i = 1, 2, \ldots , n)$*;*
(4) a g_i *függvény* $\mathcal{C}^1$*-ben van* D*-n* $(i = 1, 2, \ldots , n)$*;*
(5) minden $u_0 \in U$*-hoz van olyan* y_0*, amelyre* $(\varphi(u_0, p_0), y_0) \in D$ *és az*

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p), y)$$

leképezés deriváltjának rangja k_i *az* (u_0, p_0, y_0) *pont egy környezetén minden* $1 \leq i \leq n$*-re.*

Ekkor az (R) és (M) feltételek teljesülnek f*,* U*,* P*,* p_0*,* φ*,* λ^k*-val.*

Bizonyítás. A 18.11 tételből következik, hogy az (M) feltétel teljesül f, U, P, p_0, φ, λ^k-val. Rögzítsünk egy $u_0 \in U$-t és válasszunk egy y_0-at u_0-hoz (5) szerint. Válasszunk olyan U_0, P_0 illetve Y_0 környezeteit u_0-nak, p_0-nak, illetve y_0-nak, amelyekre $(\varphi(u, p), y) \in D$, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$ és $y \in Y_0$, továbbá az

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p), y)$$

leképezés deriváltjának rangja k_i az $U_0 \times P_0 \times Y_0$ halmazon minden $1 \leq i \leq n$-re. Annak bizonyítása, hogy az (R) feltétel is teljesül, pontosan úgy megy, mint a 18.7 tételben, de az előző tételt kell felhasználnunk a defníció helyett.

18.14. Feltételek. Ennek a paragrafusnak a hátralévő részében 18.1 jelöléseit fogjuk használni, de csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor X nem üres nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, f pedig az X-et egy Y szeparábilis metrikus térbe képezi, mivel el kívánjuk kerülni azokat a nehézségeket, amelyek csak Y topológiájának nem megfelelő voltából erednek.

18.15. Megjegyzés. 18.14 feltételei mellett, egy másik, a 18.1 definícióban tárgyalttól eltérő lokalitási elv is fennáll. Nevezetesen, $f \in \mathcal{L}_k(X, Y)$ akkor és csak akkor, ha minden $x_0 \in X$-nek van olyan $X_0 \subset X$ nyílt környezete, hogy $f|X_0 \in \mathcal{L}_k(X_0, Y)$. A „csak akkor” rész nyilvánvaló. Az „akkor” részt 18.1 jelöléseit felhasználva bizonyítjuk. Vegyük észre, hogy minden $u_0 \in U$ ponthoz léteznek olyan U_0 illetve P_0 környezetei u_0-nak illetve p_0-nak, hogy $x_0 = \varphi(u_0, p_0)$-ra a $\varphi(U_0, P_0)$ halmaz része X_0-nak. Ez azt jelenti, hogy (L) teljesül $\varphi|U_0 \times P_0$-ra. Most a definícióban megfogalmazott lokalitási elvből kapjuk, hogy $f \in \mathcal{L}_k(X, Y)$. Hasonló lokalitási elv igaz (és ugyanígy bizonyítható) $\mathcal{S}_k$-ra, $\mathcal{R}_k$-ra, $\mathcal{T}_k$-ra és $\mathcal{M}_k$-ra.

18.16. Az $\mathcal{M}_k$ osztály. 18.14 feltételei mellett, legyen

$$\mathcal{A}_k = \{A \subset X : \xi_A \in \mathcal{M}_k(X, \{0,1\})\},$$

ahol $\{0,1\}$-et mint diszkrét teret tekintjük. Könnyű látni, hogy $\mathcal{A}_k$ egy σ-algebra, és egy $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor van $\mathcal{M}_k(X,Y)$-ban, ha $f^{-1}(V)$ az $\mathcal{A}_k$ halmazosztályban van Y bármely V nyílt részhalmazára. Így $\mathcal{M}_k(X,Y)$ vizsgálata az $\mathcal{A}_k$ σ-algebra vizsgálatára redukálható. Könnyű látni, hogy $\mathcal{A}_n$ az X összes λ^n-mérhető részhalmazainak osztálya, $\mathcal{A}_0$ pedig az X összes részhalmazainak osztálya. Megmutatjuk, hogy *$A \in \mathcal{A}_k$ akkor és csak akkor, ha minden $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmazra és minden $\psi : U \to X$ immerzióra az $A \cap \operatorname{rng} \psi$ halmaz χ^k-mérhető.*

Bármely $u \in U$-hoz van olyan C kompakt környezete u-nak, hogy ψ megszorítása C-re kölcsönösen egyértelmű. Az integráltranszformációs formula szerint, ha $\psi^{-1}(A) \cap C$ Lebesgue-mérhető, akkor $\psi(C) \cap A$ Hausdorff-mérhető. Megfordítva is, ha $\psi(C) \cap A$ Hausdorff-mérhető, akkor felhasználva, hogy $\psi(C)$ Hausdorff-mértéke véges, léteznek olyan $B, N \subset \psi(C)$ Borel-halmazok, hogy $B \subset A$, $(A \cap \psi(C)) \setminus B \subset N$ és $\chi^k(N) = 0$. A $(\psi|C)^{-1}(B)$ és $(\psi|C)^{-1}(N)$ halmazok Borel-halmazok, és az utóbbi csak nulla mértékű lehet. Ez azt jelenti, hogy a $(\psi|C)^{-1}(A \setminus B)$ halmaz λ^k-mértéke is nulla, így $(\psi|C)^{-1}(A)$ is λ^k-mérhető.

Most minden $u \in U$-hoz választva a fentiek szerint egy C kompakt környezetet, ezek közül megszámlálható sok lefedi U-t. Ha az $A \cap \operatorname{rng} \psi$ halmaz χ^k-mérhető, akkor a $(\psi|C_i)^{-1}(A)$ halmazok mind λ^k-mérhetőek, és így $\psi^{-1}(A)$ is λ^k-mérhető. A másik irányban, ha a $\psi^{-1}(A)$ halmaz λ^k-mérhető, akkor a $\psi^{-1}(A) \cap C_i$ halmazok is mérhetőek, így $A \cap \operatorname{rng} \psi = (\cup_i \psi(C_i)) \cap A$ is χ^k-mérhető halmaz.

Amit eddig bebizonyítottunk, abból következik, hogy *minden χ^k-mérhető halmaz $\mathcal{A}_k$-ban van*, mivel $\operatorname{rng} \psi$ mindig χ^k-mérhető. *Egy megszámlálhatóan (χ^k, k)-rektifikálható halmaz akkor és csak akkor van $\mathcal{A}_k$-ban, ha χ^k-mérhető.* Csak azt kell megmutatnunk, hogy ha $A \in \mathcal{A}_k$ megszámlálhatóan (χ^k, k)-rektifikálható, azaz ha az A halmaz χ^k-majdnem részhalmaza $\mathbb{R}^k$-beli korlátos halmazok Lipschitz-képei megszámlálható uniójának, akkor az A halmaz χ^k-mérhető. Federer [42] könyvének 3.2.29 tétele szerint $A \subset N \cup (\cup_{i=1}^{\infty} S_i)$, ahol $\chi^k(N) = 0$ és minden S_i egy k-dimenziós $\mathcal{C}^1$-részsokasága X-nek. Az S_i-t kisebb részekre osztva, ha kell, feltehetjük, hogy S_i az $\mathbb{R}^k$ valamely nyílt részhalmazának valamely ψ_i $\mathcal{C}^1$-immerzió általi képe. Mivel a $\psi_i^{-1}(A)$ halmaz λ^k-mérhető, az $A \cap \operatorname{rng} \psi_i = A \cap S_i$ halmaz χ^k-mérhető minden i-re. Innen

$$A = (A \cap N) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} (A \cap S_i))$$

is χ^k-mérhető.

Léteznek nem χ^k-mérhető halmazok is $\mathcal{A}_k$-ban. Egy véges χ^k-mértékű tisztán nem rektifikálható kompakt halmaz bármely nem χ^k-mérhető részhalmaza (Federer [42], 2.2.4) egy ilyen példa. Egy ilyen A halmazra a $\psi^{-1}(A)$ halmaz nulla Lebesgue-mértékű az $\mathbb{R}^k$ bármely nyílt részhalmazának bármely ψ immerziójára X-be. Tisztán nem rektifikálható halmazra példát

Federer könyvében találhatunk, [42], 3.3.20. Lásd még Morgan könyvét, [131], 3.17.

18.17. Összefüggés $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$ és $\mathcal{T}_k$ között. 18.14 feltételeit használjuk. A legegyszerűbb kérdések egyike, hogy $f \in \mathcal{M}_k$-ból következik-e $f \in \mathcal{L}_k$, $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$ vagy $\mathcal{T}_k$. Tudjuk, hogy ez fennáll, ha $k = n$. Ha $k < n$, akkor X és egy megfelelő k-dimenziós sík metszetének a karakterisztikus függvénye $\mathcal{M}_k$-ban van, de nincs benne az $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{R}_k$ és $\mathcal{T}_k$ osztályok egyikében sem.

A másik irányban, tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{L}_k = \mathcal{S}_k \subset \mathcal{R}_k \subset \mathcal{T}_k$. Kérdés, hogy $f \in \mathcal{M}_k$ teljesül-e? Ez triviálisan teljesül, ha $k = 0$. Másrészt, megmutatjuk, hogy az állítás nem bizonyítható ZFC-ben, ha $0 < k \leq n$. Nevezetesen, a kontinuum-hipotézist felhasználva példát adunk olyan f függvényre, amelyre $f \in \mathcal{L}_k$, de $f \notin \mathcal{M}_k$. Gödel és Cohen nevezetes eredményei szerint, a kontinuum-hipotézis független ZFC axiómáitól. Így $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{L}_k$ nem bizonyítható ZFC-ben.

Egy másik kérdés, hogy igaz-e, hogy $\mathcal{S}_k = \mathcal{R}_k$. Ez ismét csak triviálisan teljesül, ha $k = 0$. A kontinuum-hipotézist felhasználva a $0 < k < n$ esetben ellenpéldát adunk, ezzel megmutatva, hogy a két osztály egyenlősége nem tétel ZFC-ben. A $k = n$ esetről semmit sem tudok.

Hasonlóan, azt is kérdezhetjük, hogy teljesül-e $\mathcal{R}_k = \mathcal{T}_k$, vagy legalább $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{R}_k = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{T}_k$. Ez is teljesül $k = 0$-ra. Ha $0 < k < n$, megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{R}_k \subsetneqq \mathcal{M}_k \cap \mathcal{T}_k$, így $\mathcal{R}_k \subsetneqq \mathcal{T}_k$. A $k = n$ esetben tudjuk, hogy $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{R}_n \subset \mathcal{T}_n$, így természetesen $\mathcal{M}_n \cap \mathcal{R}_n = \mathcal{M}_n \cap \mathcal{T}_n$. Nem tudom, teljesül-e, hogy $\mathcal{R}_n = \mathcal{T}_n$?

18.18. Hierarchia a különböző dimenziókhoz tartozó függvényosztályok között. 18.14 feltételeit használjuk. Rögzítsük a $0 \leq k < l \leq n$ dimenziókat, és vizsgáljuk az $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{L}_k$, stb., és az $\mathcal{M}_l$, $\mathcal{L}_l$, stb. osztályok közötti kapcsolatokat.

Azt remélhetjük, hogy csökkentve a dimenziót, az (L), (S), stb. feltételek egyre erősebbé válnak. Az ilyen irányba kapott két pozitív eredmény egyike, hogy ez valóban fennáll az (L), (S) és (R) feltételekre mérhetőség mellett:

$$\mathcal{M}_k \cap \mathcal{M}_l \cap \mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_l.$$

Ennek az állításnak a bizonyítása nagyon hasonló a 18.12 tétel bizonyításához, így nem ismételjük meg az érvelést.

Kontinuum-hipotézis mellett adott ellenpéldával megmutatjuk, hogy $k > 0$-ra

$$\text{ZFC} \nvDash \mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}_k \subset \mathcal{M}_l \cup \mathcal{T}_l.$$

Hasonlóan, kontinuum-hipotézis mellett adott ellenpéldával mutatjuk meg, hogy

$$\text{ZFC} \nvDash \mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l \subset \mathcal{M}_l,$$

kivéve a triviális $k = 0$ esetet.

Sokkal könnyebb látni, hogy általában az ellenkező irányú tartalmazások sem teljesülnek. Bár

$$\mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_0$$

triviálisan fennáll, általában

$$\mathcal{M}_l \not\subset \mathcal{M}_k \qquad \text{ha} \qquad k > 0.$$

Ezt mutatja X és egy alkalmas k-dimenziós sík metszete egy nem χ^k-mérhető részhalmazának a karakterisztikus függvénye. Ugyanez a példa azt is mutatja, hogy

$$\mathcal{M}_l \cap \mathcal{L}_l \not\subset \mathcal{M}_k \cup \mathcal{T}_k.$$

Ha X és egy alkalmas k-dimenziós sík metszetének a karakterisztikus függvényét tekintjük, akkor látjuk, hogy

$$\mathcal{M}_l \cap \mathcal{L}_l \cap \mathcal{M}_k \not\subset \mathcal{T}_k.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\mathcal{M}_l \cap \mathcal{R}_k \subset \mathcal{M}_k.$$

Nem tudom, hogy itt $\mathcal{R}_k$ helyettesíthető-e $\mathcal{T}_k$-val, kivéve a triviális $k = 0$ esetet.

Lássuk a bizonyításokat.

18.19. Tétel. *18.14 feltételei mellett, ha $0 \leq k < l \leq n$, akkor $\mathcal{M}_l \cap \mathcal{R}_k \subset \mathcal{M}_k$.*

Bizonyítás. $k = 0$-ra az állítás triviális. Egyébként legyen ψ egy $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz immerziója X-be. Legyen $u_0 \in U$, és legyen V egy $l-k$-dimenziós altere $\mathbb{R}^n$-nek, amely ortogonális $\operatorname{rng} \psi'(u_0)$-ra. Legyen $\pi : \mathbb{R}^{l-k} \to V$ egy lineáris izometria, és φ-t definiáljuk a $\varphi(u,p) = \psi(u) + \pi(p)$ összefüggéssel. Ekkor $p_0 = 0$-ra $\varphi_{p_0} = \psi$. Válasszunk olyan U_0 illetve P_0 nyílt környezeteit u_0-nak illetve p_0-nak, amelyekre $\varphi(U_0, P_0) \subset X$ és φ immerziója $U_0 \times P_0$-nak X-be. Mivel $f \in \mathcal{M}_l$, az $(u,p) \mapsto f(\varphi(u,p))$ leképezés λ^l-mérhető. Így λ^{l-k}-majdnem minden $p \in P_0$-ra az $u \mapsto f(\varphi(u,p))$ leképezés λ^k-mérhető. Válasszunk egy olyan $p_m \to p_0$ sorozatot, amelyre minden $u \mapsto f(\varphi(u,p_m))$ mérhető. Mivel $f \in \mathcal{R}_k$, van olyan p_{m_s} részsorozat, hogy

$$f(\varphi(u, p_{m_s})) \to f(\varphi(u, p_0))$$

λ^k-majdnem minden $u \in U_0$-ra. Így $u \mapsto f(\psi(u))$ mérhető U_0-on, azaz lokálisan. Ebből következik, hogy $f \in \mathcal{M}_k$.

18.20. Ellenpélda. *18.14 feltételei mellett, egy ellenpéldával megmutatjuk, hogy ha* $0 < k < n$, *akkor* $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{R}_k \subsetneqq \mathcal{M}_k \cap \mathcal{T}_k$.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért X egy nem üres k-dimenziós $V = W \cap X$ alakú alterével fogunk dolgozni, ahol

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)\}$$

valamely rögzített $x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$-ra. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_{k+1}^0 = \cdots = x_n^0 = 0$. Az f függvény csak $x_1, \dots, x_k$-tól fog függni, valamint a W altértől való $r = \sqrt{x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2}$ távolságtól. Legyen $f(x) = 0$, ha $r = 0$. Legyen $g(y)$ értéke 0 vagy 1 az $\mathbb{R}^k$ egy pontjában attól függően, hogy az $y \in \mathbb{R}^k$ koordinátái egész részeinek összege páros vagy páratlan. Ennek a g „sakktábla" függvénynek egy h simítását fogjuk felhasználni f definíciójában. A h folytonos függvényt úgy kapjuk, hogy g átlagát képezzük egy adott y pont körül egy alkalmas téglán, nevezetesen azon $z \in \mathbb{R}^k$ pontok halmazán, amelyekre bármely $z_i - y_i$ koordinátakülönbség $-1/4$ és $1/4$ között van. Bármely m nem negatív egész számra, ha $x_n = \alpha 2^{-m} + (1-\alpha)2^{-m-1}$ valamely $0 < \alpha \leq 1$-el, legyen

$$f(y, x_{k+1}, \dots, x_n) = \alpha h(2^m y) + (1-\alpha)h(2^{m+1}y).$$

Ha $x_n > 1$, akkor legyen

$$f(y, x_{k+1}, \dots, x_n) = h(y).$$

Mivel f folytonos az $x_n \leq 0$ és $x_n > 0$ részein X-nek, nyilván Borel-függvény, így $\mathcal{M}_m$-ben van bármely $0 \leq m \leq n$-re.

Először megmutatjuk, hogy $f \notin \mathcal{R}_k$. Legyen π az

$$y \mapsto (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$$

beágyazása $\mathbb{R}^k$-nak $\mathbb{R}^n$-be. Válasszunk egy $K \in \mathbb{N}$-et és egy y^0 vektort $2^{-K}\mathbb{Z}^k$-ból úgy, hogy ha U az összes olyan y pontok halmaza, amelyekre $y - y^0$ minden koordinátája pozitív, de kisebb, mint 2^{-K}, akkor $\pi(U)$ lezártja V része legyen. Ha $p \in \mathbb{R}$, legyen $\varphi(u, p) = \pi(u) + pe_n$ ahol e_n a $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Egy alkalmas M-re teljesül, hogy $\varphi(u, p) \in X$, ha $u \in U$ és $p \in P = \{p : |p| < 2^{-M}\}$. Legyen $p_0 = 0$ és $p_m = 2^{-m}$, ha $m > M$. A p_m sorozat bármely p_{m_s} részsorozatára teljesül, hogy bármely adott $u \in U$-ra végtelen sok s van, amelyre $f(\varphi(u, p_{m_s})) = 1$, és így $f(\varphi(u, p_{m_s})) \not\to f(\varphi(u, p_0)) = 0$. Így az $U_m = \{u \in U : f(\varphi(u, p_m)) = 1\}$ jelöléssel konvergencia csak akkor állhat fenn, ha van olyan S, hogy minden $s \geq S$-re $u \notin U_{m_s}$, azaz ha $u \notin \cap_{S=1}^\infty \cup_{s=S}^\infty U_{m_s}$. Így majdnem mindenütti konvergencia csak akkor teljesülhet, ha

$$\lambda^k \left(\cap_{S=1}^\infty \cup_{s=S}^\infty U_{m_s}\right) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a majdnem mindenütti konvergenciához $\lambda^k(U_{m_s}) \to 0$ teljesülése szükséges. Ez azonban nem teljesül, mert $\lambda^k(U_{m_s}) = \lambda^k(U)/2^k$, ha $m_s > K$.

Nehezebb megmutatni, hogy $f \in \mathcal{T}_k$. Legyen U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$ és $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ immerzió. Legyen $p_m \to p_0$ egy konvergens sorozat P-ben. Mivel az f függvény folytonos az $X \setminus V$ halmazon, ha $\varphi(u, p_0) \notin V$, akkor $f(\varphi(u, p_m)) \to f(\varphi(u, p_0))$. Így csak a $Z = \{u \in U : \varphi(u, p_0) \in V\}$ halmazzal kell foglalkoznunk. Vezessük be az $U_m^\varepsilon = \{u \in Z : f(\varphi(u, p_m)) \geq \varepsilon\}$ jelölést. Meg kell mutatnunk, hogy majdnem minden $u \in Z$-hez van olyan p_{m_s} részsorozata p_m-nek, amelyre $f(\varphi(u, p_{m_k})) \to f(\varphi(u, p_0)) = 0$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz és minden M-hez van olyan $m \geq M$, hogy $u \notin U_m^\varepsilon$, azaz hogy $u \notin \cup_{\varepsilon > 0} \cup_{M=1}^\infty \cap_{m=M}^\infty U_m^\varepsilon$. Így azt kell megmutatnunk, hogy ennek a halmaznak a λ^k-mértéke nulla. Mivel csökkentve ε-t az $\cup_{M=1}^\infty \cap_{m=M}^\infty U_m^\varepsilon$ halmaz növekszik, ha veszünk egy nullához tartó $\varepsilon_s > 0$ sorozatot és az uniót csak ezen ε_s számokra vesszük, az unió nem változik. Így elég azt megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra az $\cup_{M=1}^\infty \cap_{m=M}^\infty U_m^\varepsilon$ halmaz nulla mértékű, vagy, ami ezzel ekvivalens, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra és bármely M-re a $\cap_{m=M}^\infty U_m^\varepsilon$ halmaz λ^k-mértéke nulla. Ha ez nem teljesülne, akkor lenne olyan $\varepsilon > 0$ és M, amelyre ennek a halmaznak létezne egy u_0 sűrűségi pontja. Tegyük fel, hogy ez a helyzet, és rögzítsük ε-t, M-et és u_0-t. Feltehetjük továbbá, hogy $u_0 \in \cap_{m=M}^\infty U_m^\varepsilon$.

Írjuk φ-t $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ alakba, ahol $\varphi_1(u, p)$ az első k koordinátája $\varphi(u, p)$-nak, $\varphi_2(u, p)$ pedig az utolsó $n - k$. Mivel u_0 sűrűségi pontja Z-nek is, azt kapjuk, hogy $\varphi'_{2,p_0}(u_0) = 0$ és $\det \varphi'_{1,p_0}(u_0) \neq 0$. Az inverz függvény tétel bizonyítását felhasználva, találhatunk olyan $c > 0$-t és u_0 középpontú U_0 nyílt gömböt, valamint P_0 nyílt környezetét p_0-nak, hogy ha $\mathbb{B}_\delta(u_0)$ része U_0-nak és $p \in P_0$, akkor $\mathbb{B}_{c\delta}(\varphi_{1,p}(u_0))$ része legyen $\varphi_{1,p}(\mathbb{B}_\delta(u_0))$-nak. Továbbá feltehetjük, hogy $\|\varphi'_{2,p}(u)\| \leq c/(16\sqrt{k})$, ha $(u, p) \in U_0 \times P_0$. Szükség esetén csökkentve U_0-at és P_0-at azt is feltehetjük, hogy valamely pozitív C konstanssal $J(\varphi_{1,p})(u) \leq C$, ha $(u, p) \in U_0 \times P_0$, ahol J a Jacobi-determináns abszolút értéke.

Jelölje $\alpha(k)$ az $\mathbb{R}^k$ tér 1 sugarú gömbjeinek λ^k-mértékét. Ekkor természetesen bármely δ sugarú gömb λ^k-mértéke $\alpha(k)\delta^k$. Mivel u_0 sűrűségi pont, van olyan $\delta_0 > 0$, hogy a $\mathbb{B}_\delta(u_0)$ zárt gömbre

$$\lambda^k \left(\mathbb{B}_\delta(u_0) \setminus (\cap_{m=M}^\infty U_m^\varepsilon)\right) < \frac{c^k \delta^k}{C k^{k/2} 2^{3k}},$$

ha $0 < \delta \leq \delta_0$. Ehhez a δ_0-hoz válasszunk egy $s_0 > 1$-et, amelyre $2^{-s_0+1} \leq c\delta_0/\sqrt{k}$. Válasszunk egy M_0-at, amelyre $m \geq M_0$ esetén $p_m \in P_0$ és $\varphi(u_0, p_m)$ távolsága W-től kisebb, mint 2^{-s_0-2}. Rögzítsünk egy m-et, amely nem kisebb, mint $\max\{M, M_0\}$. Mivel $u_0 \in U_m^\varepsilon$ teljesül, $\varphi(u_0, p_m)$ távolsága W-től nagyobb, mint 0, de kisebb, mint 2^{-s_0-2}. Válasszunk egy s-et úgy, hogy ez a távolság ne legyen kisebb, mint $3 \cdot 2^{-s-3}$, de kisebb legyen, mint $3 \cdot 2^{-s-2}$. Nyilván $s \geq s_0$. Legyen $\sqrt{k}2^{-s}/c < \delta \leq \sqrt{k}2^{-s+1}/c$. Ekkor

$0 < \delta \le \delta_0$. Jelölje S az összes olyan $y \in \mathbb{R}^k$ pontok halmazát, amelyekre $2^s y$ minden koordinátájának ugyanaz az egész része, mint $2^s y_0$ megfelelő koordinátájának, ahol $y_0 = \varphi_1(u_0, p_m)$. Az S halmaz 2^{-s} hosszúságú intervallumok Descartes-szorzata. Így S átmérője $\sqrt{k}2^{-s}$ és mivel $y_0 \in S$, az S halmaz része $\varphi_{1,p_m}(\mathbb{B}_\delta(u_0))$-nak. Felhasználva $\|\varphi'_{2,p_m}(u)\|$ becslését, amely minden $u \in \mathbb{B}_\delta(u_0)$-re teljesül, a

$$|\varphi_2(u, p_m) - \varphi_2(u_0, p_m)| \le c\delta/(16\sqrt{k}) \le 2^{-s-3}$$

becslést kapjuk. Ebből következik, hogy $\varphi(u, p_m)$ távolsága W-től 2^{-s-2} és 2^{-s} közé esik. Jelölje S_0 az S azon y pontjainak halmazát, amelyekre a $h(2^s y)$, $h(2^{s+1} y)$ és $h(2^{s+2} y)$ függvényértékek mindegyike nulla. Egy $y \in S$ pontosan akkor van S_0-ban, ha $2^s y$, $2^{s+1} y$ és $2^{s+2} y$ minden koordinátájának a törtrésze $1/4$ és $3/4$ között van. Ez azt jelenti, hogy $2^s y$ minden koordinátájának a törtrésze az $[5/16, 6/16] \cup [10/16, 11/16]$ halmazba esik. Így az S_0 halmaz λ^k-mértéke 2^{-sk-3k}. Ha $u \in \mathbb{B}_\delta(u_0)$ és $y = \varphi_2(u, p_0) \in S_0$, akkor $u \notin U_m^\varepsilon$. De $J(\varphi_{1,p_m})(u) \le C$, így az integráltranszformációs formula szerint

$$\lambda^k(\mathbb{B}_\delta(u_0) \setminus U_m^\varepsilon) \ge \frac{2^{-sk-3k}}{C} \ge \frac{c^k \delta^k}{Ck^{k/2}2^{3k}}.$$

Ez ellentmond δ_0 választásának. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $f \in \mathcal{T}_k$.

A további ellenpéldákhoz egy lemmára lesz szükségünk. Az ellenpéldák az úgynevezett majdnem invariáns halmazok létezésével kapcsolatosak. Ezeket a halmazokat Kakutani és Oxtoby [105] dolgozatában annak bizonyítására használta fel, hogy a Haar-mértéket a komplex egységkörön bővíthetjük egy olyan invariáns mértékké, amelyre a megfelelő $\mathbf{L}^2$-tér Hilbert-tér dimenziója $2^{\mathfrak{c}}$ lesz, ahol $\mathfrak{c}$ a kontinuum számosság. Az alábbi konstrukció a szerző [68] dolgozatában szereplő konstrukció finomítása, ahol — egyebek mellett — Kakutani és Oxtoby eredményét terjesztette ki tetszőleges lokálisan kompakt csoportra. Az ottani gondolatokat itt Sierpinski egy jól ismert konstrukciójával kombináljuk, amellyel Sierpinski kontinuum-hipotézis mellett példát adott az egységnégyzetben egy 1 mértékű (nem mérhető) halmazra, amely bármely egyenesből legfeljebb két pontot tartalmaz. Hogy az alábbi absztrakt halmazelméleti lemma szerepét jobban megértsük, arra az esetre gondolhatunk, amikor X a sík, T az összes olyan diffeomorfizmusok osztálya, amelyek a sík valamely nyílt részhalmazát a sík egy másik nyílt részhalmazára képezik, $\mathcal{F}$ a sík pozitív Lebesgue-mértékű kompakt részhalmazainak osztálya, $\mathcal{G}$ a sík összes egydimenziós $\mathcal{C}^1$-részsokaságainak osztálya, és $\mathfrak{n} = \mathfrak{c} = \aleph_1$.

18.21. Lemma. *Legyen X egy halmaz, T pedig olyan kölcsönösen egyértelmű transzformációk egy osztálya, amelyek mindegyike X egy részhalmazát X-be képezi. Legyenek $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ az X részhalmazainak osztályai. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{n} > \aleph_0$ egy számosság és az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{n}$;

(2) $\operatorname{card}(T) \le \mathfrak{n}$;

(3) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) \le \mathfrak{n}$ *és minden* $F \in \mathcal{F}$*-re* $\operatorname{card}(F) = \mathfrak{n}$;

(4) $\operatorname{card}(\mathcal{G}) \le \mathfrak{n}$ *és minden* $F \in \mathcal{F}$*-re és* $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$*-re, amelyre* $\operatorname{card}(\mathcal{G}_0) < \mathfrak{n}$, *teljesül, hogy* $\operatorname{card}(F \setminus \cup\mathcal{G}_0) = \mathfrak{n}$;

(5) *a* $\mathcal{G}$ *osztály* T*-invariáns, azaz ha* $G \in \mathcal{G}$ *és* $\tau \in T$*, akkor* $\tau(G) \in \mathcal{G}$ *és* $\tau^{-1}(G) \in \mathcal{G}$.

Ekkor létezik az X *halmaz* X_γ *részhalmazainak egy* $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *családja az alábbi tulajdonságokkal:*

(6) $\operatorname{card}(\Gamma) = \mathfrak{n}$;

(7) *az* X_γ, $\gamma \in \Gamma$ *halmazok páronként diszjunktak;*

(8) *minden* $\gamma \in \Gamma$*-ra és* $G \in \mathcal{G}$*-re* $\operatorname{card}(X_\gamma \cap G) < \mathfrak{n}$;

(9) $\operatorname{card}(F \cap X_\gamma) = \mathfrak{n}$, *ha* $\gamma \in \Gamma$ *és* $F \in \mathcal{F}$;

(10) Γ *bármely* Γ_0 *részhalmazára és bármely* $\tau \in T$*-re*

$$\operatorname{card}\Big(\tau(\cup_{\gamma\in\Gamma_0} X_\gamma) \bigtriangleup (\tau(X) \cap (\cup_{\gamma\in\Gamma_0} X_\gamma))\Big) < \mathfrak{n}.$$

Bizonyítás. Jelölje Ω a legkisebb olyan rendszámot, amelynek számossága $\mathfrak{n}$. Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ nem üres, mivel egyébként helyettesíthetjük $\{X\}$-el. Legyen Y egy tetszőleges $\mathfrak{n}$ számosságú halmaz. Mivel $\operatorname{card}(Y \times \mathcal{F}) = \mathfrak{n}$, létezik egy $\alpha \mapsto (y_\alpha, F_\alpha)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése a $\{\alpha : 0 \le \alpha < \Omega\}$ rendszámhalmaznak $Y \times \mathcal{F}$-re. Az $F_0, \dots, F_\alpha, \dots$, $0 \le \alpha < \Omega$ transzfinit sorozat az $\mathcal{F}$ minden F elemét pontosan $\mathfrak{n}$-szer tartalmazza. Hasonlóan feltehetjük, hogy $\mathcal{G}$ sem üres, mivel egyébként helyettesíthetjük $\{\emptyset\}$-al, és választhatunk egy $G_0, \dots, G_\alpha, \dots$, $0 \le \alpha < \Omega$ transzfinit sorozatot, amely $\mathcal{G}$ minden elemét tartalmazza. Válasszunk továbbá egy $\alpha \mapsto \tau_\alpha$ leképezését az $\{\alpha : 0 \le \alpha < \Omega\}$ rendszámhalmaznak a $\{\mathbf{1}_X\} \cup T$ halmazra, amelyre $\tau_0 = \mathbf{1}_X$, ahol $\mathbf{1}_X$ az identikus leképezése X-nek önmagára. Minden $x \in X$-re és minden $\alpha < \Omega$ rendszámra jelölje $C_\alpha(x)$ az X összes olyan pontjainak halmazát, amelyek felírhatók

$$\tau_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ \tau_{\beta_n}^{\varepsilon_n}(x)$$

alakban, ahol $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 \le \beta_k \le \alpha$ és ε_k vagy 1 vagy -1. Itt τ^1 a τ leképezést jelenti, τ^{-1} pedig az inverzét. Világos, hogy $x \in C_\alpha(x)$, és ha $x \in X$ és $0 \le \beta \le \alpha < \Omega$, akkor $C_\beta(x) \subset C_\alpha(x)$ és $\tau_\beta(C_\alpha(x)) = \tau_\beta(X) \cap C_\alpha(x)$. Az is teljesül, hogy

$$\operatorname{card}(C_\alpha(x)) \le \max\{\operatorname{card}(\alpha), \aleph_0\} < \mathfrak{n}.$$

Ha $A \subset X$, akkor a $C_\alpha(A)$ jelölést fogjuk használni az $\cup_{x\in A} C_\alpha(x)$ halmazra. Megmutatjuk, hogy létezik az X elemeinek olyan

$$\{x_\beta^\alpha : 0 \le \beta \le \alpha < \Omega\}$$

transzfinit dupla sorozata, amelyre

$$x_\beta^\alpha \in F_\alpha, \quad \text{ha} \quad 0 \le \beta \le \alpha < \Omega;$$

$$\text{a} \quad \{C_\alpha(x_\beta^\alpha) : 0 \le \beta \le \alpha < \Omega\} \quad \text{halmazok páronként diszjunktak;}$$

$$C_\alpha(x_\alpha^\beta) \text{ diszjunkt bármely } C_\alpha(G_\gamma),\ \gamma \le \alpha \text{ halmaztól.}$$

Állapodjunk meg abban, hogy $(\gamma,\delta) < (\alpha,\beta)$, ha $\gamma < \alpha$ vagy $\gamma = \alpha$ és $\delta < \beta$ (lexikografikus rendezés); ezzel $\{(\alpha,\beta) : 0 \le \beta \le \alpha < \Omega\}$ jólrendezett halmaz. Az $\{x_\beta^\alpha : 0 \le \beta \le \alpha < \Omega\}$ sorozatot transzfinit indukcióval definiáljuk. Legyen x_0^0 tetszőleges pontja $F_0 \setminus G_0$-nak. Tegyük fel, hogy $0 \le \beta \le \alpha < \Omega$, és hogy x_δ^γ már definiálva van minden $(\gamma,\delta) < (\alpha,\beta)$, $0 \le \delta \le \gamma$ párra. Tekintsük az összes $C_\alpha(x_\delta^\gamma)$ halmazok $D(\alpha,\beta)$ unióját, ahol (γ,δ) az összes $(\gamma,\delta) < (\alpha,\beta)$ párokat futja be. Ekkor

$$\operatorname{card}(D(\alpha,\beta)) \le (\operatorname{card}(\alpha))^2 \max\{\operatorname{card}(\alpha), \aleph_0\} < \mathfrak{n}.$$

Legyen $E(\alpha)$ az összes $C_\alpha(G_\gamma)$, $\gamma \le \alpha$ halmazok egyesítése. (5) szerint, $E(\alpha)$ valamely $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ osztály egyesítése, amelyre $\operatorname{card}(\mathcal{G}_\alpha) < \mathfrak{n}$. (4) szerint $F_\alpha \setminus E(\alpha)$ számossága $\mathfrak{n}$, így $(F_\alpha \setminus E(\alpha)) \setminus D(\alpha,\beta)$ nem üres. Legyen x_β^α egy tetszőleges pontja az $(F_\alpha \setminus E(\alpha)) \setminus D(\alpha,\beta)$ halmaznak. Ekkor $C_\alpha(x_\beta^\alpha)$ diszjunkt minden $C_\zeta(x)$-től, ahol $x = x_\delta^\gamma$ valamely $(\gamma,\delta) < (\alpha,\beta)$-ra vagy $x \in G_\zeta$ valamely $\zeta \le \alpha$-ra. Egyébként ugyanis azt kapnánk, hogy

$$\tau_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ \tau_{\beta_n}^{\varepsilon_n}(x_\beta^\alpha) = \tau_{\delta_1}^{\eta_1} \circ \cdots \circ \tau_{\delta_m}^{\eta_m}(x),$$

ahol $\beta_k \le \alpha$, $\delta_j \le \alpha$, ε_k vagy 1 vagy -1, és η_j is vagy 1 vagy -1, $k = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$. Így

$$x_\beta^\alpha = \tau_{\beta_n}^{-\varepsilon_n} \circ \cdots \circ \tau_{\beta_1}^{-\varepsilon_1} \circ \tau_{\delta_1}^{\eta_1} \circ \cdots \circ \tau_{\delta_m}^{\eta_m}(x),$$

ami ellentmond x_β^α választásának.

Legyen

$$\Gamma = \{\zeta :\ \zeta \text{ rendszám és } 0 \le \zeta < \Omega\};$$

$$X_\zeta = \bigcup \{C_\alpha(x_\zeta^\alpha) : \zeta \le \alpha < \Omega\}, \qquad \zeta \in \Gamma.$$

A (6) és (7) tulajdonságok nyilvánvalóak. Mivel $x_\zeta^\alpha \in F$ és $x_\zeta^\alpha \in C_\alpha(x_\zeta^\alpha) \subset X_\zeta$, ha $\zeta \le \alpha < \Omega$ és $F_\alpha = F$, azt kapjuk, hogy $F \cap X_\zeta$-nak legalább $\mathfrak{n}$ eleme van. Így (9) teljesül.

(8) bizonyításához vegyük észre, hogy

$$C_\alpha(x_\zeta^\alpha) \cap G_\gamma = \emptyset,$$

ha $\alpha \ge \gamma$. Így ha $G = G_\gamma$, akkor

$$X_\zeta \cap G \subset \cup\{C_\alpha(x_\zeta^\alpha) : \zeta \le \alpha < \gamma\},$$

és a jobb oldal számossága kisebb, mint $\mathfrak{n}$.

(10) bizonyításához legyen $\Gamma_0 \subset \Gamma$ és $\tau \in T$. Tegyük fel, hogy $0 \le \gamma < \Omega$ és $\tau_\gamma = \tau$. Felhasználva, hogy

$$\tau_\gamma\left(C_\alpha(x_\zeta^\alpha)\right) = \tau_\gamma(X) \cap C_\alpha(x_\zeta^\alpha), \quad \text{ha} \quad \gamma \le \alpha < \Omega$$

és

$$\bigcup_{\zeta\in\Gamma_0} X_\zeta = \bigcup \left\{C_\alpha(x_\zeta^\alpha) : \zeta \in \Gamma_0, \quad \zeta \le \alpha < \Omega\right\},$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\tau_\gamma(\cup_{\zeta\in\Gamma_0} X_\zeta) \bigtriangleup \left(\tau_\gamma(X) \cap (\cup_{\zeta\in\Gamma_0} X_\zeta)\right)\\ &\subset \bigcup \Big\{\tau_\gamma\left(C_\alpha(x_\zeta^\alpha)\right) \cup C_\alpha(x_\zeta^\alpha) : \zeta \in \Gamma_0, \quad \zeta \le \alpha < \gamma\Big\}.\end{aligned}$$

Mivel

$$\operatorname{card}\left(C_\alpha(x_\zeta^\alpha) \cup \tau_\gamma\left(C_\alpha(x_\zeta^\alpha)\right)\right) \le \max\left\{\operatorname{card}(\alpha), \aleph_0\right\},$$

a jobb oldal számossága kisebb, mint $\mathfrak{n}$. Így beláttuk (10)-et.

18.22. Ellenpélda. *18.14 feltételei mellett, feltéve a kontinuum-hipotézist, ha $0 < k \le n$, akkor $\mathcal{L}_k \not\subset \mathcal{M}_k$.*

Bizonyítás. Megadunk egy $f \in \mathcal{L}_k$ függvényt, amelyre $f \notin \mathcal{M}_k$. Az előző lemmát kívánjuk alkalmazni. Csak azt fogjuk felhasználni, hogy a $\mathcal{L}_k$ definíciójában szereplő függvények folytonosak, és hogy a 18.2 (3) megjegyzés szerint feltehetjük, hogy a φ_p függvények kölcsönösen egyértelműek. Jelölje T az összes olyan kölcsönösen egyértelmű τ függvények osztályát, amelyek előállíthatók $\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}$ alakban, ahol U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $\varphi : U \times P \to X$ pedig egy folytonos függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ kölcsönösen egyértelmű. Mivel az összes U, P párok számossága kontinuum, és bármely φ folytonos függvényt egyértelműen meghatároznak egy megszámlálható sűrű halmazon felvett értékei, T számossága kontinuum.

Jelölje $\mathcal{F}$ az X összes olyan k-rektifikálható kompakt részhalmazainak osztályát, amelyek χ^k-mértéke pozitív. Mivel minden kompakt halmazt egyértelműen meghatároz a komplementere, a nyílt komplementert pedig egyértelműen meghatározzák azok a részhalmazai, amelyek elemei egy rögzített megszámlálható bázisnak, következik, hogy az $\mathcal{F}$ halmazosztálynak $\mathfrak{c}$ eleme van, és minden elemének a számossága $\mathfrak{c}$.

Alkalmazva az előző lemmát $\mathcal{G} = \emptyset$-al, az X részhalmazainak egy X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ osztályát kapjuk. Ellenpéldánk az X_0 halmaz (azaz $\gamma = 0$-ra az X_γ halmaz) f karakterisztikus függvénye lesz.

Legyen U korlátos nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak és $\psi : U \to X$ immerzió, amelyre az $M = \psi(U)$ rektifikálható és χ^k-mérhető halmaz χ^k-mértéke pozitív de véges. Vegyük észre, hogy ha az $X_0 \cap M$ halmaz χ^k-mértéke nulla lenne, akkor $M \setminus X_0$ tartalmazna egy $F \in \mathcal{F}$ halmazt, ami lehetetlen, mivel

$F \cap X_0 \neq \emptyset$. Ha az $X_0 \cap M$ halmaz χ^k-mérhető lenne pozitív χ^k-mértékkel, akkor tartalmazna valamely $F \in \mathcal{F}$ halmazt. De ez is lehetetlen, mivel $F \cap X_\gamma \neq \emptyset$ és $X_\gamma \cap X_0 = \emptyset$ bármely $\gamma \neq 0$-ra. Így $X \cap M$ nem χ^k-mérhető, tehát 18.16 szerint $f \notin \mathcal{M}_k$.

Megmutatjuk, hogy $f \in \mathcal{L}_k$. Legyen C egy kompakt részhalmaza U-nak. A

$$\{u \in C : f(\varphi_{p_0}(u)) \neq f(\varphi_p(u))\}$$

halmaz megegyezik a

$$\varphi_{p_0}^{-1}\left(\{x \in \varphi_{p_0}(C) : x \in X_0 \bigtriangleup (\varphi_{p_0} \circ \varphi_p^{-1})(X_0)\}\right)$$

halmazzal. A $\tau = \varphi_{p_0} \circ \varphi_p^{-1}$ leképezésre ez a halmaz részhalmaza a

$$\varphi_{p_0}^{-1}\left((\tau(X) \cap X_0) \bigtriangleup \tau(X_0)\right)$$

halmaznak. Ha feltesszük, hogy a kontinuum-hipotézis teljesül, akkor ez a halmaz megszámlálható.

18.23. Ellenpélda. *18.14 feltételeit használva, ha $0 < k < n$ és feltesszük, hogy a kontinuum-hipotézis teljesül, akkor $\mathcal{S}_k \subsetneqq \mathcal{R}_k$.*

Bizonyítás. Az előző ellenpélda konstrukcióját fogjuk használni. A T, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ osztályokat ugyanúgy választva, mint az előző ellenpéldában, kapjuk az X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ halmazokat. Ha $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, legyen $f_m(x) = g_m(x)h_m(x)$, ahol $g_m(x)$ az X_m halmaz karakterisztikus függvénye, és

$$h_m(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \operatorname{dist}(x, D) \leq \frac{1}{m+1} \text{ vagy } \operatorname{dist}(x, D) \geq \frac{1}{m-1}; \\ m(m+1)\left(\operatorname{dist}(x, D) - \frac{1}{m+1}\right), \text{ ha } \frac{1}{m+1} \leq \operatorname{dist}(x, D) \leq \frac{1}{m}; \\ m(m+1)\left(\frac{1}{m-1} - \operatorname{dist}(x, D)\right), \text{ ha } \frac{1}{m} \leq \operatorname{dist}(x, D) \leq \frac{1}{m-1}. \end{cases}$$

Itt D egy adott nem üres k-dimenziós zárt körlemez, amely X és egy k-dimenziós sík metszetének a része. Legyen $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$. (Ugyanúgy, mint az előző ellenpéldában, belátható, hogy $f \notin \mathcal{M}_k$.) Úgy, mint az előző ellenpéldában, kapjuk, hogy minden g_m benne van $\mathcal{L}_k = \mathcal{S}_k$-ban, és így $\mathcal{R}_k$-ban is. Ugyanez triviális a folytonos h_m függvényre. Ebből következik, hogy a $g_m h_m$ szorzat szintén $\mathcal{R}_k$-ban van. Mivel az $X \setminus D$ nyílt halmazon mindenütt az f függvény lokálisan ilyen szorzatok véges összege, azt kapjuk, hogy $f|X \setminus D \in \mathcal{R}_k$. Legyen $\varphi : U \times P \to X$ és legyen

$$F = \{u : \varphi(u, p_0) \in D\}.$$

Nyilván F zárt halmaz. Legyen C kompakt részhalmaza F-nek. Ha $p_m \to p_0$, jelölje $R_{m,j}$ az összes olyan u pontok halmazát, amelyekre $\varphi(u, p_m) \in X_j$, de $\varphi(u, p_0) \notin X_j$, vagy fordítva, $\varphi(u, p_m) \notin X_j$, de $\varphi(u, p_0) \in X_j$.

A kontinuum-hipotézis mellett, az $R_{m,j}$ halmazok és az $R = \cup_{m,j=1}^{\infty} R_{m,j}$ uniójuk megszámlálható, és így λ^k-mértéke nulla.

Vegyük észre, hogy minden i-hez van olyan m_i, hogy ha $m > m_i$, akkor minden $u \in C$-re

$$|\varphi(u, p_m) - \varphi(u, p_0)| < \frac{1}{i+1}.$$

Így, ha $u \in C$, de $u \notin R$ és $u \notin \cup_{j=i}^{\infty} \varphi_{p_0}^{-1}(X_j)$, akkor $\varphi(u, p_m) \notin X_j$ minden $j \geq i$-re. Innen $g_j(\varphi(u, p_m)) = 0$, ha $j \geq i$. Másrészt, $\operatorname{dist}(\varphi(u, p_m), D) < \frac{1}{i+1}$, így $h_j(\varphi(u, p_m)) = 0$, ha $j \leq i$. Tehát azt kapjuk, hogy $f(\varphi(u, p_m)) = 0$, ha $u \notin R$, $u \notin \cup_{j=i}^{\infty} \varphi_{p_0}^{-1}(X_j)$ és $m > m_i$. Mivel az X_j halmazok diszjunktak, ebből következik, hogy $f(\varphi(u, p_m)) \to f(\varphi(u, p_0))$, ha $m \to \infty$ minden $u \notin R$-re, azaz majdnem mindenütt. Megszámlálható sok C halmaz egyesítését véve, azt kapjuk, hogy $f \in \mathcal{R}_k$.

Másrészt, ha $e \neq 0$ ortogonális D-re és $\varphi(u, p) = \psi(u) + pe$, ahol ψ egy izometrikus immerzió, amely az $\mathbb{R}^k$ valamely nem üres nyílt részhalmazát D-re képezi, $p_0 = 0$, akkor $p_m = 1/m$-re azt kapjuk, hogy

$$\{u \in C : |f(\varphi(u, p_m)) - f(\varphi(u, p_0))| \geq 1\} \supset \psi^{-1}(X_m) \cap C$$

egy megszámlálható halmazt kivéve. A bal oldalon álló halmaz λ^k-mértéke megegyezik C mértékével. Ez azt mutatja, hogy $f \notin \mathcal{S}_k$.

18.24. Ellenpélda. *18.14 feltételeit használva, feltéve a kontinuum-hipotézist, ha $0 < k < l \leq n$, akkor $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l \not\subset \mathcal{M}_l$.*

Bizonyítás. Példát adunk olyan $f \in \mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l$ függvényre, amelyre $f \notin \mathcal{M}_l$. Ismét az előző lemmát fogjuk használni. Azt is felhasználjuk, hogy a 18.2 (3) megjegyzés szerint feltehetjük, hogy a $\mathcal{L}_l$ definíciójában szereplő φ_p függvények kölcsönösen egyértelmű immerziók. Jelölje T azt összes olyan kölcsönösen egyértelmű τ függvények osztályát, amelyek reprezentálhatók $\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}$ alakban, ahol U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^l$-nek, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $\varphi : U \times P \to X$ pedig $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ kölcsönösen egyértelmű. Jelölje $\mathcal{F}$ az X összes olyan kompakt l-rektifikálható részhalmazainak osztályát, amelyeknek χ^l-mértéke pozitív. Jelölje $\mathcal{G}$ az X összes k-rektifikálható Borel-halmazainak osztályát. Nem nehéz megmutatni, hogy a $\mathcal{G}$ osztály T-invariáns. Továbbá minden $G \in \mathcal{G}$ halmaz χ^l-mértéke nulla, így ugyanez teljesül megszámlálható sok $G \in \mathcal{G}$ uniójára. Ez azt jelenti, hogy az $F \setminus \cup\mathcal{G}_0$ halmaz χ^l-mértéke pozitív, így számossága $\mathfrak{c}$ bármely megszámlálható $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ részosztályra és bármely $F \in \mathcal{F}$-re. A 18.21 lemma többi feltételének teljesülését már a 18.22 ellenpéldánál megvizsgáltuk.

Alkalmazva a 18.21 lemmát olyan X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ halmazrendszert kapunk, amelyre X_γ minden $G \in \mathcal{G}$ halmazból legfeljebb megszámlálható pontot tartalmaz, de $X_\gamma \cap F \neq \emptyset$ egyetlen $F \in \mathcal{F}$-re sem, így $X_\gamma \cap F$ nem χ^l-mérhető egyetlen $F \in \mathcal{F}$-re sem.

Legyen f az X_0 halmaz karakterisztikus függvénye. Ugyanúgy, mint a 18.22 ellenpéldánál, kapjuk, hogy $f \in \mathcal{L}_l$, de $f \notin \mathcal{M}_l$. Mivel az $\mathbb{R}^k$ bármely nyílt részhalmazának bármely ψ $\mathcal{C}^1$-beágyazására X-be az $f \circ \psi$ függvény egy megszámlálható halmaz kivételével nulla, azt kapjuk, hogy $f \in \mathcal{M}_k$ és $f \in \mathcal{L}_k$. Ezzel az állítást beláttuk.

18.25. Ellenpélda. *18.14 feltételei mellett, ha teljesül a kontinuumhipotézis, akkor $0 < k < l \leq n$-re $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}_k \not\subset \mathcal{M}_l \cup \mathcal{T}_l$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 18.21 lemmát ugyanazzal a T-vel, $\mathcal{F}$-el és $\mathcal{G}$-vel, mint az előző ellenpéldában. Egy X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ halmazrendszert kapunk, ahol minden X_γ csak megszámlálható sok pontot tartalmaz minden $G \in \mathcal{G}$-ből, de $X_\gamma \cap F \neq \emptyset$ egyetlen $F \in \mathcal{F}$-re sem, így $X_\gamma \cap F$ nem χ^l-mérhető egyetlen $F \in \mathcal{F}$-re sem.

Legyen Z olyan l-dimenziós sík, amelynek metszete X-el nem üres, f pedig legyen a $Z \cap X_0$ halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor $f \in \mathcal{M}_k \cap \mathcal{S}_k = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}_k$, de $f \notin \mathcal{T}_l$ és $f \notin \mathcal{M}_l$.

19.§ A Baire-tulajdonság és a folytonosság között

Ebben a paragrafusban „a Baire-tulajdonságból következik a folytonosság" típusú eredményeket fogunk bizonyítani az 1.17 problémában szereplő (1) általános nem lineáris explicit egyenletre, az ott szereplő (3) erős rang feltételnél egyhébb feltételek mellett. Tudomásom szerint minden korábbi eredmény a (3) erős rang feltételt vagy annak valamely absztrakt változatát használja. Az 1.7 pontban leírt „bootstrap" módszer szellemében itt is olyan tulajdonságokat vezetünk be, amelyek — durván szólva — a Baire-tulajdonság és a folytonosság között fekszenek. Ez a tulajdonság-sorozat adja azt a lépcsőt, amelyen felkapaszkodhatunk a Baire-tulajdonságtól a folytonossághoz. Először megvizsgáljuk az új fogalmak legalapvetőbb tulajdonságait. Ezután bizonyítjuk regularitási tételünket. A tétel egy finomítását is bebizonyítjuk. Végül az új fogalmak további tulajdonságait vizsgáljuk. Ezek az eredmények a Járai [97] dolgozatban publikálás alatt állnak.

19.1. Definíció. Legyen X egy halmaz, Y metrikus tér, és $f : X \to Y$ egy függvény. Legyen U egy topologikus tér, és legyen P is egy topologikus tér, a „paraméter tér", egy adott $p_0 \in P$ ponttal. Legyen φ egy függvény $U \times P$-ből X-be. φ-re úgy fogunk gondolni, mint a p paramétertől függő $\varphi_p : u \mapsto \varphi(u, p)$ felületek seregére. Luzin tételének 2.12 analogonja és Piccard tételének általánosításai (lásd a 4. §-t) azt sugallják, hogy az alábbi feltétel a Baire-tulajdonsággal kapcsolatos:

(S) *minden $p_m \to p_0$ sorozatra $f(\varphi(u, p_m)) \to f(\varphi(u, p_0))$, kivéve $u \in U$ pontok egy első kategóriájú halmazát.*

Vizsgálatainkhoz szükségünk lesz az alábbi tulajdonságra:

(B) *$u \mapsto f(\varphi(u, p_0))$ Baire-tulajdonságú.*

Az (S) és (B) feltételeket gyakran lokálisan fogjuk ellenőrizni. Ha minden $u_0 \in U$-hoz van olyan U_0 környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy $\varphi|U_0 \times P_0$-ra teljesül (S), akkor φ-re szintén teljesül (S). Ez könnyen következik az „első kategóriájú” tulajdonság 2.9 pontban említett lokalitásából. Hasonlóan, ha minden $u_0 \in U$-hoz van olyan U_0 környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy $\varphi|U_0 \times P_0$-ra teljesül (B), akkor φ-re szintén teljesül (B).

Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és $0 \le k \le n$. Jelölje $\mathcal{S}_k(X,Y)$ $[\mathcal{B}_k(X,Y)]$, vagy röviden $\mathcal{S}_k$ $[\mathcal{B}_k]$ az összes olyan f függvények osztályát, amelyekre az (S) [(B)] feltétel teljesül, ha U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$ és $\varphi : U \times P \to X$ egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre φ_p immerziója U-nak X-be minden $p \in P$-re. (Legyen $\mathbb{R}^0 = \{0\}$). Világos, hogy $f \in \mathcal{B}_k$ akkor és csak akkor, ha a

(B′) *$f \circ \psi$ Baire-tulajdonságú*

feltétel fennáll az $\mathbb{R}^k$ bármely U nyílt részhalmazának bármely ψ immerziójára X-be.

19.2. Megjegyzések. (1) Fő eredményeink, durván szólva, azt fogják mutatni, hogy egy egy függvényegyenlet $\mathcal{S}_{k+1}$-beli f megoldása $\mathcal{S}_k$-ban is benne van. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{S}_0$ a folytonos függvények osztálya, és hogy minden, az $X \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazt a második megszámlálható Y térbe képező Baire-tulajdonságú $f : X \to Y$ függvény $\mathcal{S}_n$-ben van. Így lépésenként azt kapjuk, hogy a megoldások Baire-tulajdonságából következik a folytonosságuk.

(2) A mértékelméleti esettel való analógia szoros, de nem teljes. A mértékelméleti eset előzményeit lásd az előző paragrafusban.

(3) Függvényegyenletek Baire-tulajdonságú megoldásait számos szerző vizsgálta. Lásd a 10. paragrafus hivatkozásait.

(4) Az $\mathcal{S}_k$ $[\mathcal{B}_k]$ függvényosztály nem változik, ha csak azt tesszük fel, hogy (S) [(B)] fennáll, ha U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$ és $\varphi : U \times P \to X$ egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre φ_p beágyazása (azaz olyan immerziója, amely homeomorfizmus az értelmezési tartománya és értékkészlete között) U-nak X-be minden $p \in P$-re. Ez könnyen következik a definícióban említett lokalitási elvből. Hasonlóan, ha az tesszük fel, hogy csak φ_{p_0} immerzió, az eredményként kapott $\mathcal{S}_k$ $[\mathcal{B}_k]$ függvényosztály ugyanaz marad.

19.3. Tétel. *Legyen Y topologikus tér, X pedig nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. 19.1 jelöléseit használva, $\mathcal{B}_0(X,Y) = Y^X$ és $\mathcal{S}_0(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$, az X-et Y-ba képező folytonos függvények osztálya.*

Bizonyítás. Triviális, hogy $\mathcal{B}_0$ minden X-et Y-ba képező függvényt tartalmaz.

Megmutatjuk, hogy bármely $f : X \to Y$ folytonos függvény $\mathcal{S}_0$-ban van. Mivel $U = \emptyset$ vagy $U = \{0\}$, világos, hogy a $p \mapsto f(\varphi(u,p))$ leképezés minden $u \in U$-ra folytonos. Ebből következik, hogy $f \in \mathcal{S}_0$.

A másik irányt indirekt módon bizonyítjuk: ha $f \in \mathcal{S}_0$, de nem folytonos, akkor van olyan $x_0 \in X$ és $x_n \to x_0$ sorozat, valamint W környezete $f(x_0)$-nak, hogy $f(x_n) \notin W$. Legyen $U = \{0\}$, $P = X$, $p_0 = x_0$, és $\varphi(0,p) = p$, ha $p \in P$. A $p_m = x_m$ sorozatot választva azt kapjuk, hogy

$$f(\varphi(0,p_m)) = f(x_m) \to f(x_0) = f(\varphi(0,p_0)),$$

ami ellentmondás.

Meg fogjuk mutatni, hogy az $\mathbb{R}^n$ egy X nyílt részhalmazán Baire-tulajdonságú függvények $\mathcal{S}_n$-ben vannak. Hogy a korábbi 4. és 10. paragrafusok eredményeivel az összefüggést világosabbá tegyük, a tétel fő részét az alábbi absztrakt formában bizonyítjuk:

19.4. Tétel. *Legyenek P, U és X topologikus terek. Tegyük fel, hogy $\varphi : U \times P \to X$ folytonos függvény az alábbi tulajdonsággal:*

(1) ha $p \in P$ és $A \subset U$ második kategóriájú, akkor $\varphi_p(A)$ is második kategóriájú.

Tegyük fel továbbá, hogy $p_0 \in P$, az f értékei valamely Y topologikus térben vannak és f Luzin-Baire tulajdonságú egy olyan D Baire-tulajdonságú halmazon, amely tartalmazza $\varphi_{p_0}(U)$-t. Ekkor U, P, p_0, φ és f-el 19.1 (S) és (B) feltételei fennállnak.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy (B) teljesül. Legyen F olyan első kategóriájú halmaz, amelyre $f|D \setminus F$ folytonos. Feltehetjük, hogy F Borel-halmaz. Írjuk fel D-t $(V \setminus F_1) \cup F_2$ alakba, ahol V nyílt részhalmaza X-nek, F_1, F_2 pedig első kategóriájúak. Itt is — szükség esetén növelve F_2-t — feltehetjük, hogy F_1 Borel-halmaz. Most $D = C \cup N$, ahol $C = V \setminus (F \cup F_1) \subset D \setminus F$ Borel-halmaz, $N = D \cap (F \cup F_2)$ pedig első kategóriájú. Legyen W nyílt részhalmaza Y-nak. Mivel az $A = (f|C)^{-1}(W)$ halmaz relatív nyílt C-ben, Borel-halmaz X-ben. Az N halmaz első kategóriájú, így az $M = (f|N)^{-1}(W)$ halmaz is első kategóriájú. Vegyük észre, hogy

$$(f \circ \varphi_p)^{-1}(W) = \varphi_p^{-1}(A) \cup \varphi_p^{-1}(M).$$

A bal oldalon $\varphi_{p_0}^{-1}(A)$ Borel-halmaz, (1) szerint pedig a $\varphi_{p_0}^{-1}(M)$ halmaz első kategóriájú. Ez azt jelenti, hogy (B) teljesül.

Megmutatjuk, hogy (S) is teljesül. Legyen u_0 tetszőleges eleme $U' = \varphi_{p_0}^{-1}(V)$-nek. Van olyan U_0 környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy $U_0 \subset U'$ és $\varphi(U_0 \times P_0) \subset V$. A fenti F és F_1 halmazokkal $\varphi_{p_m}^{-1}(F)$ és $\varphi_{p_m}^{-1}(F_1)$ első kategóriájú halmazok, ha $m = 0, 1, 2, \ldots$. Legyen E_0 ezen halmazok egyesítése. Ha $u \in U_0 \setminus E_0$, akkor $\varphi(u, p_m)$ és $\varphi(u, p_0)$ is C-ben vannak és $\varphi(u, p_m) \to \varphi(u, p_0)$. Így azt kapjuk, hogy $f(\varphi(u, p_m)) \to f(\varphi(u, p_0))$. Most tekintsük az

$$E = \{u \in U : f(\varphi(u, p_m)) \not\to f(\varphi(u, p_0))\}$$

halmazt. Eddig beláttuk, hogy $E \cap U'$ első kategóriájú (mint U részhalmaza) az $u_0 \in U'$ pontban. Mivel U' nyílt, ebből következik, hogy $E \cap U'$ az U' minden pontjában első kategóriájú, ha U'-t mint alteret tekintjük. Így 2.9 szerint az $E \cap U'$ halmaz első kategóriájú mint U' részhalmaza, és így U részhalmazaként is. Az $E \setminus U'$ halmaz része $\varphi_{p_0}^{-1}(N)$-nek, így szintén első kategóriájú. Ez mutatja, hogy E első kategóriájú, amiből következik (S).

19.5. Tétel. *19.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ha Y megszámlálható bázisú topologikus tér, akkor minden Baire-tulajdonságú $f : X \to Y$ benne van $\mathcal{S}_n(X, Y)$-ban és $\mathcal{B}_n(X, Y)$-ban.*

Bizonyítás. A Luzin-tétel 2.12 analogonja szerint van olyan F első kategóriájú részhalmaza X-nek, hogy $f|X \setminus F$ folytonos. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ beágyazás. Az előző tételt fogjuk alkalmazni φ-re lokálisan. Legyen $u_0 \in U$. Választva egy olyan U_0 környezetét u_0-nak és P_0 környezetét p_0-nak, amelyre φ_p homeomorfizmusa U_0-nak az X egy nyílt részhalmazára, ha $p \in P_0$, az kapjuk, hogy ha A egy második kategóriájú részhalmaza U_0-nak, akkor $\varphi_p(A)$ is második kategóriájú.

Most az előző tételt alkalmazhatjuk $\varphi|U_0 \times P_0$-ra. Mint a definíciónál említettük, ez elég annak bizonyításához, hogy (S) és (B) teljesül f, U, P, p_0, φ-re.

19.6. Tétel. *19.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyenek Z, Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ topologikus terek. Legyenek X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és X különböző euklidészi terek nyílt részhalmazai, és legyen $Y \subset \mathbb{R}^l$ is nyílt. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre φ_p immerziója U-nak X-be minden $p \in P$-re, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x, y) \in D$-re

$$f(x) = h(x, y, f_1(g_1(x, y)), \ldots, f_n(g_n(x, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra h folytonos a többi változóban;
(3) az f_i függvény $\mathcal{S}_{k+l}$-ben van X_i-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^1$-ben van D-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, hogy $(\varphi(u_0, p_0), y_0) \in D$ és az

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p_0), y)$$

leképezés deriváltjának rangja (u_0, y_0)-ban $k + l$, ha $1 \le i \le n$.

Ekkor az (S) feltétel teljesül f, U, P, p_0, φ-vel.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $p_m \to p_0$. Válasszunk olyan U_0, P_0, Y_0 nyílt környezetét u_0, p_0, y_0-nak, hogy $(\varphi(u,p),y)$ a D-ben legyen, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$, $y \in Y_0$, továbbá az $(u,y) \mapsto g_i(\varphi(u,p),y)$ leképezés deriváltjának rangja $k+l$ legyen, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$, $y \in Y_0$ és $1 \le i \le n$. Ez lehetséges, mivel D nyílt, g_i és φ is $\mathcal{C}^1$-függvények, a rang alulról félig folytonos, és $U \times Y$ dimenziója $k+l$, így a rang nem mehet $k+l$ fölé.

Mivel az f_1 függvény $\mathcal{S}_{k+l}$-ben van, azt kapjuk, hogy $(u,y) \in U_0 \times Y_0$ párok egy első kategóriájú E_1 halmazát kivéve,

$$f_1(g_1(\varphi(u,p_m),y)) \to f_1(g_1(\varphi(u,p_0),y)).$$

Felhasználva, hogy f_2 is $\mathcal{S}_{k+l}$-ben van, azt kapjuk, hogy $(u,y) \in U_0 \times Y_0$ párok egy első kategóriájú E_2 halmazát kivéve

$$f_2(g_2(\varphi(u,p_m),y)) \to f_2(g_2(\varphi(u,p_0),y)),$$

stb. Végül azt kapjuk, hogy $(u,y) \in U_0 \times Y_0$ párok egy első kategóriájú $E = \cup_{i=1}^n E_i$ halmazát kivéve

$$f_i(g_i(\varphi(u,p_m),y)) \to f_i(g_i(\varphi(u,p_0),y)),$$

ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Kuratowski és Ulam tétele szerint, az Y_0 halmaz y elemeinek egy első kategóriájú halmazát kivéve, azon $u \in U_0$ pontok halmaza, amelyekre $(u,y) \in E$, első kategóriájú. Rögzítve egy ilyen y-t, a függvényegyenletből és a h függvény rögzített y melletti folytonosságából azt kapjuk, hogy

$$f(\varphi(u,p_m)) \to f(\varphi(u,p_0)),$$

kivéve az u-k egy első kategóriájú halmazát. Ez az (S) feltétel $\varphi|U_0 \times P_0$-al.

A definícióban tett megjegyzés szerint kapjuk, hogy (S) teljesül.

Az előző pragrafusban adott 18.8 példa itt is ugyanúgy tárgyalható. Ugyanúgy, mint ott, itt is megállapíthatjuk, hogy a rang feltétel nem teljesen kielégítő. Az általánosításhoz először a (B) feltételre bizonyítunk egy tételt, amihez egy lemmára lesz szükségünk.

19.7. Lemma. *19.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, Y egy topologikus tér, $0 \le k \le n$ és $f \in \mathcal{B}_k(X,Y)$. Ha ψ az $\mathbb{R}^m$ egy U nyílt részhalmazának $\mathcal{C}^1$-leképezése X-be, amelyre a derivált rangja mindenütt k, akkor $f \circ \psi$ Baire-tulajdonságú.*

Bizonyítás. A lemma közvetlenül következik a rangszám tételből. Valóban, a rangszám tételből következik, hogy minden $u_0 \in U$-nak van olyan U_0 nyílt környezete, hogy $\psi|U_0$ felírható $\alpha \circ p \circ \beta$ alakban. Itt $I =]-1,1[$ jelöléssel a β leképezés olyan diffeomorfizmusa U_0-nak I^m-re, amelyre $\beta(u_0) = 0$, az I^m-nek I^n-re való p projekciója $p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ alakú, α pedig olyan diffeomorfizmusa I^n-nek valamely X_0 nyílt halmazra, amely 0-t $x_0 = \psi(u_0)$-ba képezi. Azonosítva az $I^k \times \{0\} \subset I^n$ halmaz I^k-val azt kapjuk, hogy $\alpha|I^k$ immerzió, így $\left(f \circ (\alpha|I^k)\right)^{-1}(V)$ Baire-tulajdonságú Y minden V nyílt részhalmazára. Mivel $p^{-1}(A)$ Baire-tulajdonságú I^k bármely A részhalmazára, amely Baire-tulajdonságú, és $\beta^{-1}(B)$ is Baire-tulajdonságú I^m minden Baire-tulajdonságú B részhalmazára, azt kapjuk, hogy az $f \circ (\psi|U_0)$ függvény Baire-tulajdonságú. Most felhasználva (B)-nek a definícióban említett lokalitását, kapjuk az általános esetet.

19.8. Tétel. *19.1 jelöléseivel, legyen Z topologikus tér, Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pedig megszámlálható bázisú topologikus tér. Legyenek X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és X különböző euklidészi terek nyílt részhalmazai, és $Y \subset \mathbb{R}^l$ is legyen nyílt. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, $\psi : U \to X$ egy $\mathcal{C}^1$-immerziója U-nak X-be, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x, y) \in D$-re

$$f(x) = h(x, y, f_1(g_1(x, y)), \ldots, f_n(g_n(x, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra a h függvény folytonos a többi változóban;
(3) az f_i függvény $\mathcal{B}_{k_i}$-ben van X_i-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^1$-ben van D-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, hogy $(\psi(u_0), y_0) \in D$ és az

$$(u, y) \mapsto g_i(\psi(u), y)$$

leképezés deriváltjának rangja k_i az (u_0, y_0) egy környezetén, ha $1 \leq i \leq n$.

Ekkor $u \mapsto f(\psi(u))$ Baire-tulajdonságú.

Bizonyítás. Válasszunk olyan U_0 környezetét u_0-nak és Y_0 környezetét y_0-nak, amelyre $(\psi(u), y)$ a D-ben van, ha $u \in U_0$ és $y \in Y_0$, továbbá az $(u, y) \mapsto g_i(\psi(u), y)$ leképezés deriváltjának a rangja k_i minden $u \in U_0$, $y \in Y_0$, $1 \leq i \leq n$-re. (5) szerint ez lehetséges. Az előző lemmából azt kapjuk, hogy az $(u, y) \mapsto f_i(g_i(\psi(u), y))$ leképezés Baire-tulajdonságú. Fubini tételének 2.13 analogonja szerint, Y_0-beli y-ok egy első kategóriájú E_i halmazát kivéve, az $u \mapsto f_i(g_i(\psi(u), y))$ leképezés Baire-tulajdonságú U_0-on. Így kivéve $E = \cup_{i=1}^n E_i$ elemeit, minden $y \in Y_0$-ra az U_0-nak $D_y \times Z_1 \times \cdots \times Z_n$-be való

$$u \mapsto (\psi(u), f_1(g_1(\psi(u), y)), \ldots, f_n(g_n(\psi(u), y)))$$

leképezése Baire-tulajdonságú. Mivel bármely rögzített y-ra a h függvény folytonos a többi változóban, azt kapjuk, hogy bármely rögzített $y \in Y_0 \setminus E$-re az

$$u \mapsto h(\psi(u), y, f_1(g_1(\psi(u), y)), \ldots, f_n(g_n(\psi(u), y)))$$

leképezés Baire-tulajdonságú. Ez azt jelenti, hogy az $u \mapsto f(\psi(u))$ leképezés Baire-tulajdonságú U_0-on.

Most a (B) definíciójánál említett lokalitási elv szerint kapjuk az állítást.

A következő tétel a kulcs a 19.6 tétel 19.10 általánosításához.

19.9. Tétel. *19.1 jelöléseit fogjuk használni. Legyen $U \subset \mathbb{R}^m$, X és P pedig legyenek euklidészi terek nyílt részhalmazai. Legyen $p_0 \in P$, és legyen Y egy metrikus tér, $\varphi : U \times P \to X$ pedig egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre* $\operatorname{rank} \varphi'_p(u) = k$ *minden $u \in U$, $p \in P$-re. Ha $f \in \mathcal{B}_k(X,Y) \cap \mathcal{S}_k(X,Y)$, akkor az (S) feltétel teljesül f, U, P, p_0 és φ-vel.*

Bizonyítás. Legyen $u_0 \in U$. Mivel $\varphi'_{p_0}(u_0)$ rangja k, felírhatjuk u-t $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ alakba úgy, hogy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_0, p_0)$$

determinánsa ne legyen 0. Így van olyan $U_1 \times U_2 \subset U$ környezete u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy az

$$u_1 \mapsto \varphi(u_1, u_2, p)$$

leképezés minden $u_2 \in U_2$, $p \in P_0$-ra immerziója U_1-nek. Mivel $f \in \mathcal{S}_k$, minden $u_2 \in U_2$-höz van olyan első kategóriájú F_{u_2} részhalmaza U_1-nek, amelyre ha $u_1 \in U_1 \setminus F_{u_2}$, akkor $f(\varphi(u_1, u_2, p_m)) \to f(\varphi(u_1, u_2, p_0))$. Az előző lemma szerint $u \mapsto f(\varphi(u, p))$ Baire-tulajdonságú. Így az

$$\{(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2 : f(\varphi(u_1, u_2, p_m)) \to f(\varphi(u_1, u_2, p_0))\}$$

halmaz Baire-tulajdonságú (lásd 2.11-et). A Kuratowski-Ulam tétel, 2.10, szerint azt kapjuk, hogy a komplementere első kategóriájú.

19.10. Tétel. *19.1 jelöléseivel, legyen Z topologikus tér és legyen Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ szeparábilis metrikus tér. Legyenek X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és X különböző euklidészi terek nyílt részhalmazai, és legyen $Y \subset \mathbb{R}^l$ is nyílt. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to Z$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \ldots \times Z_n \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ immerziója U-nak X-be, és tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x, y) \in D$-re

$$f(x) = h(x, y, f_1(g_1(x, y)), \ldots, f_n(g_n(x, y)));$$

(2) bármely rögzített $y \in Y$-ra a h függvény folytonos a többi változóban;

(3) az f_i függvény $\mathcal{S}_{k_i} \cap \mathcal{B}_{k_i}$-ben van $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^1$-ben van D-n $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, amelyre $(\varphi(u_0, p_0), y_0) \in D$ és az

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p), y)$$

leképezés deriváltjának rangja k_i az (u_0, p_0, y_0) pont valamely környezetén, ha $1 \le i \le n$.

Ekkor az (S) és (B) feltételek teljesülnek f, U, P, p_0, φ-vel.

Bizonyítás. Az 19.8 tételből következik, hogy a (B) feltétel teljesül f, U, P, p_0, φ-vel. Rögzítsünk egy $u_0 \in U$-t és válasszunk (5) szerint egy y_0-at u_0-hoz. Válasszunk U_0, P_0 illetve Y_0 nyílt környezeteit u_0-nak, p_0-nak, illetve y_0-nak úgy, hogy $u \in U_0$, $p \in P_0$ és $y \in Y_0$ esetén $(\varphi(u,p), y) \in D$ teljesüljön, továbbá az

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u,p), y)$$

leképezés deriváltjának rangja k_i legyen $U_0 \times P_0 \times Y_0$-on minden $1 \leq i \leq n$-re. Most (S) teljesülése ugyanúgy bizonyítható, mint a 19.6 tételben, de a definíció helyett az előző tételt kell használnunk.

19.11. Feltételek. Ennek a paragrafusnak a hátralévő részében 19.1 jelöléseit fogjuk használni, de csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor X nem üres nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, f pedig az X-et egy Y szeparábilis metrikus térbe képezi, mivel el kívánjuk kerülni azokat a nehézségeket, amelyek csak Y topológiájának nem megfelelő voltából erednek.

19.12. Megjegyzés. 19.11 feltételei mellett, egy másik, a 19.1 definícióban tárgyalttól eltérő lokalitási elv is fennáll. Nevezetesen, $f \in \mathcal{S}_k(X, Y)$ akkor és csak akkor, ha minden $x_0 \in X$-nek van olyan $X_0 \subset X$ nyílt környezete, hogy $f|X_0 \in \mathcal{S}_k(X_0, Y)$. A „csak akkor” rész nyilvánvaló. Az „akkor” részt 19.1 jelöléseit használva bizonyítjuk. Vegyük észre, hogy minden $u_0 \in U$ ponthoz van olyan U_0 illetve P_0 környezete u_0-nak illetve p_0-nak, hogy $x_0 = \varphi(u_0, p_0)$-ra a $\varphi(U_0, P_0)$ halmaz része X_0-nak. Ez azt jelenti, hogy (S) teljesül $\varphi|U_0 \times P_0$-ra. Most a definícióban kimondott lokalitási elvből következik, hogy $f \in \mathcal{S}_k(X, Y)$. Ugyanez a lokalitási elv igaz (és ugyanígy bizonyítható) $\mathcal{B}_k$-ra.

19.13. A $\mathcal{B}_k$ függvényosztály. 19.11 jelöléseit fogjuk használni. Legyen

$$\mathcal{A}_k = \{A \subset X : \xi_A \in \mathcal{B}_k(X, \{0, 1\})\},$$

ahol $\{0, 1\}$-et mint diszkrét teret tekintjük. Könnyű látni, hogy $\mathcal{A}_k$ egy σ-algebra, és az $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor van $\mathcal{B}_k(X, Y)$-ban, ha $f^{-1}(V)$ az $\mathcal{A}_k$-ban van Y bármely V nyílt részhalmazára. Így $\mathcal{B}_k(X, Y)$ vizsgálata az $\mathcal{A}_k$ σ-algebra vizsgálatára redukálódik. Könnyű látni, hogy $\mathcal{A}_n$ az X összes Baire-tulajdonságú részhalmazainak osztálya, $\mathcal{A}_0$ pedig az X összes részhalmazainak osztálya. Minden $\mathcal{A}_k$ tartalmazza X Borel-halmazait.

Megmutatjuk, hogy *$A \in \mathcal{A}_k$ akkor és csak akkor, ha $A \cap \operatorname{rng} \psi$ Baire-tulajdonságú a $\operatorname{rng} \psi$ altérben az $\mathbb{R}^k$ bármely nyílt részhalmazának X-be való bármely ψ beágyazására.* Valóban, ha $A \in \mathcal{A}_k$, akkor $\psi^{-1}(A)$ Baire-tulajdonságú $\operatorname{dmn} \psi$-ben, és mivel ψ homeomorfizmusa $\operatorname{dmn} \psi$-nek $\operatorname{rng} \psi$-re, a $\psi(\psi^{-1}(A)) = A \cap \operatorname{rng} \psi$ halmaz Baire-tulajdonságú $\operatorname{rng} \psi$-ben. Hasonlóan, ha $A \cap \operatorname{rng} \psi$ Baire-tulajdonságú $\operatorname{rng} \psi$-ben, akkor $\psi^{-1}(A)$ Baire-tulajdonságú $\operatorname{dmn} \psi$-ben. 19.2.(4) szerint, ha $\psi^{-1}(A)$ Baire-tulajdonságú az $\mathbb{R}^k$ bármely nyílt részhalmazának X-be való bármely ψ beágyazására, akkor $A \in \mathcal{A}_k$.

Hasonlóan, $A \in \mathcal{A}_k$ *akkor és csak akkor, ha* $A \cap \operatorname{rng} \psi$ *Baire-tulajdonságú a* $\operatorname{rng} \psi$ *altérben az* $\mathbb{R}^k$ *bármely nyílt részhalmazának* X*-be való bármely* ψ *immerziójára.* Állítsuk elő $U = \operatorname{dmn} \psi$-t az U olyan U_i nyílt részhalmazainak megszámlálható egyesítéseként, amelyekre $\psi|U_i$ beágyazása U_i-nek X-be. Ha $A \in \mathcal{A}_k$, akkor $\psi^{-1}(A)$ Baire-tulajdonságú U-ban, így $U_i \cap \psi^{-1}(A)$ is Baire-tulajdonságú U_i-ben. Innen $A_i = (\psi|U_i)(\psi^{-1}(A))$ Baire-tulajdonságú $\psi(U_i)$-ben, azaz $A_i \triangle V_i \subset F_i$ valamely V_i relatív nyílt részhalmazával $\psi(U_i)$-nak és valamely F_i-vel, amely első kategóriájú $\psi(U_i)$-ben. Mivel F_i első kategóriájú $\operatorname{rng} \psi$-ben is, $\cup_i F_i$ is első kategóriájú $\operatorname{rng} \psi$-ben. Mivel

$$(\cup_i A_i) \triangle (\cup_i V_i) \subset \cup_i F_i,$$

azt kapjuk, hogy az $A \cap \operatorname{rng} \psi = \cup_i A_i$ és a σ-kompakt $\cup_i V_i$ halmaz szimmetrikus differenciája első kategóriájú. Ez mutatja, hogy $A \cap \operatorname{rng} \psi$ Baire-tulajdonságú $\operatorname{rng} \psi$-ben. A másik irányban, ha $A \cap \psi(U_i)$ Baire-tulajdonságú, akkor $(\psi|U_i)^{-1}(A)$ Baire-tulajdonságú U_i-ben, így U-ban is. Mivel ez $\mathbb{R}^k$ minden nyílt részhalmazának minden ψ immerziójára teljesül, azt kapjuk, hogy $A \in \mathcal{A}_k$.

Végül, $A \in \mathcal{A}_k$ *akkor és csak akkor, ha* $A \cap M$ *Baire-tulajdonságú az* M *altérben* X *bármely* M *tiszta* k*-dimenziós részsokaságára.* Valóban, ha ez teljesül, akkor speciálisan $A \cap \operatorname{rng} \psi$ Baire-tulajdonságú $\operatorname{rng} \psi$-ben az $\mathbb{R}^k$ bármely nyílt részhalmazának X-be való bármely ψ immerziójára, így $A \in \mathcal{A}_k$. Másrészt, X minden M tiszta k-dimenziós részsokasága előállítható, mint az $\mathbb{R}^k$ valamely nyílt részhalmaza egy ψ immerziójának az értékkészlete. Így $A \cap M = A \cap \operatorname{rng} \psi$ Baire-tulajdonságú $M = \operatorname{rng} \psi$-ben.

19.14. Összefüggések $\mathcal{B}_k$ és $\mathcal{S}_k$ között. 19.11 jelöléseit fogjuk használni. A legegyszerűbb kérdések egyike, hogy $f \in \mathcal{B}_k$-ból következik-e $f \in \mathcal{S}_k$? Tudjuk, hogy ez teljesül $k = n$-re. Ha $k < n$, akkor X és egy alkalmas k-dimenziós sík metszetének a karakterisztikus függvénye $\mathcal{B}_k$-ban van, de nincs benne $\mathcal{S}_k$-ban.

A másik irányban, tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{S}_k$. Kérdés, hogy teljesül-e $f \in \mathcal{B}_k$? Ez triviális $k = 0$-ra. Meg fogjuk mutatni, hogy ha $0 < k \leq n$, akkor hasonló állítás nem bizonyítható ZFC-ben. Nevezetesen, kontinuumhipotézis mellett példát adunk olyan f függvényre, amelyre $f \in \mathcal{S}_k$, de $f \notin \mathcal{B}_k$. Gödel és Cohen híres eredményei szerint a kontinuum-hipotézis független ZFC axiómáitól. Így $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{S}_k$ nem bizonyítható ZFC-ben.

19.15. Hierarchia a különböző dimenziókhoz tartozó függvényosztályok között. 19.11 jelöléseit fogjuk használni. Rögzítsük a $0 \leq k < l \leq n$ dimenziókat és vizsgáljuk a $\mathcal{B}_k$ és $\mathcal{S}_k$, valamint a $\mathcal{B}_l$ és $\mathcal{S}_l$ függvényosztályok közötti kapcsolatot.

Azt remélhetjük, hogy csökkentve a dimenziót, (S) egyre erősebb lesz. Az ilyen irányú két pozitív eredmény egyike, hogy ez igaz az (S) feltételre, ha (B) is fennáll:

$$\mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_l \cap \mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_l.$$

Ennek az állításnak a bizonyítása nagyon hasonlít a 19.9 tétel bizonyításához, így nem ismételjük meg az érvelést.

Kontinuum-hipotézis mellett ellenpéldával fogjuk igazolni, hogy $k > 0$-ra

$$\mathrm{ZFC} \not\models \mathcal{B}_k \cap \mathcal{S}_k \subset \mathcal{B}_l \cup \mathcal{S}_l.$$

Hasonlóan, egy kontinuum-hipotézis mellett adott ellenpéldával megmutatjuk, hogy

$$\mathrm{ZFC} \not\models \mathcal{B}_k \cap \mathcal{S}_k \cap \mathcal{S}_l \subset \mathcal{B}_l,$$

kivéve a triviális $k = 0$ esetet.

Sokkal könnyebb megmutatni, hogy általában az ellenkező irányú tartalmazások sem teljesülnek. Bár

$$\mathcal{B}_l \subset \mathcal{B}_0$$

triviálisan teljesül, általában

$$\mathcal{B}_l \not\subset \mathcal{B}_k, \qquad \text{ha} \qquad k > 0.$$

Ezt igazolandó, tekintsünk X és egy alkalmas k-dimenziós sík a metszetében egy olyan halmazt, amely nem Baire-tulajdonságú az adott síkban, és tekintsük ennek a halmaznak a karakterisztikus függvényét. Ugyanez a példa mutatja, hogy

$$\mathcal{B}_l \cap \mathcal{S}_l \not\subset \mathcal{B}_k \cup \mathcal{S}_k.$$

Ha X és egy alkalmas k-dimenziós sík metszetének a karakterisztikus függvényét vesszük, akkor látjuk, hogy

$$\mathcal{B}_l \cap \mathcal{S}_l \cap \mathcal{B}_k \not\subset \mathcal{S}_k.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\mathcal{B}_l \cap \mathcal{S}_k \subset \mathcal{B}_k.$$

Lássuk a bizonyításokat.

19.16. Tétel. *19.11 feltételei mellett, ha $0 \le k < l \le n$, akkor $\mathcal{B}_l \cap \mathcal{S}_k \subset \mathcal{B}_k$.*

Bizonyítás. $k = 0$-ra az állítás triviális. Egyébként legyen ψ egy $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz immerziója X-be. Legyen $u_0 \in U$, és legyen V egy $l-k$-dimenziós altere $\mathbb{R}^n$-nek, amely ortogonális $\operatorname{rng}\psi'(u_0)$-ra. Legyen $\pi : \mathbb{R}^{l-k} \to V$ egy lineáris izometria, és φ-t definiáljuk a $\varphi(u,p) = \psi(u)+\pi(p)$ összefüggéssel. Ekkor $p_0 = 0$-ra $\varphi_{p_0} = \psi$. Válasszunk olyan U_0 illetve P_0 nyílt környezeteit u_0-nak illetve p_0-nak, amelyekre $\varphi(U_0, P_0) \subset X$ és φ immerziója $U_0 \times P_0$-nak X-be. Mivel $f \in \mathcal{B}_l$, az $(u,p) \mapsto f(\varphi(u,p))$ leképezés Baire-tulajdonságú. Így Fubini tételének 2.13 analogonja szerint, egy első kategóriájú halmazt kivéve, minden $p \in P_0$-ra az $u \mapsto f(\varphi(u,p))$ leképezés Baire-tulajdonságú. Válasszunk egy $p_m \to p_0$ sorozatot, amelyre minden $u \mapsto f(\varphi(u,p_m))$ Baire-tulajdonságú. Mivel $f \in \mathcal{B}_k$, azt kapjuk, hogy

$$f(\varphi(u,p_m)) \to f(\varphi(u,p_0))$$

minden $u \in U_0$-ra, egy első kategóriájú halmaz pontjait kivéve. Így az $u \mapsto f(\psi(u))$ leképezés Baire-tulajdonságú U_0-on, azaz lokálisan. Ebből következik, hogy $f \in \mathcal{B}_k$.

A további ellenpéldákhoz a 18.21 lemmát fogjuk felhasználni. Ennek a tisztán halmazelméleti lemmának a tipikus alkalmazását itt azon a speciális eseten keresztül érthetjük meg, amelyben X a sík, T az összes olyan diffeomorfizmusok osztálya, amelyek a sík valamely nyílt részhalmazát a sík egy másik nyílt részhalmazára képezik, $\mathcal{F}$ a sík második kategóriájú Borel-halmazainak osztálya, $\mathcal{G}$ a sík összes egy dimenziós $\mathcal{C}^1$-részsokaságainak osztálya, és $\mathfrak{n} = \mathfrak{c} = \aleph_1$.

19.17. Ellenpélda. *19.11 feltételei mellett, feltéve a kontinuum-hipotézist, ha $0 < k \le n$, akkor $\mathcal{S}_k \not\subset \mathcal{B}_k$.*

Bizonyítás. Megadunk egy $f \in \mathcal{S}_k$ függvényt, amelyre $f \notin \mathcal{B}_k$. A 18.21 lemmát kívánjuk alkalmazni. Csak azt fogjuk felhasználni, hogy az $\mathcal{S}_k$ definíciójában szereplő φ függvények folytonosak, és hogy a 19.2.(4) megjegyzés szerint feltehetjük, hogy a φ_p függvények kölcsönösen egyértelműek. Jelölje T az összes olyan kölcsönösen egyértelmű τ függvények osztályát, amelyek előállíthatók $\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}$ alakban, ahol U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $\varphi : U \times P \to X$ pedig egy olyan folytonos függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ kölcsönösen egyértelmű. Mivel az összes U, P párok számossága kontinuum, és bármely φ folytonos függvényt egyértelműen meghatároznak egy adott megszámlálható sűrű halmazon felvett értékei, a T osztály számossága kontinuum.

Jelölje $\mathcal{F}$ az X összes olyan részhalmazainak osztályát, amelyek előállíthatók $\psi(G)$ alakban, ahol $\emptyset \ne U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, $\psi : U \to X$ beágyazás, és $G \subset U$ második kategóriájú Borel-halmaz U-ban. $\mathcal{F}$ minden eleme Borel-halmaz X-ben, így $\mathcal{F}$ számossága legfeljebb $\mathfrak{c}$ (kontinuum). Továbbá, Piccard tétele szerint, $G - G$ tartalmazza az origó egy környezetét, így $\mathcal{F}$ minden elemének a számossága $\mathfrak{c}$.

A 18.21 lemmát alkalmazva $\mathcal{G} = \emptyset$-al, az X részhalmazainak egy X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ rendszerét kapjuk. Ellenpéldánk az X_0 halmaz (azaz $\gamma = 0$-ra az X_γ halmaz) f karakterisztikus függvénye lesz.

Ha f a $\mathcal{B}_k$ osztályban lenne, akkor 19.13 eredményei szerint $\mathbb{R}^k$ bármely nem üres U nyílt részhalmazának bármely ψ beágyazására X-be az $A_0 = \psi^{-1}(X_0)$ halmaz Baire-tulajdonságú halmaz lenne. A_0 nem lehet első kategóriájú, mivel akkor valamely $G \subset U \setminus A_0$ második kategóriájú Borel-halmazra $\psi(G)$ nem metszene bele X_0-ba. Hasonlóan, ha A_0 második kategóriájú lenne, akkor választva egy $B \subset A_0$ második kategóriájú Borel-halmazt, azt kapnánk, hogy $\psi(G) \subset X_0$, ellentmondásban azzal, hogy $\psi(G) \cap X_\gamma \ne \emptyset$ és $X_\gamma \cap X_0 = \emptyset$ minden $\gamma \ne 0$-ra.

Megmutatjuk, hogy $f \in \mathcal{S}_k$. Legyen U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, és legyen $\varphi : U \times P \to X$ egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p beágyazás. Az

$$\{u \in U : f(\varphi_{p_0}(u)) \ne f(\varphi_p(u))\}$$

halmaz megegyezik a

$$\varphi_{p_0}^{-1}\left(\{x \in \varphi_{p_0}(U) : x \in X_0 \triangle (\varphi_{p_0} \circ \varphi_p^{-1})(X_0)\}\right)$$

halmazzal. A $\tau = \varphi_{p_0} \circ \varphi_p^{-1}$ leképezésre ez a halmaz részhalmaza a

$$\varphi_{p_0}^{-1}\left((\tau(X) \cap X_0) \triangle \tau(X_0)\right)$$

halmaznak. Ha feltesszük a kontinuum-hipotézist, akkor ez a halmaz megszámlálható.

19.18. Ellenpélda. *19.11 feltételeit használva, feltéve a kontinuum-hipotézist, ha $0 < k < l \le n$, akkor $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{S}_k \cap \mathcal{S}_l \not\subset \mathcal{B}_l$.*

Bizonyítás. Példát adunk olyan $f \in \mathcal{B}_k \cap \mathcal{S}_k \cap \mathcal{S}_l$ függvényre, amelyre $f \notin \mathcal{B}_l$. Ismét a 18.21 lemmát fogjuk alkalmazni. Azt is felhasználjuk, hogy a 19.2.(4) megjegyzés szerint feltehetjük, hogy az $\mathcal{S}_l$ definíciójában szereplő φ_p függvények beágyazások. Jelölje T az összes olyan kölcsönösen egyértelmű τ függvények osztályát, amelyek reprezentálhatók $\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}$ alakban, ahol U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^l$-nek, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $\varphi : U \times P \to X$ pedig egy olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelyre minden φ_p, $p \in P$ beágyazás. Legyen $\mathcal{F}$ ugyanaz, mint az előző ellenpéldában. Legyen $\mathcal{G}$ az X összes olyan Borel-halmazainak osztálya, amelyek benne vannak az X megszámlálható sok k-dimenziós részsokaságának az egyesítésében. Meg kell mutatnunk, hogy a $\mathcal{G}$ halmazosztály T-invariáns. Bármely $\tau \in T$ értelmezési tartománya l-dimenziós részsokasága X-nek. Ha a $G \in \mathcal{G}$ halmaz része $\cup_{j=1}^{\infty} M_j$-nek, ahol minden M_j egy k-dimenziós részsokasága X-nek, akkor minden $x \in G \cap M_j \cap \operatorname{dmn} \tau$-hoz találhatunk egy $\varepsilon > 0$-t és egy k-dimenziós M_j' részsokaságát $\operatorname{dmn} \tau$-nak úgy, hogy minden y-ra, amelyre $|y - x| < \varepsilon$, teljesül, hogy $y \in X$, és hogy $y \in G \cap M_j \cap \operatorname{dmn} \tau$ akkor és csak akkor, ha $y \in G \cap M_j' \cap \operatorname{dmn} \tau$. Ez azt bizonyítja, hogy a $G \cap \operatorname{dmn} \tau$ Borel-halmaz lefedhető $\operatorname{dmn} \tau$ megszámlálható sok k-dimenziós részsokaságával. Így a $\tau(G)$ Borel-halmaz is lefedhető megszámlálható sok k-dimenziós részsokasággal.

Mivel egy k-dimenziós G részsokaság bármely részhalmazának $\dim = \operatorname{ind} = \operatorname{Ind}$ topológiai dimenziója $\le k$, az X egy l-dimenziós L részsokaságának és G-nek a metszete első kategóriájú L-ben. Ugyanez igaz bármely $G \in \mathcal{G}$-re, valamint bármely $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ megszámlálható halmazrendszer G uniójára is. Ez azt mutatja, hogy bármely $F \in \mathcal{F}$-re az $F \setminus G$ halmaz számossága $\mathfrak{c}$. A 18.21 lemma alkalmazásához szükséges többi feltétel teljesülését már ellenőriztük az előző ellenpéldánál.

A 18.21 lemmát alkalmazva, olyan X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ halmazrendszert kapunk, amelyre minden X_γ minden $G \in \mathcal{G}$ halmazból megszámlálható sok pontot tartalmaz, de $X_\gamma \cap F \neq \emptyset$ minden $F \in \mathcal{F}$-re.

Legyen f az X_0 karakterisztikus függvénye. Ugyanúgy, mint az előző ellenpéldánál, azt kapjuk, hogy $f \in \mathcal{S}_l$, de $f \notin \mathcal{B}_l$. Mivel $\mathbb{R}^k$ bármely nyílt részhalmazának bármely ψ $\mathcal{C}^1$-beágyazására X-be az $f \circ \psi$ függvény egy megszámlálható halmazt kivéve nulla, azt kapjuk, hogy $f \in \mathcal{B}_k$ és $f \in \mathcal{S}_k$. Így a bizonyítás teljes.

19.19. Ellenpélda. *19.11 feltételei mellett, ha teljesül a kontinuum-hipotézis, akkor $0 < k < l \le n$-re $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{S}_k \not\subset \mathcal{B}_l \cup \mathcal{S}_l$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 18.21 lemmát ugyanazzal a T-vel, $\mathcal{F}$-el és $\mathcal{G}$-vel, mint az előző ellenpéldában. Egy X_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$ halmazrendszert kapunk, amelyre minden X_γ minden $G \in \mathcal{G}$-ből megszámlálható sok pontot tartalmaz, de $X_\gamma \cap F \neq \emptyset$ egyetlen $F \in \mathcal{F}$-re sem.

Legyen Z olyan l-dimenziós sík, amelynek metszete X-el nem üres, f pedig legyen a $Z \cap X_0$ halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor $f \in \mathcal{B}_k \cap \mathcal{S}_k$, de $f \notin \mathcal{B}_l$ és $f \notin \mathcal{S}_l$.

20.§ A folytonosság és a differenciálhatóság között

Mint a bevezetésben említettük, általános, „a lokálisan integrálható megoldások végtelen sokszor differenciálhatóak" típusú eredmények kaphatók „kevés" változós függvényegyenletekre is Światak módszerével, aki [154] dolgozatában az

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x,y) f(g_i(x,y)) = h(x, f(g_{n+1}(x)), \dots, f(g_m(x))) + h_0(x,y) \tag{1}$$

egyenletre bizonyított be ilyen eredményt, ahol f az egyetlen ismeretlen függvény. Módszerének lényege, hogy megmutatja, a disztribúció értelemben tekintett megoldások egy olyan differenciálegyenletet elégítenek ki, amelynek csak $\mathcal{C}^\infty$ megoldásai vannak. Mint a bevezetés 1.40 pontjában kifejtettük, módszerével kapcsolatban az egyik probléma, hogy léteznie kell olyan y_0-nak, amelyre $g_i(x, y_0) \equiv x$ minden $1 \le i \le n$-re, ami meglehetősen erős feltétel. A másik probléma, hogy a fellépő parciális differenciálegyenlet konstans erősségű hypoelliptikus kell legyen. A részleteket illetően Światak eredeti [151], [152], [153], [154], [155] dolgozataira utalunk. A módszerrel kapcsolatos további hivatkozások a [104] áttekintő dolgozatban találhatók.

Ebben a paragrafusban általános, „folytonosságból következik a $\mathcal{C}^\infty$" típusú eredményeket fogunk bizonyítani. A „$\mathcal{C}^1$-ből következik $\mathcal{C}^\infty$" rész az 1.17 problémában szereplő általános nemlineáris explicit egyenletre alkalmazható az 1.17.(3) feltételben a belső függvényekre kirótt erős rang feltétel nélkül. A „folytonosságból következik $\mathcal{C}^1$" rész csak a lineáris típusú

$$f(x) = h_0(x,y) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x,y) f(g_i(x,y)) \tag{2}$$

egyenletre alkalmazható, ahol f az ismeretlen függvény. Az 1.7 pontban leírt „bootstrap" módszer szellemében olyan tulajdonságok egy sorozatát vezetjük be, amelyek — durván szólva — a folytonosság és a folytonos differenciálhatóság között vannak. Ez a tulajdonság-sorozat alkotja azt a lépcsőt, amelyen felmászhatunk a folytonosságtól a folytonos differenciálhatósághoz. Először megvizsgáljuk az új fogalmak alaptulajdonságait. Ezután bebizonyítunk egy „folytonosságból következik $\mathcal{C}^1$" típusú tételt. A tétel egy finomítását is bebizonyítjuk. Végül egy „$\mathcal{C}^1$-ből következik $\mathcal{C}^\infty$" típusú tételt bizonyítunk. Ezek az eredmények a Járai [98] dolgozatban publikálás alatt állnak.

Módszerünk előnyei Światak módszerével szemben az alábbiak:

Nincs szükségünk arra az igen erős feltevésre, hogy van olyan y_0, amelyre $g_i(x, y_0) \equiv x$, ha $1 \leq i \leq n$. Ez a feltétel a függvényegyenletek legtöbbjére nem teljesül.

Szintén szükségtelen a meglehetősen mesterkélt és nehezen ellenőrizhető hypoelliptikussági feltétel. Feltételeink — az adott függvényekre vonatkozó simasági feltételek mellett — tisztán lineáris algebrai jellegűek.

Látszólag a Świataknál szereplő (1) egyenlet nemlineáris, míg az általunk vizsgált (2) egyenlet lineáris. Azonban az (1) egyenletben y_0-at helyettesítve a $g_i(x, y_0) \equiv x$ feltételek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x, y_0) f(x) = h(x, f(g_{n+1}(x)), \dots, f(g_m(x))) + h_0(x, y_0).$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $h(x, f(g_{n+1}(x)), \dots, f(g_m(x)))$ tagot, és visszahelyettesítve (1)-be, majd osztva $\sum_{i=1}^{n} h_i(x, y_0)$-al, egy (2) típusú egyenletet kapunk. Így módszerünk alkalmas arra, hogy Światak (1) egyenletének megoldásaira „folytonosságból következik $\mathcal{C}^1$" típusú állításokat bizonyítsunk. A „$\mathcal{C}^1$-ből következik $\mathcal{C}^\infty$" típusú eredményeink az 1.17 problémában szereplő általános *nemlineáris* egyenletre vonatkoznak.

Végül remélhető, hogy módszereink finomításával az 1.17 problémában szereplő általános nemlineáris egyenletre is kaphatók „folytonosságból következik $\mathcal{C}^1$" típusú eredmények. Ez lehetetlennek tűnik Światak módszerével, amely Schwartz-féle disztribúciókat használ, mivel a Schwartz-féle disztribúciók között nincs szorzás definiálva. Schwartz „lehetetlenségi tétele" szerint ilyen szorzás nem is definiálható kielégítő módon. Még kevésbé lehetséges disztribúciókat általános (többváltozós) $\mathcal{C}^\infty$-függvényekbe helyettesíteni. Ez a körülmény a disztribúció-módszert olyan egyenletekre korlátozza, amelyek nincsenek túl messze a lineáristól.

20.1. Definíció. Az alapgondolat

$$p \mapsto \int_U w(u, p) f(\varphi(u, p)) \, d\mu(u) \tag{1}$$

típusú paraméteres integrálokat tekinteni az $f : X \to Y$ függvényre, amely az X halmazt az Y Banach-térbe képezi. Ilyen paraméteres integrálok a (P, U, w, φ, μ) *paraméteres integrációs ötös* által adottak, ahol P a paraméter tér, U egy mértéktér a μ mértékkel, w egy $U \times P$-n értelmezett valós értékű súlyfüggvény és a $\varphi : U \times P \to X$ függvényt úgy tekintjük, hogy egy φ_p, $p \in P$ paraméteres felület-családot reprezentál X-ben. Tekintsük paraméteres integrációs ötösök egy $\mathcal{P}$ osztályát, és jelölje $\mathcal{F}(X, Y, \mathcal{P}; \mathcal{G})$ az összes olyan $f : X \to Y$ függvények osztályát, amelyekre minden $\mathcal{P}$-beli ötösre az (1) paraméteres integrál a $\mathcal{G}$ függvényosztályban van.

Céljainkra egy speciális eset is elegendő lesz. Az egyszerűség kedvéért, tegyük fel, hogy f az $\mathbb{R}^n$ valamely X nyílt részhalmazát az Y Banach-térbe képező folytonos függvény. Az *összes* olyan (U, P, w, φ, μ) paraméteres integrációs ötösök $\mathcal{P}_k$ osztályát fogjuk tekinteni, amelyekre U nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, a P paraméter-tér nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, μ a λ^k Lebesgue-mérték megszorítása U részhalmazaira, a $w : U \times P \to \mathbb{R}$ és $\varphi : U \times P \to X$ függvények pedig valamilyen simasági feltételnek tesznek eleget. Mindig olyan súlyfüggvényeket fogunk használni, amelyek folytonosak és kompakt tartójúak. A φ függvényről legalább annyit fel fogunk tenni, hogy $\mathcal{C}^1$-ben van. Ilyen feltételek mellett a

$$p \mapsto \int_U w(u,p) f(\varphi(u,p))\, du \tag{2}$$

paraméteres integrál minden $p \in P$-re létezik, és folytonos függvénye p-nek. Az integrálás a k-dimenziós Lebesgue-mérték szerint történik.

A 11.1 tétel azt mutatja, hogy ha f csak folytonos, de φ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $k = n$ esetén ez a paraméteres integrál megfelelő feltételek mellett folytonosan differenciálható. Ha $k = 0$, akkor ilyen integrálok folytonos differenciálhatósága ekvivalenssé válik az f folytonos differenciálhatóságával. Durván szólva, csökkentve k-t, ilyen paraméteres integrálok folytonos differenciálhatósága egyre erősebb feltétellé válik, és így megadja azt a lépcsőt, amely szükséges ahhoz, hogy felmásszunk a folytonosságtól a folytonos differenciálhatóságig.

Hogy jól használható jelöléseket kapjunk, tekintsük a következő helyzetet. Legyen X nyílt részhalmaza az $\mathbb{R}^n$ térnek, Y pedig Banach-tér és legyen $0 \le k \le n$. Legyen a $\mathcal{W}$ osztály olyan w függvények osztálya, amelyek valamely (a w-től függő) $U \times P$ szorzatot $\mathbb{R}$-be képeznek, ahol U az $\mathbb{R}^k$ egy nyílt részhalmaza, P pedig valamely euklidészi tér nyílt részhalmaza. A Φ osztály legyen olyan φ függvények osztálya, amelyek valamely $U \times P$ szorzatot X-be képeznek, ahol U nyílt részhalmaza az $\mathbb{R}^k$ térnek, P pedig nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek. A $\mathcal{G}$ függvényosztály legyen valamely euklidészi tér valamely P nyílt részhalmazát az Y-ba képező függvények egy osztálya. Jelölje

$$\mathcal{F}_k(X, Y, \mathcal{W}, \Phi; \mathcal{G})$$

az összes olyan $f : X \to Y$ folytonos függvények osztályát, amelyekre valahányszor a $w \in \mathcal{W}$ és a $\varphi \in \Phi$ függvények értelmezési tartománya ugyanaz az $U \times P$, a (2) paraméteres integrál minden $p \in P$-re definiálva van és a $\mathcal{G}$ függvényosztály eleme.

A $\mathcal{W}$, Φ és $\mathcal{G}$ függvényosztályokat simasági feltételekkel fogjuk megadni. A továbbiakban, ha $0 \le m \le \infty$, jelölje $\mathcal{C}^m$ az összes olyan függvények osztályát, amelyek valamely euklidészi tér valamely nyílt részhalmazán vannak értelmezve, értékeik valamely Banach-térben vannak, és m-szer folytonosan differenciálhatóak. Jelölje $\mathcal{K}^m$ a kompakt tartójú függvények által alkotott részosztályát a $\mathcal{C}^m$ függvényosztálynak. Jelölje $\mathcal{I}^m$ az összes olyan $\varphi \in \mathcal{C}^m$ függvények osztályát, amelyek euklidészi terek nyílt részhalmazainak valamely $U \times P$ Descartes-szorzatát képezik le egy euklidészi térbe úgy, hogy $u \mapsto \varphi(u,p)$ immerzió minden $p \in P$-re. Hasonlóan, jelölje $\mathcal{E}^m$ az összes olyan $\varphi \in \mathcal{C}^m$ függvények osztályát, amelyek euklidészi terek nyílt halmazainak valamely $U \times P$ szorzatát képezik le egy euklidészi térbe úgy, hogy $u \mapsto \varphi(u,p)$ beágyazás minden $p \in P$-re.

Számunkra a legfontosabbak a $\mathcal{F}_k(X,Y,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$, $0 \le k \le n$ függvényosztályok lesznek.

Az $f \in \mathcal{F}_k(X,Y,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$ feltételt gyakran lokálisan fogjuk ellenőrizni. Ha egy adott $\varphi : U \times P \to X$ függvényre minden $u_0 \in U$-hoz és $p_0 \in P$-hez van olyan U_0 nyílt környezete u_0-nak és P_0 nyílt környezete p_0-nak, hogy a (2) paraméteres integrál $\mathcal{C}^1$-ben van, valahányszor $w \in \mathcal{K}^1$, $w : U \times P \to \mathbb{R}$, és w tartója része $U_0 \times P_0$-nak, akkor bármely $w \in \mathcal{K}^1$, $w : U \times P \to \mathbb{R}$-re is a (2) paraméteres integrál $\mathcal{C}^1$-ben van. Ez könnyen következik egységfelbontást használva.

20.2. Megjegyzések. (1) Tegyük fel, hogy X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. A képtér legyen $\mathbb{R}^m$. Fő eredményeink, durván szólva, azt fogják mutatni, hogy ha egy f megoldás benne van $\mathcal{F}_{k+1}(X,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$-ben akkor benne van $\mathcal{F}_k(X,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$-ben is. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathcal{F}_0(X,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$ megegyezik a $\mathcal{C}^1$-függvények osztályával, és hogy minden $f : X \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény $\mathcal{F}_n(X,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$-beli. Így lépésről lépésre azt kapjuk, hogy a folytonos megoldások folytonosan differenciálhatóak.

(2) Némi hasonlóság áll fenn a mértékelméleti és a Baire-kategória esetekkel. A megfelelő mértékelméleti fogalmak előtörténetével kapcsolatban lásd a 18. paragrafust.

(3) Mint a bevezetésben leírtuk, paraméteres integrálok felhasználása függvényegyenletek regularitási tulajdonságainak bizonyítására a valós változós esetben jól ismert, lásd Aczél [3] könyvét, 4.2.2, 4.2.3. A több változós függvények esetére történő kiterjesztéssel a 11. fejezetben foglalkoztunk, amelynek eredményeit itt is fel fogjuk használni.

(4) Ha X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, Y Banach-tér, és $0 \le k \le n$, akkor az $\mathcal{F}_k(X,Y,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$ függvényosztály megegyezik az $\mathcal{F}_k(X,Y,\mathcal{K}^1,\mathcal{E}^2;\mathcal{C}^1)$ függvényosztállyal. Ez könnyen következik a definícióban említett lokalitási elv felhasználásával.

20.3. Tétel. *Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ha $0 \le k < \infty$, akkor $\mathcal{F}_0(X,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^\infty,\mathcal{I}^\infty;\mathcal{C}^k) = \mathcal{C}^k$.*

Bizonyítás. A definícióban szereplő paraméteres integrál most egyszerűen a $p \mapsto w(0,p)f(\varphi(0,p))$ leképezés. Legyen $P = X$, $p \mapsto \varphi(0,p)$ az identikus leképezés, $p \mapsto w(0,p)$ pedig legyen egy az adott $x_0 = p_0 \in X$ pont valamely környezetében. Így azt kapjuk, hogy f egy $\mathcal{C}^k$-függvény az x_0 valamely környezetében. Megfordítva, ha $f \in \mathcal{C}^k$, akkor a $p \mapsto w(0,p)f(\varphi(0,p))$ leképezés is $\mathcal{C}^k$.

Most megmutatjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ valamely X nyílt részhalmazát $\mathbb{R}^m$-be képező folytonos függvények $\mathcal{F}_n(X,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^1,\mathcal{I}^2;\mathcal{C}^1)$-beliek. A bizonyítás a 11.1 tételen múlik.

20.4. Tétel. *Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, $f : X \to \mathbb{R}^m$ pedig folytonos függvény. Ekkor 20.1 jelöléseivel $f \in \mathcal{F}_n(X, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1)$.*

Bizonyítás. Koordinátákra térve át, feltehetjük, hogy f valós értékű, azaz hogy $m = 1$. Legyen P nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^s$-nek, U pedig nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Legyen $\varphi : U \times P \mapsto X$ egy $\mathcal{I}^2$-beli függvény. A definícióban szereplő lokalitási elv miatt elég megmutatni, hogy $p_0 \in P$-nek és $u_0 \in U$-nak van olyan $P_0 \subset P$ illetve $U_0 \subset U$ nyílt környezete, hogy ha $w : U \times P \to \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{C}^1$-függvény, amelynek a tartója része $U_0 \times P_0$-nak, akkor a

$$p \mapsto \int_U w(u,p) f(\varphi(u,p))\, du$$

leképezés $\mathcal{C}^1$-beli. Ha U_0 és P_0 elég kicsik, akkor az $x = \varphi(u,p)$ helyettesítés minden $p \in P_0$-ra elvégezhető. Választhatunk egy olyan S szimplexet, amely tartalmazza U_0-at. A fenti integrál így

$$\int_{\varphi_p(S)} w(\varphi_p^{-1}(x), p) f(x) J(\varphi_p^{-1})(x)\, dx$$

lesz minden $p \in P_0$-ra. A 11.1 tétel szerint az integrál folytonosan differenciálható függvénye $p \in P_0$-nak.

20.5. Tétel. *Legyenek X és X_i, $1 \le i \le n$ euklidészi terek nyílt részhalmazai, Y pedig nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^l$-nek. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to \mathbb{R}^m$, $f_i : X_i \to \mathbb{R}^m$, $h_i : D \to \mathbb{R}$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{I}^2$-beli függvény, és tegyük fel, hogy (20.1 jelöléseivel) az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x,y) \in D$-re

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x,y) f_i(g_i(x,y));$$

(2) h_i folytonosan differenciálható, ha $i = 1, \dots, n$;

(3) az f_i függvény $\mathcal{F}_{k+l}(X_i, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1)$-beli $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^2$-beli D-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, hogy $(\varphi(u_0, p_0), y_0) \in D$ és az

$$(u,y) \mapsto g_i(\varphi(u,p_0), y)$$

leképezés deriváltjának rangja az (u_0, y_0) pontban $k + l$ minden $1 \le i \le n$-re.

Ekkor bármely $\mathcal{K}^1$-beli $w : U \times P \to X$ függvényre a

$$p \mapsto \int_U w(u,p) f(\varphi(u,p))\,du$$

leképezés folytonosan differenciálható a p_0 valamely környezetében.

Bizonyítás. Válasszunk U_0, P_0 és Y_0 nyílt környezeteit az u_0, p_0 illetve y_0 pontoknak úgy, hogy $(\varphi(u,p), y)$ benne legyen a D halmazban, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$ és $y \in Y_0$, továbbá az $(u,y) \mapsto g_i(\varphi(u,p), y)$ leképezés deriváltjának rangja $k + l$ legyen, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$, $y \in Y_0$ és $1 \le i \le n$. Ez lehetséges, mivel D nyílt, g_i és φ is $\mathcal{C}^2$-függvények, a rang alulról félig folytonos, és $U \times Y$ dimenziója $k + l$, így a rang nem mehet $k + l$ fölé.

Legyen $w : U_0 \times P_0 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges $\mathcal{K}^1$-függvény. Válasszunk egy olyan $w_0 : Y_0 \to \mathbb{R}$ függvényt, amely $\mathcal{K}^1$-beli, és amelyre $\int_{Y_0} w_0(y)\,dy \ne 0$. (1) szerint azt kapjuk, hogy

$$w(u,p) f(\varphi(u,p)) w_0(y) = \sum_{i=1}^{n} w(u,p) w_0(y) h_i(\varphi(u,p), y) f_i(g_i(\varphi(u,p), y)).$$

Mindkét oldalt integrálva $U_0 \times Y_0$ felett, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\int_{Y_0} w_0(y)\,dy \int_{U_0} w(u,p) f(\varphi(u,p))\,du \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \int_{Y_0}\int_{U_0} w(u,p) w_0(y) h_i(\varphi(u,p), y) f_i(g_i(\varphi(u,p), y))\,du\,dy. \end{aligned}$$

A jobb oldal $\mathcal{C}^1$-beli. Ez bizonyítja, hogy

$$p \mapsto \int_{U_0} w(u,p) f(\varphi(u,p))\,du$$

folytonosan differenciálható P_0-on. Tetszőleges $\mathcal{K}^1$-beli $w : U \times P \to \mathbb{R}$ súlyfüggvényre az állítás az $u \mapsto w(u, p_0)$ leképezés tartója egy alkalmas véges lefedésének megfelelő egységfelbontást használva következik.

A 18. pragrafusban adott 18.8 példa itt is ugyanúgy tárgyalható. Ugyanúgy, mint ott, itt is megállapíthatjuk, hogy a rang feltétel nem teljesen kielégítő. Az általánosításhoz először egy lemmára lesz szükségünk.

20.6. Lemma. *20.1 jelöléseivel, legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, $0 \le k \le n$ és*

$$f \in \mathcal{F}_k(X, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1).$$

Legyenek U és P euklidészi terek nyílt részhalmazai, és tegyük fel, hogy a $\mathcal{C}^2$-beli $\varphi : U \times P \to X$ függvényre az $u \mapsto \varphi(u,p)$ leképezés deriváltjának rangja $\ge k$ az $(u_0, p_0) \in U \times P$ pontban. Ekkor van olyan U_0 környezete

u_0-nak és P_0 környezete p_0-nak, hogy bármely $\mathcal{K}^1$-beli $w : U \times P \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek tartója része $U_0 \times P_0$-nak, a

$$p \mapsto \int_U w(u,p) f(\varphi(u,p))\, du$$

leképezés folytonosan differenciálható P-n.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy ha u_1-el jelöljük az u első k koordinátájából alkotott vektort, u_2-vel pedig az u maradék koordinátáiból alkotott vektort, akkor az $u_1 \mapsto \varphi(u_1, u_2, p)$ leképezés Jacobi-determinánsa az (u_0, p_0) pontban nem nulla. Válasszunk olyan $U_0 = U_1 \times U_2$ nyílt környezetét u_0-nak és olyan P_0 nyílt környezetét p_0-nak, hogy ez a Jacobi-determináns ne legyen nulla $U_0 \times P_0$-on. Ekkor az

$$(u_2, p) \mapsto \int_{U_1} w(u_1, u_2, p) f(\varphi(u_1, u_2, p))\, du_1$$

leképezés $\mathcal{C}^1$-beli. Integrálva u_2 szerint, kapjuk a lemma állítását.

20.7. Következmény. *20.1 jelöléseivel, ha $0 \le k \le l \le n$, akkor*

$$\mathcal{F}_k(X, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1) \subset \mathcal{F}_l(X, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1).$$

Következő tételünk a 20.5 tétel általánosítása.

20.8. Tétel. *Legyenek X, Y és X_i, $1 \le i \le n$ euklidészi terek nyílt részhalmazai. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to \mathbb{R}^m$, $f_i : X_i \to \mathbb{R}^m$, $h_i : D \to \mathbb{R}$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ függvényeket. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, P nyílt részhalmaza valamely euklidészi térnek, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{I}^2$-beli függvény, és tegyük fel, hogy (20.1 jelöléseivel) az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x, y) \in D$-re

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x,y) f_i(g_i(x,y));$$

(2) h_i folytonosan differenciálható, ha $i = 1, \dots, n$;

(3) az f_i függvény $\mathcal{F}_{k_i}(X_i, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1)$-beli $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^2$-beli D-n $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(5) minden $u_0 \in U$-hoz van olyan y_0, hogy $(\varphi(u_0, p_0), y_0) \in D$ és az

$$(u, y) \mapsto g_i(\varphi(u, p_0), y)$$

leképezés deriváltjának rangja (u_0, y_0)-ban legalább k_i, ha $1 \le i \le n$.

Ekkor bármely $\mathcal{K}^1$-beli $w : U \times P \to X$ függvényre a

$$p \mapsto \int_U w(u,p) f(\varphi(u,p))\, du$$

leképezés folytonosan differenciálható a p_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Válasszunk U_0, P_0 és Y_0 nyílt környezeteit u_0-nak, p_0-nak, illetve y_0-nak úgy, hogy $(\varphi(u,p), y)$ benne legyen D-ben, ha $u \in U_0$, $p \in P_0$ és $y \in Y_0$, továbbá az $(u,y) \mapsto g_i(\varphi(u,p), y)$ leképezés deriváltjának rangja legalább k_i legyen minden $u \in U_0$, $p \in P_0$, $y \in Y_0$ és $1 \le i \le n$-re. Ez lehetséges, mivel D nyílt, g_i és φ is $\mathcal{C}^2$-függvények, a rang pedig alulról félig folytonos.

Legyen $w : U_0 \times P_0 \to \mathbb{R}$ egy $\mathcal{K}^1$-függvény. Válasszunk egy olyan $\mathcal{K}^1$-beli $w_0 : Y_0 \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\int_{Y_0} w_0(y)\, dy \ne 0$. Az (1) feltételből azt kapjuk, hogy

$$w(u,p) f(\varphi(u,p)) w_0(y) = \sum_{i=1}^n w(u,p) w_0(y) h_i(\varphi(u,p), y) f_i(g_i(\varphi(u,p), y)).$$

Mindkét oldalt integrálva $U_0 \times Y_0$ felett, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\int_{Y_0} w_0(y)\, dy \int_{U_0} w(u,p) f(\varphi(u,p))\, du \\ &\quad = \sum_{i=1}^n \int_{Y_0} \int_{U_0} w(u,p) w_0(y) h_i(\varphi(u,p), y) f_i(g_i(\varphi(u,p), y))\, du\, dy. \end{aligned}$$

Az előző lemma szerint a jobb oldal $\mathcal{C}^1$-beli. Ez bizonyítja, hogy

$$p \mapsto \int_{U_0} w(u,p) f(\varphi(u,p))\, du$$

folytonosan differenciálható P_0-on. Tetszőleges $\mathcal{K}^1$-beli $w : U \times P \to \mathbb{R}$ függvényre az állítás megkapható, ha az $u \mapsto w(u, p_0)$ leképezés tartójának egy alkalmas véges lefedéséhez tartozó egységfelbontásra alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat.

Utolsó tételünk magasabb rendű deriváltakra vonatkozik. Itt a függvényegyenlet lehet nemlineáris is.

20.9. Tétel. *Legyen X nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^s$-nek. Legyenek Y, Z és X_i, Z_i, $1 \le i \le n$ euklidészi terek nyílt részhalmazai. Legyen D nyílt részhalmaza $X \times Y$-nak. Tekintsük az $f : X \to \mathbb{R}^m$, $f_i : X_i \to Z_i$, $h : D \times Z_1 \times \cdots Z_i \to Z$, $g_i : D \to X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket. Legyen $r \ge 1$ egy egész szám. Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt, P valamely euklidészi tér nyílt részhalmaza, $p_0 \in P$, $\varphi : U \times P \to X$ egy $\mathcal{I}^2$-függvény és tegyük fel, hogy (20.1 jelöléseivel) az alábbi feltételek teljesülnek:*

(1) minden $(x,y)\in D$-re

$$f(x)=h(x,y,f_1(g_1(x,y))\dots f_n(g_n(x,y)));$$

(2) az összes $\partial_x^{\alpha_0}\partial_{z_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{z_n}^{\alpha_n}h$ parciális deriváltak folytonosan differenciálhatóak, ahol $0\le|\alpha|\le r$;

(3) az f_i függvény összes r-ed rendű parciális deriváltjai léteznek, és benne vannak az $\mathcal{F}_{k_i}(X_i,\mathbb{R}^m,\mathcal{K}^1,\mathcal{E}^2;\mathcal{C}^1)$ térben $(i=1,2,\dots,n)$;

(4) a g_i függvény $\mathcal{C}^{r+1}$-ben van D-n $(i=1,2,\dots,n)$;

(5) minden $u_0\in U$-hoz van olyan y_0, hogy $(\varphi(u_0,p_0),y_0)\in D$ és az

$$(u,y)\mapsto g_i(\varphi(u,p_0),y)$$

leképezés deriváltjának rangja (u_0,y_0)-ban legalább k_i, ha $1\le i\le n$.

Ekkor bármely $\mathcal{K}^1$-beli $w:U\times P\to X$ függvényre és bármely $\alpha\in\mathbb{N}^s$ multiindexre, amelyre $|\alpha|=r$, a

$$p\mapsto\int_U w(u,p)(\partial^\alpha f)(\varphi(u,p))\,du$$

leképezés folytonosan differenciálható p_0 egy környezetében.

Bizonyítás. Legyen $1\le q\le s$, és differenciáljuk az (1) egyenletet parciálisan x_q szerint. Nem írva ki a valtozókat, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x_q}=\frac{\partial h}{\partial x_q}+\sum_{i=1}^n\sum_j\frac{\partial h}{\partial z_{i,j}}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_{i,k}}\frac{\partial g_{i,k}}{\partial x_q}.$$

Itt $z_i=(z_{i,j})$, $x_i=(x_{i,k})$, $f_i=(f_{i,j})$ és $g_i=(g_{i,k})$. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy ha $\alpha\in\mathbb{N}^s$ és $|\alpha|=1$, akkor $\partial^\alpha f$ eleget tesz egy

$$\partial^\alpha f(x)=h_{\alpha,0}(x,y)+\sum_{\beta=1}^{n_\alpha}h_{\alpha,\beta}(x,y)f_{\alpha,\beta}\left(g_{\alpha,\beta}(x,y)\right)$$

függvényegyenletnek, ha $(x,y)\in D$. Itt, ha az α multiindex q-adik koordinátája egy, a többi pedig nulla, akkor

$$h_{\alpha,0}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x_q}\left(x,y,f_0(y),f_1\left(g_1(x,y)\right),\dots,f_n\left(g_n(x,y)\right)\right),$$

$$g_{\alpha,\beta}=g_i\qquad\text{valamely } 1\le i\le n\text{-re,}$$

$$f_{\alpha,\beta}=\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_{i,k}}\qquad\text{valamely } i,j,k\text{-ra}$$

és

$$h_{\alpha,\beta}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial z_{i,j}}\left(x,y,f_0(y),f_1\left(g_1(x,y)\right),\dots,f_n\left(g_n(x,y)\right)\right)\frac{\partial g_{i,k}}{\partial x_q}(x,y)$$

valamely i, j, k-ra.

Világos, hogy $h_{\alpha,\beta}$-nak x szerint létezik és folytonos az r-edik parciális deriváltja, ha $0 \le \beta \le n_\alpha$, továbbá $f_{\alpha,\beta}$ valamelyik X_i-t képezi $\mathbb{R}$-be és minden $r-1$-edik parciális deriváltja létezik és $\mathcal{F}_{k_i}(X_i, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1)$-beli. Újra differenciálva, $|\alpha|$ szerinti teljes indukcióval azt kapjuk, hogy ha $\alpha \in \mathbb{N}^s$, $1 \le |\alpha| \le r$, akkor

$$\partial^\alpha f(x) = h_{\alpha,0}(x,y) + \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} h_{\alpha,\beta}(x,y) f_{\alpha,\beta}\left(g_{\alpha,\beta}(x,y)\right), \tag{5}$$

ha $(x,y) \in D$. Itt $h_{\alpha,\beta} : D \to Z$ és az x szerinti $r+1-|\alpha|$-adik parciális deriváltjai folytonosak, továbbá $f_{\alpha,\beta} : X_i \to \mathbb{R}$ valamely $1 \le i \le n$-re és az összes $r-|\alpha|$-adik parciális deriváltjai $\mathcal{F}_{k_i}(X_i, \mathbb{R}^m, \mathcal{K}^1, \mathcal{E}^2; \mathcal{C}^1)$-beliek. Végül, $g_{\alpha,\beta} = g_i$ ugyanarra az i-re, amelyre $\operatorname{dmn} f_{\alpha,\beta} = X_i$.

Most felhasználjuk a 20.8 tételt. Azt kapjuk, hogy bármely $\mathcal{K}^1$-beli $w : U \times P \to X$ függvényre és bármely $\alpha \in \mathbb{N}^s$ multiindexre, amelyre $|\alpha| = r$, a

$$p \mapsto \int_U w(u,p)(\partial^\alpha f)(\varphi(u,p))\, du$$

leképezés folytonosan differenciálható p_0 egy környezetén.

VII. Alkalmazások

Nyilvánvaló, hogy az előző paragrafusokban bizonyított eredményeknek számos alkalmazása lehetséges. Itt csak néhány, az eredmények használatát illusztráló példát adunk meg.

21.§ Egyszerű alkalmazások

21.1. A Cauchy-egyenlet általánosításai. A hivatkozásokat illetően lásd Aczél [3] könyvét.

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy függvény, és tegyük fel, hogy f eleget tesz az

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Cauchy-egyenletnek. A $t = x + y$ helyettesítéssel

$$f(t) = f(y) + f(t-y), \quad \text{ha} \quad t, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Ebből, ha f mérhető egy pozitív mértékű halmazon vagy Baire-tulajdonságú egy második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmazon, akkor f folytonos a 8.3, illetve a 10.2 tételek szerint. Most alkalmazva az 1.29 tételt, kapjuk, hogy f végtelen sokszor differenciálható.

Hasonlóan, legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy ismeretlen függvény, és legyen adott egy $h : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy f kielégíti az

$$f(x+y) = h\left(x, y, f(x), f(y)\right), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

általánosított Cauchy-egyenletet. Ezzel az egyenlettel kapcsolatban lásd még Aczél [3] könyvét és Sander [141], [142] dolgozatait. A $t = x + y$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(t) = h\left(t-y, y, f(t-y), f(y)\right), \quad \text{ha} \quad t, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

A 8.3, illetve 10.2 tételekből kapjuk, hogy (2) minden f megoldása, amely mérhető egy pozitív mértékű mérhető halmazon, vagy Baire-tulajdonságú egy második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmazon, folytonos. Most az 1.28 tételből kapjuk, hogy f végtelen sokszor differenciálható. Ugyanez a módszer alkalmazható az

$$f\left(G(x,y)\right) = h\left(x, y, f(x), f(y)\right), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

egyenletre, ahol $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy adott, végtelen sokszor differenciálható függvény úgy, hogy minden $t_0 \in \mathbb{R}^n$-hez és $x_0 \in \mathbb{R}^n$-hez létezik olyan $y_0 \in \mathbb{R}^n$ pont, amelyre

$$G(x_0, y_0) = t_0, \qquad \det \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{és} \quad \det \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Ekkor $t = G(x, y)$ helyettesítéssel lokálisan azt kapjuk, hogy

$$f(t) = h\left(g(t, y), y, f\left(g(t, y)\right), f(y)\right),$$

ahol $G\left(g(t, y), y\right) = t$, és alkalmazhatjuk a 8.3, 10.2 és 1.28 tételeket.

21.2. A Pexider-egyenlet általánosításai. A XVI. nemzetközi függvényegyenletek konferencián vetette fel Wolfgang Sander az alábbi problémát (lásd Sander [144]).

Legyenek f, g, és h valós függvények, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és tegyük fel, hogy az

$$f(x + y) = H\left(g(x), h(y)\right), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

függvényegyenlet teljesül. Vajon igazak-e az alábbi állítások:

(1) ha g és h Baire-tulajdonságúak, akkor f folytonos;

(2) ha g és h Lebesgue-mérhetőek egy-egy pozitív mértékű mérhető halmazon, akkor f folytonos;

(3) ha g vagy h Lebesgue-mérhető, akkor f folytonos.

Ha (1), (2) vagy (3) igaz, akkor vajon az összeadás helyettesíthető-e egy általánosabb függvényosztállyal?

Mindhárom problémát és az általánosításukat is megoldjuk, ha megmutatjuk, hogy ha f, g és h $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{R}^m$-be képező függvények, valamint $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ egy folytonos függvény, és fennáll az

$$f\left(G(x, y)\right) = H\left(x, y, g(x), h(y)\right), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenlet, ahol $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy adott, folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy minden $t_0 \in \mathbb{R}^n$-hez és $x_0 \in \mathbb{R}^n$-hez létezik olyan $y_0 \in \mathbb{R}^n$ pont, amelyre

$$G(x_0, y_0) = t_0, \qquad \det \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{és} \quad \det \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

akkor abból, hogy g Lebesgue-mérhető egy pozitív mértékű mérhető halmazon, vagy Baire-tulajdonságú egy második kategóriájú halmazon, következik, hogy f folytonos.

Ezen állítás bizonyításához $t = G(x, y)$ helyettesítéssel lokálisan azt kapjuk, hogy

$$f(t) = H\left(G^*(t, y), y, g\left(G^*(t, y)\right), h(y)\right),$$

ahol $G\left(G^*(t, y), y\right) = t$, és alkalmazhatjuk a 8.3, illetve 10.2 tételeket.

Sander problémájának megoldása a Járai [65] illetve [67] dolgozatokban került publikálásra.

21.3. A koszinusz függvényegyenlete. Legyen G egy lokálisan kompakt csoport, H egy topologikus gyűrű megszámlálható bázissal, $f : G \to H$. Az

$$f(uv) + f(uv^{-1}) = 2f(u)f(v), \quad \text{ha} \quad u, v \in G$$

koszinusz függvényegyenletet vizsgálták például Hille és Phillips [58], Kurepa [116], és Baker [21] abban az esetben, amikor $G = \mathbb{R}$ vagy $G = \mathbb{R}^n$. Itt arra az esetre fogjuk megmutatni, hogy a mérhető megoldások folytonosak, amikor G lokálisan euklidészi, azaz Lie-csoport. Pontosabban, minden olyan lokálisan kompakt csoportra bizonyítunk, amely eleget tesz az alábbi feltételnek:

(2) G-nek van olyan K kompakt részhalmaza, amelyre $\lambda(K) > 0$, és minden $C \subset K$ kompakt részhalmazra, amelyre $\lambda(C) > 0$, $\lambda\{x^2 : x \in C\} > 0$.

Itt λ egy bal Haar-mérték G-n. Minden Lie-csoport eleget tesz ennek a feltételnek. Valóban, ha G egy n-dimenziós Lie-csoport e egységelemmel, akkor nem nehéz belátni a Lie-csoportokon a Haar-mértékre vonatkozó tételek felhasználásával (lásd Chevalley [29]), hogy léteznek olyan U és V nyílt halmazok és egy φ homeomorfizmusa U-nak $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazára, hogy $e \in V \subset U$, $\varphi(e) = 0$, az $(x, y) \mapsto \varphi\left(\varphi^{-1}(x) \cdot \left(\varphi^{-1}(y^{-1})\right)^{-1}\right)$ leképezés analitikus leképezése $\varphi(V) \times \varphi(V)$-nek $\varphi(U)$-ba, és hogy V bármely C kompakt részhalmazára a C bal Haar mértéke és a $\varphi(C)$ Lebesgue-mértéke egyszerre tűnik el. Mivel az

$$x \mapsto \varphi\left(\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi^{-1}(x)\right)$$

$\varphi(V)$-t $\varphi(U)$-ba képező leképezés Jacobi-determinánsa 2^n a 0 pontban, létezik olyan W nyílt környezete e-nek G-ben, hogy $W^2 \subset V$ és a fenti leképezés Jacobi-determinánsa $\varphi(W)$ felett nem kisebb, mint 1. Innen az integráltranszformációs formula felhasználásával következik, hogy W bármely C kompakt részhalmazára $\varphi\left(\{x^2 : x \in C\}\right)$ Lebesgue-mértéke nem kisebb, mint $\varphi(C)$ Lebesgue-mértéke. Így G eleget tesz a (2) feltételnek, K-t a W egy pozitív mértékű kompakt részhalmazának választva.

Térjünk vissza eredeti állításunk bizonyításához. Az (1) egyenletből, $t = uv^{-1}$, $y = v$ helyettesítéssel, azt kapjuk, hogy

$$f(t) = 2f(ty)f(y) - f(ty^2), \qquad \text{ha} \quad t, y \in G.$$

Legyen t_0 egy tetszőleges eleme G-nek. Megmutatjuk, hogy f folytonos a t_0 pontban. Legyen T egy kompakt halmaz, amely tartalmazza t_0 egy környezetét, K a (2)-ben szereplő halmaz, $D = T \times K$, legyen továbbá $Y = X_1 = X_2 = X_3 = G$, $h(t, y, z_0, z_1, z_2, z_3) = 2z_1 z_2 - z_3$, és

$$\begin{aligned} g_1(t, y) &= ty, &\quad \text{ha} \quad (t, y) \in D;\\ g_2(t, y) &= y, &\quad \text{ha} \quad (t, y) \in D;\\ g_3(t, y) &= ty^2, &\quad \text{ha} \quad (t, y) \in D. \end{aligned}$$

A 8.2 tételt fogjuk alkalmazni az $A_1 = A_2 = A_3 = G$ halmazokra. Az egyetlen, ami nem triviális, az utolsó feltétel teljesülése a g_3 függvényre. Mivel, ha $B \subset K$, akkor

$$\{ty^2 : y \in B\} = t\{y^2 : y \in B\}$$

minden $t \in T$-re, azt elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset K$ és $\lambda(B) \geq \varepsilon$, akkor $\lambda\{y^2 : y \in B\} \geq \delta$. Tegyük fel indirekt, hogy ez nem igaz. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$ és minden n természetes számhoz olyan U_n nyílt részhalmaza G-nek, amelyre $\lambda(U_n) < 1/2^n$ és

$$\lambda\{y : y \in C \quad \text{és} \quad y^2 \in U_n\} \geq \varepsilon_0.$$

Mivel az $y \mapsto y^2$ leképezés folytonos, az $\{y : y^2 \in U_n\}$ halmazok nyíltak, így az $\{y : y^2 \in U_n\} \cap K$ halmazok mérhetőek. Legyen

$$A_n = \{y^2 : y \in C\} \cap \Big(\bigcup_{i=n}^{\infty} U_i\Big).$$

Ekkor $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, $\lambda(B_n) < 1/2^{n-1}$, és az $\{y : y^2 \in A_n\}$ halmazok mérhetőek véges, de ε_0-nál nem kisebb mértékkel. Ha

$$B = \Big\{y : y^2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big\},$$

akkor $\lambda(B) \geq \varepsilon_0 > 0$, de

$$\lambda\{y^2 : y \in B\} = \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0.$$

Ha C egy kompakt részhalmaza B-nek pozitív bal Haar mértékkel, akkor ellentmondásra jutunk (2)-vel. Ezzel a bizonyítás teljes.

21.4. Legyen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ egy ismeretlen függvény, és legyenek A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nemszinguláris mátrixok m sorral és m oszloppal. Az

$$(1) \qquad f(x) + \sum_{i=1}^{n} f(A_i x + B_i y) = 0, \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^m$$

függvényegyenletet, speciális eseteit és általánosításait számos szerző tanulmányozta. A hivatkozásokat illetően lásd Székelyhidi [156] dolgozatát. Az 1.29 tétel szerint (1) minden mérhető vagy Baire-tulajdonságú megoldása végtelen sokszor differenciálható.

21.5. Az információ alapegyenlete. Legyen $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ egy ismeretlen függvény, $\alpha > 0$ egy konstans, és

$$D = \{(x,y) : 0 < x, y, x+y < 1\}.$$

Az

$$(1)\quad f(x)+(1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y)+(1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad \text{ha} \quad (x,y) \in D$$

függvényegyenlet fontos szerepet játszik az információelmélet axiomatikus megalapozásában; lásd például Aczél és Daróczy [15] könyvét, Maksa [124] illetve Aczél [6] dolgozatát. A 1.29 tételből következik, hogy (1) minden mérhető vagy Baire-tulajdonságú megoldása végtelen sokszor differenciálható.

21.6. A (2,2)-additivitás egyenlete. Legyen $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ egy ismeretlen függvény. Az

$$(1)\quad \begin{aligned} &f(pq) + f(p(1-q)) + f((1-p)q) + f((1-p)(1-q)) \\ &\quad = f(p) + f(1-p) + f(q) + f(1-q), \quad \text{ha} \quad 0 < p, q < 1 \end{aligned}$$

függvényegyenlet szintén hasznos az információelméletben. Ennek az egyenletnek a mérhető megoldásait Daróczy és Járai határozták meg a [32] dolgozatban. A dolgozatban egy fontos lépés annak bizonyítása, hogy (1) minden mérhető megoldása hatszor differenciálható. $t = pq$ és $y = q$ helyettesítéssel (1)-ből azt kapjuk, hogy

$$(2)\quad \begin{aligned} f(t) = &- f\left(\frac{t}{y} - t\right) - f(y-t) - f\left(1 - \frac{t}{y} - y + t\right) + f\left(\frac{t}{y}\right) \\ &+ f\left(1 - \frac{t}{y}\right) + f(y) + f(1-y), \quad \text{ha} \quad 0 < t < y < 1. \end{aligned}$$

Innen, az 1.29 tétel szerint, (1) minden mérhető vagy Baire-tulajdonságú megoldása végtelen sokszor differenciálható.

21.7. Összeg alakú egyenletek. Losonczi [123] dolgozatában az

$$(1)\quad \begin{aligned} &f(xy)+f(x(1-y)) + f((1-x)y) + f((1-x)(1-y)) \\ &\quad = \big(f(x) + f(1-x)\big)\big(f(y) + f(1-y)\big) \end{aligned}$$

függvényegyenletet tárgyalja. Áttekinti az ismert eredményeket, és meghatározza mindazokat az $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ függvényeket, amelyek háromszor folytonosan differenciálhatók $[0,1]$-en, és eleget tesznek az (1) függvényegyenletnek. Megjegyezzük, hogy az (1) egyenletnek van olyan megoldása $[0,1]$-en, amely mérhető, de nem folytonos, illetve folytonos, de nem differenciálható, ugyanis az egyenletnek eleget tesznek az $f(x) = x^c$, $c \geq 0$ hatvány-függvények, ahol $0^c = 0$.

Egészen más a helyzet a $]0,1[$ nyílt intervallumon. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az (1) egyenlet minden $f:]0,1[\to\mathbb{C}$ megoldása, amely Lebesgue-mérhető vagy Baire-tulajdonságú, végtelen sokszor differenciálható.

Vezessük be a $g(x)=f(x)+f(1-x)$ jelölést. Ezzel a jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(xy)+f\left(x(1-y)\right)+f\left((1-x)y\right)+f\left((1-x)(1-y)\right)=g(x)g(y), \tag{2}$$

ha $x,y\in]0,1[$. Az x helyett új változót vezetve be a $t=xy$ helyettesítéssel, azt kapjuk, hogy

(3)

$$f(t)=g(t/y)g(y)-f\left(t(1-y)/y\right)-f\left((1-t/y)y\right)-f\left((1-t/y)(1-y)\right),$$

ha $0<t<y<1$. Egyszerű számolás és a 3.10, illetve 4.3 segédtétel mutatja, hogy minden t_0-hoz van olyan y_0, hogy a (t_0,y_0) pont egy környezetében alkalmazható a 8.3 illetve a 10.2 tétel, így kapjuk, hogy f folytonos. Most két eset lehetséges. Ha $g\equiv 0$ az egész $]0,1[$-en, akkor a (3) egyenletre azonnal alkalmazható az 1.29 tétel, és kapjuk az állítást. Ha ez nem áll fenn, akkor választható olyan $[A,B]\subset]0,1[$ intervallum, amelyre

$$\int_A^B g(y)\,dy\neq 0,$$

és így (2) mindkét oldalát integrálva

$$\begin{aligned}g(x)\int_A^B g(y)\,dy=\int_A^B f(xy)\,dy+\int_A^B f\left(x(1-y)\right)\,dy\\+\int_A^B f\left((1-x)y\right)\,dy+\int_A^B f\left((1-x)(1-y)\right)\,dy.\end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő integrálokban külön-külön xy, $x(1-y)$, $(1-x)y$ illetve $(1-x)(1-y)$ helyett egy új u változót vezetve be, látjuk, hogy a jobb oldal folytonosan differenciálható függvénye x-nek. Kifejezve $g(x)$-et, kapjuk, hogy g folytonosan differenciálható. Most a (3) egyenletre alkalmazva a 11.3 tételt lokálisan, kapjuk, hogy f is folytonosan differenciálható. Végül (3)-ban visszaírva g helyére f-et, és alkalmazva a 1.25 tételt, kapjuk az állítást.

21.8. Megjegyzés Aczél és Chung egy dolgozatához. Aczél János és Jukang Chung [14] dolgozatukban más eredmények mellett megmutatják, hogy ha az f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ valós függvények lokálisan Lebesgue-integrálhatóak, a p_k és q_k $(k=1,2,\ldots,m)$ pedig L-függetlenek, továbbá az

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x+\lambda_i y)=\sum_{k=1}^{m} p_k(x)q_k(y), \qquad x\in]A,B[,\quad y\in]C,D[\tag{1}$$

függvényegyenletnek eleget tesznek a függvények, ahol $0 \neq \lambda_i \neq \lambda_j$, ha $i \neq j$, akkor az f_i, p_k és q_k függvények végtelen sokszor differenciálhatóak; az L-függetlenség azt jelenti, például a q_k függvényekre, hogy ha

$$\sum_{k=1}^{m} c_k q_k(y) = 0 \quad \text{majdnem minden} \quad y \in]C, D[\text{-re},$$

akkor ebből $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az L-függetlenség és a lokális Lebesgue-integrálhatóság lineáris függetlenséggel és Lebesgue-mérhetőséggel helyettesíthető. Ez az észrevétel a Járai [69] dolgozatban került publikálásra.

Először is vegyük észre (mint [14]-ben), hogy

$$(2) \qquad p_k(x) = \sum_{i,j} a_{i,j,k} f_i(x + \lambda_i y_j), \quad \text{ha} \quad x \in]A, B[$$

egy megfelelően választott $C < y_1 < y_2 < \ldots < y_m < D$ sorozatra, a q_k függvények lineáris függetlensége miatt. Hasonlóan

$$(3) \qquad q_k(y) = \sum_{i,j} b_{i,j,k} f_i(x_j + \lambda_i y), \quad \text{ha} \quad y \in]C, D[,$$

ahol $A < x_1 < x_2 < \ldots < B$. Innen a p_k és q_k függvények is Lebesgue-mérhetőek. A $t = x + \lambda_i y$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(4) \qquad f_i(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t - \lambda_i y) q_k(y) - \sum_{j \neq i} f_j(t + (\lambda_j - \lambda_i)y),$$

ha $C < y < D$ és $A + \lambda_i y < t < B + \lambda_i y$. Felhasználva a 8.3 tételt, azt kapjuk, hogy f_i folytonos, így (2) és (3) szerint a p_k és q_k függvények is folytonosak. Hasonlóan, mint Aczél és Chung [14] dolgozatában, választva egy C^* számot C és D között és integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C^*}^{t} f_i(x + \lambda_i y)\, dy = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_{C^*}^{t} q_k(y)\, dy.$$

Ha a bal oldalon minden integrálban külön-külön bevezetjük az $u = x + \lambda_i y$ új változót, azt kapjuk, hogy

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \int_{x+\lambda_i C^*}^{x+\lambda_i t} f_i(u)\, du = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) Q_k(t),$$

ahol

$$Q_k(t) = \int_{C^*}^{t} q_k(y)\, dy.$$

A Q_k függvények is lineárisan függetlenek, mivel egyébként léteznének olyan c_k nem mind nulla konstansok, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} c_k Q_k(t) \equiv 0,$$

azaz

$$\int_{C^*}^{t} \Big(\sum_{k=1}^{m} c_k q_k(y)\Big)\, dy \equiv 0, \quad \text{ha} \quad t \in]C, D[$$

teljesülne, ami lehetetlen, mert a q_k függvények lineárisan függetlenek és folytonosak. Így a p_k függvények lineáris kombinációi az

$$x \mapsto \int_{x+\lambda_i C^*}^{x+\lambda_i t} f_i(s)\, ds$$

folytonosan differenciálható függvényeknek. (4) és a 11.3 tétel szerint az f_i függvények is folytonosan differenciálhatóak. Felhasználva (4)-et és a 15.2 tételt, azt kapjuk, hogy az f_i függvények — és így (2) és (3) miatt a p_k és q_k függvények is — kétszer folytonosan differenciálhatóak. Ismételve ezt az érvelést, kapjuk, hogy az f_i, p_k és q_k függvények végtelen sokszor differenciálhatóak.

21.9. Az Abel-egyenlet. A XXVI. Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumon 1988-ban Aczél János (lásd [11]) az

$$F(u) + F(v) + F(1 - uv) + F((1 - u)/(1 - uv)) + F((1 - v)/(1 - uv)) = 0,$$

ha $0 < u, v < 1$ egyenlet $F :]0, 1[\to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható megoldásaival kapcsolatban megmutatta, hogy regularitási eredmények felhasználásával hogyan kaphatók meg egyszerűbben a Daróczy Zoltán és Helmut Kiesewetter által meghatározott lokálisan Lebesgue-integrálható megoldások; további hivatkozásokat lásd ott. Az 1.29 tételből következik, hogy a fenti egyenlet minden mérhető vagy Baire-tulajdonságú megoldása $\mathcal{C}^\infty$ (lásd [78]).

21.10. Egy függvényegyenlet a véletlen mezők spektrálelméletéből. A XXXII. Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumon előadásában [120] Lajkó Károly egy általa folytonosság, illetve lokális korlátosság és mérhetőség mellett vizsgált, valószínűségszámítási problémákban szerepet játszó függvényegyenlettel kapcsolatban az alábbi problémát vetette fel: igaz-e, hogy a

$$B(t)(1 + B(2a)) = B(a)(B(t + a) + B(t - a)), \qquad t, a \in \mathbb{R}$$

függvényegyenlet mérhető megoldásai lokálisan korlátosak? Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan kapható eredményeinkből, hogy a mérhető megoldások folytonosak, és így lokálisan korlátosak (lásd [88]).

Létezik egy kompakt, pozitív mértékű A halmaz úgy, hogy $B(2a) \neq -1$, ha $a \in A$, mivel egyébként minden rögzített t-re a bal oldal 0 lenne majdnem mindenütt, a jobb oldal pedig 2 lenne majdnem mindenütt. Így

$$B(t) = \frac{B(a)}{1+B(2a)}(B(t+a)+B(t-a)), \qquad a \in A, t \in \mathbb{R}$$

és a 8.1 tétel alkalmazható annak bizonyítására, hogy B mindenütt folytonos.

Ugyanez a kérdés a $t \geq a$ korlátozás mellett is szerepelt. Ebben az esetben A létezését csak arra tudjuk felhasználni, hogy a B folytonosságát a $t > \sup A$ pontokban bebizonyítsuk, így meg kell mutatnunk, hogy a fenti tulajdonságokkal rendelkező A halmaz a $-\infty$ bármely környezetében létezik. Ha ez nem teljesülne, B a $-\infty$ egy környezetében majdnem mindenütt -1 lenne. Az $x = t - a$ helyettesítéssel az eredeti egyenletből azt kapjuk, hogy

$$B(x+a)(1+B(2a)) = B(a)(B(x+2a)+B(x)), \qquad x, a \in \mathbb{R}, x \geq 0.$$

Rögzítve egy tetszőleges $x \geq 0$-t, a $B(a)$, $B(2a)$, $B(x+2a)$ tagok majdnem mindenütt egyenlők -1-el a $-\infty$ egy környezetében, így $B(x) = 1$. Most rögzítve egy a-t, amelyre $B(a) = -1$ és $B(2a) = -1$, nagy x-re ellentmondást kapunk.

21.11. Egy információmértékekkel kapcsolatos egyenlet. A

$$\begin{aligned}(1)\qquad & G(x) + (1-x)^{\alpha} F_1\left(\frac{u}{1-x}\right) + (1-x)^{\beta} F_2\left(\frac{u}{1-x}\right) \\ & = G(u) + (1-u)^{\alpha} F_1\left(\frac{x}{1-u}\right) + (1-u)^{\beta} F_2\left(\frac{x}{1-u}\right)\end{aligned}$$

függvényegyenlet regularitásának problémáját Wolfgang Sander vetette fel (szóbeli közlés). Az egyenlet információmértékek vizsgálatában játszik szerepet. A megoldást — általánosabb esetre, egyéb eredményekkel együtt — a [103] közös cikkben publikáltuk. Itt csak a fenti speciális esetet tárgyaljuk. Az előző paragrafusok általános regularitási tételeit nem lehet közvetlenül alkalmazni, mivel két különböző ismeretlen függvénynek, F_1-nek és F_2-nek ugyanaz az argumentuma. Levezethetünk azonban az egyenletből új egyenleteket, amelyekre már alkalmazhatók az általános eredmények. Ugyanez a módszer sokkal általánosabb függvényegyenletekre is alkalmazható. Ezzel a módszerrel megmutatjuk, hogy ha $\alpha \neq \beta$ rögzített valós számok, $F_1, F_2, G :]0,1[\to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető vagy Baire-tulajdonságú függvények, amelyekre az (1) függvényegyenlet teljesül, ha $0 < x < 1$, $0 < u < 1$ és $0 < x + u < 1$, akkor F_1, F_2, G akárhányszor differenciálhatóak.

Először is, a függvényegyenletet átírhatjuk

$$\begin{aligned}(2)\qquad G(u) = {} & G(x) + (1-x)^{\alpha} F_1\left(\frac{u}{1-x}\right) + (1-x)^{\beta} F_2\left(\frac{u}{1-x}\right) \\ & - (1-u)^{\alpha} F_1\left(\frac{x}{1-u}\right) - (1-u)^{\beta} F_2\left(\frac{x}{1-u}\right)\end{aligned}$$

alakba; ez az alak hasznos lesz G regularitásának bizonyítására. Két másik függvényegyenletet is származtatni fogunk, amelyek F_1 illetve F_2 regularitásának bizonyítására szolgálnak.

Vonjunk ki $G(x)$-et az (1) egyenlet mindkét oldalából. Az $u = t(1-x)$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&(1-x)^\alpha F_1(t) + (1-x)^\beta F_2(t) \\
&\quad = G(t(1-x)) + (1-t(1-x))^\alpha F_1\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) \\
&\quad + (1-t(1-x))^\beta F_2\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) - G(x)
\end{aligned} \tag{3}
$$

teljesül, ha $0 < x < 1$ és $0 < t < 1$. Hogy a bal oldalon álló, F_2-t tartalmazó tagot kiküszöböljük, helyettesítsünk y-t x helyébe (3)-ban, szorozzuk meg a (3) egyenletet $(1-y)^\beta$-val, a helyettesített egyenletet $(1-x)^\beta$-val, és vegyük e két egyenlet különbségét:

$$
\begin{aligned}
&(1-x)^\beta(1-y)^\alpha F_1(t) - (1-y)^\beta(1-x)^\alpha F_1(t) \\
&\quad = (1-x)^\beta G(t(1-y)) + (1-x)^\beta(1-t+ty)^\alpha F_1\left(\frac{y}{1-t(1-y)}\right) \\
&\quad + (1-x)^\beta(1-t+ty)^\beta F_2\left(\frac{y}{1-t(1-y)}\right) - (1-x)^\beta G(y) \\
&\quad - (1-y)^\beta G(t(1-x)) - (1-y)^\beta(1-t+tx)^\alpha F_1\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) \\
&\quad - (1-y)^\beta(1-t+tx)^\beta F_2\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) + (1-y)^\beta G(x).
\end{aligned}
$$

Az F_1 függvény $(1-x)^\beta(1-y)^\alpha - (1-y)^\beta(1-x)^\alpha$ szorzója a bal oldalon nem nulla, ha $x \neq y$. Mindkét oldalt osztva vele, azt kapjuk, hogy

(4)

$$
\begin{aligned}
F_1(t) = \Bigg(&(1-x)^\beta G(t(1-y)) + (1-x)^\beta(1-t+ty)^\alpha F_1\left(\frac{y}{1-t(1-y)}\right) \\
&+ (1-x)^\beta(1-t+ty)^\beta F_2\left(\frac{y}{1-t(1-y)}\right) - (1-x)^\beta G(y) \\
&- (1-y)^\beta G(t(1-x)) - (1-y)^\beta(1-t+tx)^\alpha F_1\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) \\
&- (1-y)^\beta(1-t+tx)^\beta F_2\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) \\
&+ (1-y)^\beta G(x)\Bigg)\Big((1-x)^\beta(1-y)^\alpha - (1-y)^\beta(1-x)^\alpha\Big)^{-1},
\end{aligned}
$$

valahányszor $0 < x, y, t < 1$ és $x \neq y$. Hasonlóan kapjuk az

(5)
$$\begin{aligned} F_2(t) = \Bigg(&(1-x)^\alpha G(t(1-y)) + (1-x)^\alpha (1-t+ty)^\beta F_2\left(\frac{y}{1-t(1-y)}\right) \\ &+ (1-x)^\alpha (1-t+ty)^\alpha F_1\left(\frac{y}{1-t(1-y)}\right) - (1-x)^\alpha G(y) \\ &- (1-y)^\alpha G(t(1-x)) - (1-y)^\alpha (1-t+tx)^\beta F_2\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) \\ &- (1-y)^\alpha (1-t+tx)^\alpha F_1\left(\frac{x}{1-t(1-x)}\right) \\ &+ (1-y)^\alpha G(x)\Bigg)\Big((1-x)^\alpha (1-y)^\beta - (1-y)^\alpha (1-x)^\beta\Big)^{-1} \end{aligned}$$

egyenletet, amely szintén $0 < x, y, t < 1$, $x \neq y$ esetén teljesül.

Most már alkalmazhatjuk általános tételeinket. A 8.3 tételből a (4) és (5) egyenletek felhasználásával azt kapjuk, hogy ha F_1, F_2 és G Lebesgue-mérhetőek, akkor F_1 illetve F_2 folytonosak; csak azt kell ellenőriznünk, hogy minden $0 < t < 1$-hez van olyan $0 < x, y < 1$, $x \neq y$, hogy a jobb oldalon álló ismeretlen függvényekben szereplő belső függvényekre a $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ parciális deriváltak közül legalább az egyik nem nulla a (t, x, y) pontban. Ezek a belső függvények a $(t, x, y) \mapsto x$, $(t, x, y) \mapsto y$, $(t, x, y) \mapsto t(1-x)$, $(t, x, y) \mapsto t(1-y)$, $(t, x, y) \mapsto x/(1-t(1-x))$ és $(t, x, y) \mapsto y/(1-t(1-y))$ függvények. Könnyű ellenőrizni, hogy bármely x, y, $x \neq y$ pár megteszi. Ugyanezt a tételt használva és a (2) egyenletet, kapjuk, hogy G is folytonos. Az analóg 10.2 tételt használva, hasonlóan kapjuk, hogy ha F_1, F_2 és G Baire-tulajdonságúak, akkor folytonosak is. Most a 11.3 tételt használva hasonlóan kapjuk, hogy F_1, F_2 és G folytonosan differenciálhatóak. Végül, a 15.2 tételt felhasználva, azt kapjuk, hogy ha az F_1, F_2 és G függvények $p > 0$-szor folytonosan differenciálhatóak, akkor (2) szerint a G függvény, (4) illetve (5) szerint pedig az F_1 illetve F_2 függvények $p+1$-szer folytonosan differenciálhatóak. Innen teljes indukcióval adódik az állítás.

21.12. A kockakettőzés egyenlete. De Saint-Vincent bizonyos klasszikus eredményei által motiválva, amelyek a "kocka kettőzésével" kapcsolatosak, C. Alsina és J. L. Garcia-Roig az

(1) $$f(x)f(px+\bar{p}y) + f(y)f(\bar{p}x+py) = f(px+\bar{p}y)^2 + f(\bar{p}x+py)^2,$$

ha $x, y \in \mathbb{R}$ függvényegyenletet tanulmányozták, ahol $0 < p < 1$ és $\bar{p} = 1-p$, és meghatározták folytonos $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ megoldásait a $p = 1/3$ esetben. C. Alsina felvetette azt a problémát, hogy találjuk meg (1) összes folytonos $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ megoldását, ha $0 < p < 1$, $p \neq 1/3$. (Lásd [20].) A problémát Maksa Gyulával közösen megoldottuk a XXXI. Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumon, (lásd [100]) és az eredményt részletes bizonyítás nélkül ismertettük. Az (1) egyenlet nem nulla megoldásait mérhetőségi feltétel mellett $0 < p < 1$ esetén meghatározó alábbi eredményt a [101] közös dolgozatban publikáltuk.

Tétel. *Legyen $0 < p < 1$ rögzített, $\bar{p} = 1 - p$, $I \subset \mathbb{R}$ egy nem üres nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ egy, az I egy pozitív mértékű halmazán mérhető függvény. Ekkor f akkor és csak akkor teljesíti az (1) függvényegyenletet, ha*

$$
\begin{aligned}
&0 < p < 1 \quad \textit{és} \quad f(x) = c_1, \quad \textit{ha } x \in I \qquad \textit{vagy} \\
&p = \frac{1}{3} \quad \textit{és} \quad f(x) = c_1 e^{c_2 x}, \quad \textit{ha } x \in I \qquad \textit{vagy} \\
&p = \frac{1}{2} \quad \textit{és} \quad f(x) = c_1(x + c_3), \quad \textit{ha } x \in I;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

itt c_1, c_2, c_3 tetszőleges konstansok, $c_1 \neq 0$, $-c_3 \notin I$.

Bizonyítás. Az első lépés megmutatni, hogy minden megoldás, amely mérhető egy pozitív Lebesgue-mértékű A halmazon, végtelen sokszor differenciálható. Az egyenletet átírhatjuk

$$
f(x) = f(px + \bar{p}y) + \frac{f(\bar{p}x + py)^2}{f(px + \bar{p}y)} - f(y)\frac{f(\bar{p}x + py)}{f(px + \bar{p}y)}
\tag{3}
$$

alakba. Válasszunk olyan q számot, amelyre $1 > q > 1 - 1/(1/p + 1/\bar{p})$, azaz $0 < (1-q)(1/p + 1/\bar{p}) < 1$. Lebesgue sűrűségi tételét használva, találhatunk olyan $c \in I$ pontot és $r > 0$ számot, hogy a $C = [c-r, c+r]$ halmazra $C \subset I$ és $\lambda(A \cap C) > q\lambda(C)$, ahol λ a Lebesgue-mértéket jelöli $\mathbb{R}$-en. Legyen $g_{1,x}(y) = px + \bar{p}y$ és $g_{2,x}(y) = \bar{p}x + py$, ha $x, y \in I$. A 8.3 tételt szeretnénk alkalmazni annak bizonyítására, hogy f folytonos a c egy környezetében. Az egyetlen nem nyilvánvaló feltétel, amit ellenőriznünk kell, hogy a $g_{1,c}^{-1}(A) \cap g_{2,c}^{-1}(A)$ halmaz Lebesgue-mértéke pozitív. A $g_{1,c}^{-1}$ és $g_{2,c}^{-1}$ leképezések nagyítások c centrummal és $1/\bar{p}$ illetve $1/p$ faktorral. Innen $C \setminus g_{i,c}^{-1}(A)$ benne van a $g_{i,c}^{-1}(C \setminus A)$ halmazban, ha $i = 1, 2$, és Lebesgue-mértéke kisebb mint $\lambda(C)(1-q)/p$ illetve $\lambda(C)(1-q)/\bar{p}$. Ez azt mutatja, hogy $C \cap g_{1,c}^{-1}(A) \cap g_{2,c}^{-1}(A)$ Lebesque-mértéke legalább $\lambda(C)(1 - (1-q)/p - (1-q)/\bar{p}) > 0$.

Legyen $c \in I$, és mint fent, egy $r > 0$-ra jelölje C a $[c-r, c+r] \subset I$ zárt intervallumot. Legyen $1 < Q \leq \min\{(1 - \bar{p}/2)/p, (1 - p/2)/\bar{p}\}$. Ha $|y - c| \leq r/2$ és $|x - c| < Qr$, akkor $|px + \bar{p}y - c| < pQr + r\bar{p}/2 = r(pQ + \bar{p}/2) \leq r$, és hasonlóan $|\bar{p}x + py - c| < r$. Innen, felhasználva az (1) egyenletet, azt kapjuk, hogy ha f folytonos C-n, akkor f folytonos a $]c - Qr, c + Qr[\cap I$ halmazon is. Véve egy alkalmas növekvő intervallumsorozatot, azt kapjuk, hogy f folytonos I-n.

Most megmutatjuk, hogy f lokálisan Lipschitz függvény I-n. A 11.5 tételt alkalmazhatjuk a fenti C kompakt halmazzal, és azt kapjuk, hogy f lokálisan Lipschitz függvény $]c - Qr, c + Qr[\cap I$-n. Véve egy megfelelő C-t, ha I korlátos, illetve választva C-k egy megfelelő sorozatát, ha I nem korlátos, azt kapjuk, hogy f lokálisan Lipschitz függvény I-n. Most alkalmazva a 1.25 tételt (3)-ra, kapjuk, hogy f végtelen sokszor differenciálható.

A második lépés megoldani az (1) függvényegyenletet. Differenciálva x szerint, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &f'(x)f(p x+\bar{p} y)+f(x)f'(p x+\bar{p} y)p+f(y)f'(\bar{p} x+p y)\bar{p} \\ &\qquad=2f(p x+\bar{p} y)f'(p x+\bar{p} y)p+2f(\bar{p} x+p y)f'(\bar{p} x+p y)\bar{p} \end{aligned}$$

minden $x, y \in I$-re. Ezt az egyenletet differenciálva y szerint, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &f'(x)f'(p x+\bar{p} y)\bar{p}+f(x)f''(p x+\bar{p} y)p\bar{p} \\ &\qquad+f'(y)f'(\bar{p} x+p y)+f(y)f''(\bar{p} x+p y)p\bar{p} \\ &\qquad=2f'(p x\bar{p} y)^2 p\bar{p}+2f(p x+\bar{p} y)f''(p x+\bar{p} y)p\bar{p} \\ &\qquad+2f'(\bar{p} x+p y)^2 p\bar{p}+2f(\bar{p} x+p y)f''(\bar{p} x+p y)p\bar{p}, \end{aligned}$$

ha $x, y \in I$. Az $y=x$ helyettesítéssel ebből az egyenletből következik, hogy

$$p f''(x)f(x)+(2p-1)f'(x)^2=0, \tag{4}$$

ha $x \in I$. Definiáljuk a g függvényt I-n a

$$g=\frac{f'}{f} \tag{5}$$

összefüggéssel. Ekkor (4)-ből következik, hogy

$$p g'(x)+(3p-1)g(x)^2=0, \qquad x \in I. \tag{6}$$

Ha $g(x_0)=0$ valamely $x_0 \in I$-re, akkor (6) szerint $g'(x_0)=0$ is teljesül. Másrészt a nulla függvény megoldása (6)-nak I-n, így az unicitási tétel szerint g azonosan nulla I-n. Így (5)-ből következik (2). Ha $g(x) \neq 0$ minden $x \in I$-re, akkor definiáljuk h-t az I-n a $h=1/g$ összefüggéssel. (6)-ból következik, hogy $h'(x)=(3p-1)/p$ minden $x \in I$-re, így

$$h(x)=\frac{3p-1}{p}x+c \tag{7}$$

valamely $c \in \mathbb{R}$-re és minden $x \in I$-re. Ha $p=1/3$, akkor h definíciója szerint azt kapjuk, hogy $c \neq 0$ és (5)-ből következik, hogy $f'(x)-(1/c)f(x)=0$ minden $x \in I$-re. Így (2) teljesül. Ha $p \neq 1/3$, akkor $-pc/(3p-1) \notin I$ és ismét h definíciója szerint (5)-ből következik, hogy

$$f'(x)-\frac{1}{\frac{3p-1}{p}x+c}f(x)=0 \qquad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Ennélfogva valamely $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$-re azt kapjuk, hogy

$$f(x)=d\left(\frac{3p-1}{p}x+c\right)^{p/(3p-1)} \qquad \text{minden } x \in I\text{-re.} \tag{8}$$

Legyen $\alpha = p/(3p-1)$. Ezzel a jelöléssel a fenti f függvény pontosan akkor megoldása (1)-nek, ha az

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}x+c\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}(px+\bar{p}y)+c\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}y+c\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}(\bar{p}x+py)+c\right)^{\alpha}\\ =\left(\frac{1}{\alpha}(px+\bar{p}y)+c\right)^{2\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}(\bar{p}x+py)+c\right)^{2\alpha}\end{aligned}$$

egyenlet teljesül minden $x, y \in I$-re. Egy lineáris helyettesítéssel azt kapjuk, hogy ez pontosan akkor igaz, ha

$$x^{\alpha}(px+\bar{p}y)^{\alpha}+y^{\alpha}(\bar{p}x+py)^{\alpha}=(px+\bar{p}y)^{2\alpha}+(\bar{p}x+py)^{2\alpha}$$

egyenlet teljesül minden $x, y \in \frac{1}{\alpha}I + c$-re. Ha ez teljesül, akkor az

$$F(t)=(p+\bar{p}t)^{\alpha}+t^{\alpha}(\bar{p}+pt)^{\alpha}-(p+\bar{p}t)^{2\alpha}-(\bar{p}+pt)^{2\alpha}$$

függvény azonosan 0 az 1 pont egy környezetében. Megmutatjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha = 1$ és így $p = 1/2$. Ennek bizonyítására számoljuk ki az F deriváltjait az 1 pontban. Világos, hogy ezek a deriváltak mind $F^{(n)}(1) = P_n(p)(3p-1)^{-n}$ alakúak valamely P_n polinomjával p-nek. Computer algebra rendszert használva a számításokra, azt kapjuk, hogy a függvénynek és első három deriváltjának értéke 0, de

$$P_4(p) = -48p^8 + 124p^7 - 90p^6 - 12p^5 + 40p^4 - 16p^3 + 2p^2$$

a

$$0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}, -\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}, 1, 1$$

gyökökkel. Mivel feltettük, hogy $p \neq 1/3$, $0 < p < 1$, a fennmaradó esetek $p = 1/2$ és $p = -1/8 + \sqrt{17}/8$. Mindkettő gyöke P_5-nek is, de az utóbbi nem gyöke a

$$\begin{aligned}P_6(p) = -10080p^{12} + 45192p^{11} - 109044p^{10} + 165872p^9 - 141426p^8\\ + 43526p^7 + 26452p^6 - 30532p^5 + 12166p^4 - 2298p^3 + 172p^2\end{aligned}$$

polinomnak, mivel

$$P_6\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}\right) = -\frac{718978689}{524288} + \frac{174377945}{524288}\sqrt{17}.$$

Így azt kapjuk, hogy csak $\alpha = 1$ azaz $p = 1/2$ lehetséges. Ebben az esetben az f függvény (8)-ban nyilván teljesíti (1)-et, így (2)-t kapjuk.

22.§ A Dirichlet-eloszlás jellemzése

22.1. Dan Geiger és David Heckerman [46] dolgozatukban a Dirichlet-eloszlás egy új jellemzését adták meg. Eredményeik azt mutatják, hogy bizonyos statisztikai problémáknál nem kell feltennünk, hogy a szereplő valószínűségi változók Dirichlet-eloszlásúak, ez automatikusan következik a sokkal természetesebb függetlenségi feltevésekből. Módszerük abban áll, hogy megmutatják, a valószínűségelméleti meggondolások a

$$\begin{aligned} f_0(y_1,\dots,y_{n-1})\prod_{j=1}^{n} g_j(z_{1,j},\dots,z_{k-1,j}) \\ = g_0(x_1,\dots,x_{k-1})\prod_{i=1}^{k} f_i(w_{i,1},\dots,w_{i,n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

függvényegyenletre vezetnek. Az egyenlet fennáll, ha

$$(y_1,\dots,y_{n-1})\in\Delta_{n-1}$$

és

$$(z_{1,j},\dots,z_{k-1,j})\in\Delta_{k-1} \qquad (1\le j\le n),$$

(itt Δ_m a

$$\Delta_m=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_m):\alpha_i>0,\textstyle\sum_i\alpha_i<1\}$$

m-dimenziós egységszimplex $\mathbb{R}^m$-ben). Az x_i-k, $1\le i\le k$ az

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} z_{i,j}y_j, \qquad (1\le i<k) \tag{2}$$

összefüggéssel, illetve az

$$x_k=1-\sum_{i=1}^{k-1}x_i \tag{3}$$

összefüggéssel, míg $w_{i,j}$ a

$$w_{i,j}=z_{i,j}y_j/x_i \qquad (1\le i\le k,\quad 1\le j<n) \tag{4}$$

összefüggéssel van definiálva, ahol

$$z_{k,j}=1-\sum_{i=1}^{k-1}z_{i,j} \qquad (1\le j\le n). \tag{5}$$

Az

$$y_n=1-\sum_{j=1}^{n-1}y_j \tag{6}$$

jelöléssel az is teljesül, hogy

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} y_j. \tag{7}$$

Megjegyezzük, hogy $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Delta_{k-1}$ és $(w_{i,1}, \dots, w_{i,n-1}) \in \Delta_{n-1}$, ha $1 \le i \le k$, továbbá f_i, $0 \le i \le k$ és g_j, $0 \le j \le n$ a Δ_{n-1} illetve Δ_{k-1} halmazokon értelmezett valós értékű függvények.

Mint Geiger és Heckerman megjegyzik, az (1) függvényegyenlet szimmetrikus abban az értelemben, hogy úgy is tekinthető, hogy az x-ek és w-k a szabad változók, azaz (1) minden $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Delta_{k-1}$-ra és $(w_{i,1}, \dots, w_{i,n-1}) \in \Delta_{n-1}$-re áll fenn, $1 \le j \le n$. Ebben az esetben y_j, $1 \le j \le n$ az

$$y_j = \sum_{i=1}^{k} w_{i,j} x_i, \qquad \text{ha} \quad 1 \le j < n \tag{8}$$

illetve

$$y_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j \tag{9}$$

összefüggéssel van definiálva, $z_{i,j}$ pedig a

$$z_{i,j} = w_{i,j} x_i / y_j \qquad \text{ha} \quad 1 \le j \le n, \quad 1 \le i < k \tag{10}$$

összefüggéssel, ahol $w_{i,n}$-et a

$$w_{i,n} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w_{i,j} \qquad \text{ha} \quad 1 \le i \le k \tag{11}$$

összefüggés definiálja. Az

$$x_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \tag{12}$$

jelölésekkel az is teljesül, hogy

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} w_{i,j} x_i. \tag{13}$$

Röviden, az $f \leftrightarrow g$, $x \leftrightarrow y$, $z \leftrightarrow w$, $k \leftrightarrow n$, $i \leftrightarrow j$ cserékre vonatkozóan teljes szimmetria áll fenn.

Geiger és Heckerman az (1) függvényegyenletet differenciálegyenletre történő redukcióval oldják meg. Ehhez fel kell tenniük, hogy az (1)-ben szereplő ismeretlen függvények simák és mindenütt pozitívak, de csak azt tudjuk, hogy valamely valószínűségi változók sűrűségfüggvényei. Így az alábbi, Dan Geiger által megfogalmazott problémához jutunk:

22.2. Probléma. *Tegyük fel, hogy az előző pont (1)–(5) feltételei fennállnak, és az (1) egyenletben szereplő ismeretlen függvények sűrűségfüggvények (azaz nemnegatívak, Lebesgue-integrálhatók, és integráljuk egy). Következik-e, hogy mindenütt pozitívak és $\mathcal{C}^\infty$-beliek?*

Tételeink lehetővé teszik, hogy pozitív választ adjunk erre a kérdésre. Ez az eredmény a Járai [92] dolgozatban került publikálásra. Annak bizonyítására, hogy 22.1.(1) pozitív megoldásai $\mathcal{C}^\infty$-beliek, közvetlenül használhatjuk általános tételeinket. Szükségünk lesz az alábbi lemmára.

22.3. Lemma. *Ha $y, z \in \mathbb{R}^m$, $z \neq 0$, $y \neq 0$, akkor az $u \mapsto \langle u, y\rangle z$ lineáris transzformáció valós sajátértékei és sajátalterei*

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & &\{u \in \mathbb{R}^m : u \perp y\} \\ \alpha &= \langle z, y\rangle, & &\{u \in \mathbb{R}^m : u = cz, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha u = \langle u, y\rangle z$. Két lehetőség van. Ha $\alpha = 0$, akkor $\langle u, y\rangle = 0$. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $u = cz$ valamely $c \in \mathbb{R}$-el és így $\alpha cz = \langle cz, y\rangle z$, amiből következik, hogy $\alpha = \langle z, y\rangle$.

22.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f_i, $0 \leq i \leq k$ és g_j, $0 \leq j \leq n$ függvények Lebesgue-mérhetőek, mindenütt pozitívak, és eleget tesznek a 22.1.(1) egyenletnek, amelyben a belső függvények a 22.1.(2)–(5) összefüggésekkel vannak definiálva. Ekkor f_i, $0 \leq i \leq k$ és g_j, $0 \leq j \leq n$ is $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak.*

Bizonyítás. Vegyük a 22.1.(1) egyenlet mindkét oldalának logaritmusát. A 8.3, 11.3 és 15.2 tételeket fogjuk felhasználni, hogy megmutassuk, az $\ln f_i$, $0 \leq i \leq k$ és $\ln g_j$, $0 \leq j \leq n$ függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak.

Először megmutatjuk, a 8.3 tételből következik, hogy $\ln f_0$ folytonos. Az egyetlen nem triviálisan teljesülő feltétel, hogy bármely $(y_1, \ldots, y_{n-1})$-hez vannak olyan z-k, hogy az összes, a g_j, $0 \leq j \leq n$ illetve f_i, $1 \leq i < k$ függvényekbe írt belső függvényeknek a z-k szerinti parciális deriváltjaiból képzett mátrix rangja maximális, azaz $k-1$ a g-k belső függvényeire és $n-1$ az f-ek belső függvényeire. Azt fogjuk megmutatni, hogy a z-k *bármely* választására ez a helyzet.

A g_j, $1 \leq j \leq n$ függvények belső függvényeire ez triviális.

A g_0-ban szereplő belső függvényre bármely $1 \leq j \leq n$ esetén a

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{s,j}}\right)_{i,s=1}^{k-1} = (y_j \delta_{i,s})_{i,s=1}^{k-1}$$

mátrix determinánsa y_j^{k-1}, így nem nulla.

Az f_i, $1 \leq i < k$ függvények belső függvényeire azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial z_{i,t}} = \frac{\delta_{j,t} y_j x_i - z_{i,j} y_j y_t}{x_i^2},$$

ahol δ a Kronecker-delta. Jelölje Z_i az $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{z}_i$ lineáris transzformációját $\mathbb{R}^{n-1}$-nek önmagára, ahol $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ és $\mathbf{z}_i = (z_{i,1}, \ldots, z_{i,n-1})$. Ezzel a jelöléssel

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{i,j}}{\partial z_{i,t}}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} y_j}{x_i^{2n-2}} \det(x_i \mathbf{1} - Z_i),$$

ahol $\mathbf{1}$ az identikus leképezés. Az előző lemma szerint a Z_i valós sajátértékei 0 és $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle$. Mivel $x_i \neq 0$ és $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle = z_{i,1}y_1 + \cdots + z_{i,n-1}y_{n-1} \neq x_i$, a jobb oldalon szereplő determináns nem nulla.

Az f_k függvényben szereplő belső függvényre azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial w_{k,j}}{\partial z_{i,t}} = \frac{\dfrac{\partial z_{k,j}}{\partial z_{i,t}} y_j x_k - z_{k,j} y_j \dfrac{\partial x_k}{\partial z_{i,t}}}{x_k^2} = \frac{-\delta_{j,t} y_j x_k - z_{k,j} y_j y_t}{x_k^2}.$$

Jelölje Z_k az $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}_k$ lineáris transzformációját $\mathbb{R}^{n-1}$-nek önmagára, ahol $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ és $\mathbf{z}_k = (z_{k,1}, \ldots, z_{k,n-1})$. Ezzel a jelöléssel bármely $1 \leq i < k$-re

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{k,j}}{\partial z_{i,t}}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} y_j}{x_k^{2n-2}} \det(Z_k - x_k \mathbf{1}).$$

Úgy, mint fent, a jobb oldal nem nulla, mivel $x_k \neq 0$ és $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_k \rangle = z_{k,1}y_1 + \cdots + z_{k,n-1}y_{n-1} \neq x_k$.

Második lépésként megmutatjuk, hogy a 8.3 tételből az is következik, hogy $\ln g_j$ folytonos, ha $1 \leq j \leq n$. Itt is, úgy mint fent, az egyetlen nem triviálisan teljesülő feltétel, hogy egy tetszőleges $(z_{1,j}, \ldots, z_{k-1,j})$ vektorhoz létezik olyan y_i, $1 \leq i < k$ és $z_{s,t}$, $1 \leq s < k$, $1 \leq t \leq n$, $t \neq j$, hogy a g_t, $0 \leq t \leq n$, $t \neq j$ és f_i, $0 \leq i < k$ függvények belső függvényeinek az $y_i, z_{s,t}$ változók szerinti deriváltjának a rangja maximális, azaz $k-1$ a g-k belső függvényeire és $n-1$ az f-ek belső függvényeire. Meg fogjuk mutatni, hogy az y_i, $1 \leq i < k$ és $z_{s,t}$, $1 \leq s < k$, $1 \leq t \leq n$, $t \neq j$ változók *bármely* választására ez a helyzet.

Az f_0 és a g_t, $1 \leq t \leq n$, $t \neq j$ függvények belső függvényeire ez triviális.

A g_0 függvény belső függvényére, és $1 \leq t \leq n$, $t \neq j$-re a

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{s,t}}\right)_{i,s=1}^{k-1} = (y_t \delta_{i,s})_{i,s=1}^{k-1}$$

mátrix determinánsa y_t^{k-1}, így nem nulla.

Az f_i, $1 \leq i < k$ függvények belső függvényeire

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y_t} = \frac{z_{i,j} \delta_{j,t} x_i - z_{i,j} y_j (z_{i,t} - z_{i,n})}{x_i^2}.$$

Jelölje Z_i' az $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}_i'$ lineáris transzformációját $\mathbb{R}^{n-1}$-nek önmagába, ahol $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ és $\mathbf{z}_i' = (z_{i,1} - z_{i,n}, \ldots, z_{i,n-1} - z_{i,n})$. Ezzel a jelöléssel

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y_t}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} z_{i,j}}{x_i^{2n-2}} \det(x_i \mathbf{1} - Z_i').$$

Mivel $z_i' \neq 0$ és $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i' \rangle = x_i - z_{i,n} \neq x_i$, a jobb oldal determinánsa nem nulla.

Az f_k függvény belső függvényére azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{k,j}}{\partial y_t} &= \frac{z_{k,j}\delta_{j,t}x_k - z_{k,j}y_j\dfrac{\partial x_k}{\partial y_t}}{x_k^2}\\ &= \frac{z_{k,j}\left(\delta_{j,t}x_k + y_j\sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_t}\right)}{x_k^2}\\ &= \frac{z_{k,j}\left(\delta_{j,t}x_k + y_j\sum_{i=1}^{k-1}(z_{i,t}-z_{i,n})\right)}{x_k^2}\\ &= \frac{z_{k,j}\left(\delta_{j,t}x_k + y_j(1-z_{k,t}-1+z_{k,n})\right)}{x_k^2}\\ &= \frac{z_{k,j}\left(\delta_{j,t}x_k - y_j(z_{k,t}-z_{k,n})\right)}{x_k^2}.\end{aligned}$$

Jelölje Z_k' az $\mathbf{u}\mapsto\langle\mathbf{u},\mathbf{y}\rangle\mathbf{z}_k'$ lineáris transzformációját $\mathbb{R}^{n-1}$-nek önmagába, ahol $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_{n-1})$ és $\mathbf{z}_k'=(z_{k,1}-z_{k,n},\dots,z_{k,n-1}-z_{k,n})$. Ezzel a jelöléssel

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{k,j}}{\partial y_t}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}z_{k,j}}{x_k^{2n-2}}\det(x_k\mathbf{1}-Z_k').$$

A jobb oldal nem nulla, mivel $x_k\neq 0$ és $\langle\mathbf{y},\mathbf{z}_k'\rangle = x_k - z_{k,n}\neq x_k$.

A harmadik lépésben felhasználjuk az egyenlet szimmetriáját. Felcserélve az y-ok és a z-k, illetve az x-ek és a w-k szerepét, kapjuk, hogy az $\ln f_0$ és az $\ln g_j$, $1\le j\le n$ függvények is folytonosak. Így azt kaptuk, hogy f_i, $0\le i\le k$ és g_j, $0\le j\le n$ folytonosak.

Most alkalmazhatjuk a 11.3 tételt. Ugyanúgy, mint fenn, kapjuk, hogy a föggvényegyenletben szereplő összes függvény $\mathcal{C}^1$-beli. Ha most alkalmazzuk a 15.2 tételt, ugyanúgy, mint fent, azt kapjuk, hogy minden, az egyenletben szereplő függvény $\mathcal{C}^2$-beli. Ismételve ezt az eljárást, kapjuk, hogy az összes szereplő függvények $\mathcal{C}^\infty$-beliek.

Annak bizonyításához, hogy a sűrűségfüggvény megoldások mindenütt pozitívak, a 3. paragrafus általános Steinhaus-típusú tételeit fogjuk felhasználni. Szükségünk lesz egy lemmára.

22.5. Lemma. *Legyen $L:\mathbb{R}^{r_e}\times\ldots\times\mathbb{R}^{r_n}\to\mathbb{R}^m$ egy lineáris transzformáció, a nullterét jelölje N. Jelölje p_i a*

$$p_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=x_i,\qquad x_i\in\mathbb{R}^{r_i}\quad(1\le i\le n)$$

összefüggéssel definiált

$$p_i:\mathbb{R}^{r_e}\times\ldots\times\mathbb{R}^{r_n}\to\mathbb{R}^{r_i}$$

projekciót. Legyen $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$. A $\dim(N) = r - m$ és $p_i(N) = \mathbb{R}^{r_i}$, ha $1 \le i \le n$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha $1 \le i \le n$ esetén az

$$L_i : (x_1, \dots , x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots , x_n) \mapsto L(x_1, \dots , x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots , x_n)$$

transzformáció rangja m.

Bizonyítás. A $\dim(N) = r-m$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rank}(L) = m$. Tegyük fel, hogy $\operatorname{rank}(L) = m$ és $p_i(N) = \mathbb{R}^{r_i}$, ha $1 \le i \le n$. Legyen $y \in \mathbb{R}^m$. Válasszuk úgy $x_1, \dots , x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots , x_n$-et, hogy

$$L(x_1, \dots , x_i, \dots , x_n) = y$$

teljesüljön. Mivel $x_i \in p_i(N)$, léteznek $x'_1, \dots , x'_{i-1}, x'_{i+1}, \dots , x'_n$ úgy, hogy

$$L(x'_1, \dots , x'_{i-1}, x_i, x'_{i+1}, \dots , x'_n) = 0.$$

Az $x''_j = x_j - x'_j$, ha $j \ne i$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$L(x''_1, \dots , x''_{i-1}, 0, x''_{i+1}, \dots , x''_n) = y,$$

azaz y benne van az L_i értékkészletében. Mivel y tetszőleges volt, $\operatorname{rank}(L_i) = m$.

Most tegyük fel, hogy $\operatorname{rank}(L_i) = m$, ha $1 \le i \le m$. Ebből következik, hogy $\operatorname{rank}(L) = m$ mivel $m \ge \operatorname{rank}(L) \ge \operatorname{rank}(L_i)$. Legyen $x_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ és

$$y = L(0, \dots , 0, -x_i, 0, \dots , 0).$$

Válasszunk $x_1, \dots , x_{i-1}, x_{i+1}, \dots , x_n$-t úgy, hogy

$$L_i(x_1, \dots , x_{i-1}, x_{i+1}, \dots , x_n) = y$$

teljesüljön. Ekkor $L(x_1, \dots , x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots , x_n) = 0$, azaz $p_i(N)$ tartalmazza x_i-t. Mivel x_i tetszőleges volt, $p_i(N) = \mathbb{R}^{r_i}$.

22.6. Tétel. *Legyenek f_i, $0 \le i \le n$ és g_j, $0 \le j \le k$ olyan sűrűségfüggvények, amelyek eleget tesznek a 22.1.(1) egyenletnek, amelyben a belső függvények a 22.1.(2)–(5) összefüggésekkel vannak definiálva. Ekkor f_i, $0 \le i \le n$ és g_j, $0 \le j \le k$ mindenütt pozitívak és $\mathcal{C}^\infty$-beliek.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy a függvények mindenütt pozitívak. Ez öt lépésben fog történni. Használni fogjuk a $\{f_0 = 0\} = \{\mathbf{y} \in \Delta_{n-1} : f_0(\mathbf{y}) = 0\}$ jelölést és az analóg $\{f_i = 0\}$, $\{f_i \ne 0\}$, $\{g_j = 0\}$, $\{g_j \ne 0\}$ jelöléseket.

I. Először azt mutatjuk meg, hogy a $\{f_i \ne 0\}$, $0 \le i \le k$ és $\{g_j \ne 0\}$, $0 \le j \le n$ halmazok tartalmaznak belső pontot. Mivel f_i, g_j nemnegatívak és Lebesgue-integráljuk 1, pozitívak egy pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmazon. Használjuk fel most a 3.13 megjegyzést.

Annak bizonyításához, hogy $\{g_0 \neq 0\}$ tartalmaz belső pontot, a 22.1.(1) szerint azt kell megmutatnunk, hogy ha $(y_1, \dots, y_{n-1})$ befutja a $\{f_0 \neq 0\}$ pozitív mértékű halmazt, $(z_{1,j}, \dots, z_{k-1,j})$ pedig befutja a $\{g_j \neq 0\}$ pozitív mértékű halmazt, akkor $(x_1, \dots, x_{k-1})$ befut egy nem üres nyílt halmazt. Ehhez a 3.13 megjegyzés szerint azt kell ellenőriznünk, hogy $(x_1, \dots, x_{k-1})$-nak az y-ok és z-k szerint vett (teljes) differenciáljának a rangja $k-1$, nulltere pedig „általános helyzetben van", abban az értelemben, ahogyan az a 3.13 megjegyzésben szerepel. Az előző lemma szerint ezen feltételek teljesülése következik

$$\det\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{s,t}}\right)_{i,s=1}^{k-1}\right) \neq 0 \qquad (1 \leq t \leq n)$$

fennállásából, amit viszont az előző tétel bizonyításában ellenőriztünk.

Hasonlóan, annak bizonyításához, hogy $\{f_i \neq 0\}$, $1 \leq i < k$ tartalmaz belső pontot, azt használhatjuk, hogy

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{i,j}}{\partial z_{i,t}}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) \neq 0$$

és

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y_t}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) \neq 0.$$

Végül annak bizonyításához, hogy $\{f_k \neq 0\}$ tartalmaz belső pontot, azt használhatjuk, hogy

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{k,j}}{\partial z_{i,t}}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) \neq 0 \qquad (1 \leq i < k)$$

és

$$\det\left(\left(\frac{\partial w_{k,j}}{\partial y_t}\right)_{j,t=1}^{n-1}\right) \neq 0.$$

Felhasználva az egyenlet szimmetriáját, az is következik, hogy a $\{f_0 \neq 0\}$ és $\{g_j \neq 0\}$, $1 \leq j \leq n$ halmazok is tartalmaznak belső pontot.

II. Tegyük fel, hogy az

$$(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Delta_{n-1}, \qquad (z_{1,j}, \dots, z_{k-1,j}) \in \Delta_{k-1}, \quad 1 \leq j \leq n$$

vektorok egyike rögzített, a többiek egy nyílt halmazban mozognak. Ekkor a vektor értékű

$$(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Delta_{k-1}$$

illetve

$$(w_{i,1}, \dots, w_{i,n-1}) \in \Delta_{n-1}, \qquad 1 \leq i \leq k$$

függvények, amelyeket a 22.1.(2)–(5) egyenletek definiálnak, ezt a nyílt halmazt egy nyílt halmazra képezik. Hasonlóan, ha az

$$(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Delta_{k-1}, \qquad (w_{i,1}, \dots, w_{i,n-1}) \in \Delta_{n-1}, \quad 1 \leq i \leq k$$

vektorok egyike rögzített, a többiek egy nyílt halmazban mozognak, akkor a vektor értékű

$$(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$$

illetve

$$(z_{1,j}, \dots, z_{k-1,j}) \in \Delta_{k-1}, \qquad 1 \le j \le n$$

függvények, amelyeket a 22.1.(8)–(11) összefüggések definiálnak, ezt a nyílt halmazt egy nyílt halmazra képezik.

Ennek bizonyításához először tegyük fel, hogy $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$ rögzített, és a z-k változnak egy nyílt halmazban. Megmutatjuk, hogy $(x_1, \dots, x_{k-1})$ ezt a nyílt halmazt egy nyílt halmazra képezi. Az értékkészlet egy tetszőleges pontjához válasszunk egy olyan $(z_{1,j}, \dots, z_{k-1,j})$, $1 \le j \le n$ vektorsorozatot, amelynek ez az adott pont a képe. Minden z-t rögzítve $z_{s,1}$, $1 \le s < k$ kivételével, és felhasználva, hogy (az előző tétel bizonyításában végzett számítások szerint) bármely $1 \le j \le n$-re a

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{s,j}} \right)_{i,s=1}^{k-1}$$

mátrix determinánsa nem nulla, az inverz függvény tételből kapjuk, hogy az értékkészlet adott pontja belső pont.

A többi eset is hasonlóan következik az előző tételben végzett számítások és az $f \leftrightarrow g$, $x \leftrightarrow y$, $z \leftrightarrow w$, $k \leftrightarrow n$, $i \leftrightarrow j$ cserékre vonatkozó szimmetria felhasználásával.

III. Most megmutatjuk, hogy a $\{g_j \neq 0\}$, $0 \le j \le n$ és $\{f_i \neq 0\}$, $0 \le i \le k$ halmazok nyíltak.

Tegyük fel, hogy $f_0(y_1, \dots, y_{n-1}) \neq 0$. Minden $1 \le j \le n$-re válasszunk egy $(z_{1,j}, \dots, z_{k-1,j})$ belső pontot $\{g_j \neq 0\}$-ból. Jelölje x_i, $1 \le i < k$ és $w_{i,j}$, $1 \le i \le k$, $1 \le j < n$ az y-okból és z-kből a 22.1.(2)–(5) összefüggések szerint számított értékeket. Rögzítve az y-okat és egy kis környezetben változtatva a z-ket, az egyenlet bal oldala nem nulla, így a jobb oldalon is minden tényező nullától különböző kell legyen. A II. lépés szerint ebből következik, hogy $(x_1, \dots, x_{k-1})$ belső pontja $\{g_0 \neq 0\}$-nak $(w_{i,1}, \dots, w_{i,n-1})$ pedig belső pontja $\{f_i \neq 0\}$-nak $(1 \le i \le k)$. Ezen pontok egyikét rögzítve, a többit változtatva, hasonlóan kapjuk, hogy $(y_1, \dots, y_{n-1})$ belső pontja $\{f_0 \neq 0\}$-nak. A többi eset hasonlóan tárgyalható.

IV. Most megmutatjuk, hogy a $\{g_j = 0\}$, $0 \le j \le n$ és $\{f_i = 0\}$, $0 \le i \le k$ halmazok is nyíltak.

Tegyük fel, hogy $f_0(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$. Minden $1 \le j \le n$-re válasszunk egy $(z_{1,j}, \dots, z_{k-1,j})$ pontot $\{g_j \neq 0\}$-ből. Jelölje ismét x_i, $1 \le i < k$ és $w_{i,j}$, $1 \le i \le k$, $1 \le j < n$ az y-okból és z-kből a 22.1.(2)–(5) egyenletek szerint számított értékeket. Mivel az egyenlet bal oldalán a szorzat nulla, a jobb oldalon álló tényezők közül is legalább az egyik nulla kell legyen. Tegyük fel, hogy $g_0(x_1, \dots, x_{k-1}) = 0$. Rögzítsük $(x_1, \dots, x_{k-1})$-et. Egy kis környezetben változtatva a w-ket, a folytonosság miatt a z-k közel maradnak az eredetihez, így a $\prod_{j=1}^{n} g_j$ szorzat nullától különböző marad. Mivel a jobb oldal nulla, f_0 nulla kell legyen. Mivel az x-ek közben befutják az eredetileg választott pont egy környezetét, az belső pontja $\{f_0 = 0\}$-nak. Az összes többi eset is hasonlóan tárgyalható.

V. Most már könnyen kapjuk a tétel állítását. A $\{g_j \neq 0\}$ halmaz nem üres nyílt részhalmaza Δ_{k-1}-nek. A $\{g_j = 0\}$ halmaz nyílt részhalmaza Δ_{k-1}-nek. Mivel Δ_{k-1} összefüggő, $\{g_j = 0\}$ üres kell legyen. Hasonlóan $\{f_i = 0\} = \emptyset$.

23.§ A Weierstrass-féle szigma-függvény jellemzése

23.1. Bevezetés. A harmincadik Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumon (1992, Oberwolfach) Wolfgang Sander a következő problémát vetette fel [146]:

Probléma. *Legyenek $f, g_1, g_2, h_1, h_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények. Tegyük fel, hogy f nem mindenütt nulla, és hogy g_1 és g_2 lineárisan függetlenek. Ha f, g_1, g_2, h_1, h_2 teljesítik az*

$$f(u+v)f(u-v) = g_1(u)h_1(v) + g_2(u)h_2(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

függvényegyenletet, bizonyítsuk be vagy cáfoljuk meg, hogy f mérhetőségéből következik f folytonossága.

Ez a kérdés tulajdonképpen egy, a Weierstrass-féle szigma-függvénynek addiciós tétel segítségével történő jellemzésére vonatkozó kérdés. Folytonosság feltételezése mellett Mario Bonk adott ilyen jellemzést habilitációs dolgozatában és azt [27] dolgozatában publikálta. Őt Aczél János “The state of the second part of Hilbert’s fifth problem” című [10] áttekintő dolgozata motiválta. Ebben a dolgozatban Aczél az Abel által vizsgált függvényegyenleteket tárgyalja. Hilbert ötödik problémájának második felében idézi Abel függvényegyenletekkel kapcsolatos munkáit azzal a megjegyzéssel, hogy érdekes lenne megkapni Abel eredményeit differenciálhatósági feltételek nélkül. Aczél összefoglalja az Abel által vizsgált egyenletekkel kapcsolatban azóta elért eredményeket. Az

$$f(u+v)f(u-v) = f(u)^2 g(v)^2 - f(v)^2 g(u)^2, \tag{2}$$

$$g(u+v)g(u-v) = g(u)^2 g(v)^2 - c^2 f(u)^2 f(v)^2 \tag{3}$$

egyenletekkel kapcsolatban azt írja, hogy[1] „Abel ezt az egyenletrendszert legfeljebb negyedrendű differenciálegyenletekre vezette vissza, természetesen (négyszeri) differenciálhatóság feltételezése mellett, azaz, mivel komplex

[1] “Abel reduced this system to differential equations of up to fourth order, of course under supposition of differentiability (of fourth order), that is, since the functions are complex, of analyticity. Haruki [50] has found, also by reduction to differential equations of at most fourth order, the general (in fourth order) differentiable solutions of (2) *alone. The general continuous solution* either of (2) alone or of the system (2), (3) for all $u, v \in \mathbb{C}$ is not known (to me); even less are those under regularity conditions weaker than continuity or on subsets of $\mathbb{C}^2$.”

függvényekről van szó, analitikusság feltételezésével. Haruki [50], szintén legfeljebb negyedrendű differenciálegyenletekre történő visszavezetéssel, meghatározta az *egyedül csak (2)-nek* eleget tévő (négyszer) differenciálható megoldásokat. Az egyedül csak (2)-t vagy a (2), (3) rendszert minden $u, v \in \mathbb{C}$-re kielégítő *általános folytonos megoldások* nem ismertek (számomra); még kevésbé a folytonosságnál gyengébb regularitási feltételt kielégítő vagy a $\mathbb{C}^2$ részhalmazain tekintett megoldások."

Bonk [27] dolgozatában az

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

függvényegyenletet, illetve annak speciális esetét, az

$$f(u+v)f(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

egyenletet vizsgálta. A függvények komplex értékűek. Bebizonyított egy regularitási tételt, azt, hogy (4) minden folytonos f_1, f_2, g_i, h_i megoldása lineárisan független g_i és h_i függvényekkel (egyértelműen) kiterjeszthető egy $\mathbb{C}^n$-en értelmezett analitikus függvénnyé úgy, hogy a kiterjesztések eleget tesznek (4)-nek $\mathbb{C}^n$-en. Felhasználva ezt az eredményt, Bonk meghatározta (5) minden folytonos megoldását a $k \leq 2$ esetben. Természetesen, speciális esetként megkapható (2) illetve (3), és a (2), (3) rendszer minden folytonos megoldása is.

Vizsgálataiban Bonk Fourier-transzformációt és speciális becsléseket használ. Durván szólva, regularitási tétele azon múlik, hogy a (4) egyenlet megoldásai „renormálhatók" úgy, hogy a végtelenben exponenciálisan eltűnő függvényekké válnak, és egy ilyen f megoldás Fourier-transzformáltja egy ugyancsak (4) típusú egyenletet teljesít. A Fourier-transzformált Laplace-transzformáltja adja a kiterjesztést $\mathbb{C}^n$-re. A $k \leq 1$ eset elemi. A $k \leq 2$ esetben a megoldások komplex függvénytani eszközökkel határozhatók meg.

1992-ben Richard Rochberg és Lee A. Rubel [136] más módszerekkel meghatározták a (4) egyenlet analitikus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ megoldásait a $k \leq 2$ esetben. Két megoldást is adtak. Első módszerük a függvényegyenletet differenciálegyenletre vezeti vissza, a második az egyenlet speciális szimmetriáit használja. (Mindkét esetben néhány megoldást nem vettek észre.)

Végül Bonk 1997-ben [28] dolgozatában meghatározta a (4) egyenlet folytonos megoldásait a $k \leq 2$ esetben.

Ennek a paragrafusnak a célja egyrészt, hogy megmutassuk, eredményeinkből következik, hogy minden mérhető és nem majdnem mindenütt nulla (f_1, f_2) megoldása (4)-nek $\mathcal{C}^\infty$-ben van. Speciálisan, Sander fent említett problémáját is megoldjuk. Másrészt, megmutatjuk, hogy differenciálegyenletekre történő visszavezetéssel is megkaphatók a Bonk fent említett dolgozataiban szereplő eredmények. Így Bonk, valamint Rochberg és Rubel tételeinek általánosítását kapjuk, általános módszerek felhasználásán nyugvó bizonyítással. Ez a módszer tehát a Hilbert ötödik problémája második felében kijelölt utat követi.

A regularitás bizonyítása korábbi regularitási tételeink mellett az 1994-ben a [82] dolgozatban megjelent, itt 11.5 tételként szereplő eredményen, valamint az 1.22 átviteli elven múlik. Ezzel a módszerrel megmutatható az is, hogy az

$$(6)\qquad f_1(G_1(u,v))f_2(G_2(u,v)) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad (u,v)\in D\subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

egyenlet nem majdnem mindenütt nulla f_1, f_2 megoldásai $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak. Az adott G_1, G_2 függvényeknek néhány gyenge feltételnek kell eleget tenni, például az $x = G_1(u,v), \quad y = G_2(u,v)$ egyenletrendszernek u, v-re feloldhatónak kell lennie. (Bonk módszere ebben az esetben már nem működik.) Bár módszerünkkel még ennél jóval általánosabb egyenletek is vizsgálhatók, itt az egyszerűség kedvéért csak a (4) egyenlet vizsgálatára szorítkozunk. A differenciálegyenletek levezetésében és megoldásában Rochberg és Rubel dolgozatára támaszkodtunk, bár a különbségek lényegesek, hiszen nekünk komplex változós közönséges differenciálegyenletek analitikus megoldásai helyett több valós változótól függő komplex értékű függvényekre vonatkozó parciális differenciálegyenlet-rendszerek $\mathcal{C}^\infty$ megoldásait kell megkeresnünk.

Megjegyezzük még, hogy John A. Baker [22] dolgozatában 1974-ben meghatározta az

$$(7)\qquad f_1(x)f_2(y) = \prod_{i=1}^{k} g_i(a_i x + b_i y), \quad x, y\in\mathbb{R}$$

egyenlet nem majdnem mindenütt nulla komplex értékű f_1, f_2 megoldásait. Eredményei megadják (4) megoldását az $n = 1$, $k = 1$ speciális esetben.

23.2. Megjegyzés. Mint már ismert, Sandernek az előző pontban szereplő problémájára a válasz negatív, azaz f mérhetőségéből nem következik f folytonossága. Ezt a következő egyszerű példa mutatja:

Legyen $f = h_1 = h_2 = \xi_{\mathbb{Q}}$, a racionális számok halmazának karakterisztikus függvénye, legyen g_1 tetszőleges, és legyen $g_2 = \xi_{\mathbb{Q}} - g_1$. Ekkor 23.1(1) teljesül, mivel

$$\xi_{\mathbb{Q}}(u+v)\xi_{\mathbb{Q}}(u-v) = \xi_{\mathbb{Q}}(u)\xi_{\mathbb{Q}}(v).$$

Az $f(x) = x\xi_{\mathbb{Q}}(x)$, $g_1(u) = u^2\xi_{\mathbb{Q}}(u)$, $g_2(u) = -\xi_{\mathbb{Q}}(u)$, $h_1(v) = \xi_{\mathbb{Q}}(v)$, $h_2(v) = v^2\xi_{\mathbb{Q}}(v)$ példában nem csak g_1 és g_2, hanem h_1 és h_2 is lineárisan függetlenek.

Ezek a példák azon múlnak, hogy a $\{x : f(x)\neq 0\}$ halmaz nulla mértékű részcsoportja $\mathbb{R}$-nek. Hasonló példák konstruálhatók a valós számok más nulla mértékű részcsoportját használva a racionális számok helyett. $\mathbb{R}^n$-en ezekből könnyen kaphatunk olyan példákat, amelyeknél a függvények csak egy változótól függnek.

Ezek az egyszerű példák azt mutatják, hogy Sander problémájára akkor várhatunk pozitív választ, ha feltesszük, hogy f nem majdnem mindenütt nulla. Ezt a módosított kérdést az alábbi tétel megválaszolja.

23.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények teljesítik az*

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletet, továbbá, hogy f_1, f_2 mérhetőek és nem majdnem mindenütt nullák. Ekkor f_1, f_2 folytonosak.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy g_i, h_i lineárisan függetlenek (ha nem, helyettesítsük a g_i, h_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ függvényrendszert egy kevesebb függvényből álló rendszerrel). A g_i függvények lineáris függetlensége miatt minden h_i függvény kifejezhető mint a $v \mapsto f_1(u_j + v)f_2(u_j - v)$ leképezések lineáris kombinációja, ahol u_j, $1 \le j \le k$ rögzített vektorok. Így f_1 és f_2 mérhetőségéből következik a h_i függvények mérhetősége. Hasonlóan következik a g_i függvények mérhetősége. Új $x = u + v$ és $y = u - v$ változókat vezetve be, azt kapjuk, hogy

$$f_1(x)f_2(y) = \sum_{i=1}^{k} g_i\Big(\frac{x+y}{2}\Big)h_i\Big(\frac{x-y}{2}\Big), \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Válasszunk olyan pozitív mértékű Y kompakt halmazt, amelyre $f_2(y) \neq 0$, ha $y \in Y$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f_1(x) = \frac{1}{f_2(y)} \sum_{i=1}^{k} g_i\Big(\frac{x+y}{2}\Big)h_i\Big(\frac{x-y}{2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in Y. \tag{2}$$

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Legyen X egy kompakt környezete x_0-nak. $D = X \times Y$ választással, a g_i függvényekhez az $(X+Y)/2$, a h_i függvényekhez pedig az $(X-Y)/2$ kompakt halmaz választva értelmezési tartománynak a Lebesgue-mértékkel, alkalmazhatjuk a 8.1 tételt, és kapjuk, hogy f_1 folytonos x_0-ban. Mivel x_0 tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy f_1 mindenütt folytonos. Hasonlóan kapjuk, hogy f_2 is mindenütt folytonos.

Figyeljük meg, hogy tulajdonképpen csak azt használtuk fel, hogy f_2 nem majdnem mindenütt nulla, f_1 pedig nem mindenütt nulla.

23.4. Megjegyzés. Hasonló regularitási tétel nem marad igaz a sokkal általánosabb

$$\prod_{j=1}^{m} f(a_j u + b_j v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \qquad u, v \in \mathbb{R}^n$$

egyenletre, még ha $n = 1$, akkor sem. Legyen a bal oldal

$$f(a_1u + b_1v)f(a_2u + b_2v)f(a_3u + b_3v),$$

legyen f egy tetszőleges mérhető függvény, amely nulla a $]1, 2[$ intervallumon kívül, és legyen $a_1 = b_1 = a_2 = 1$, $b_2 = b_3 = -1$, $a_3 = 3$ és $g_i \equiv h_i \equiv 0$. Ekkor, ha $x = u+v \in]1, 2[$ és $y = u-v \in]1, 2[$, azt kapjuk, hogy $a_3u+b_3v = x + 2y \in]3, 6[$, így a szorzat mindig nulla.

23.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények kielégítik az*

$$f_1(u + v)f_2(u - v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletet, továbbá, hogy f_1, f_2 mérhetőek és nem majdnem mindenütt nullák. Ekkor az f_1, f_2 függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint f_1 és f_2 folytonosak. Ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, feltehetjük, hogy a g_i és h_i függvények lineárisan függetlenek. Úgy mint ott, kifejezve őket f_1 és f_2 segítségével, és visszaírva a kapott kifejezést az egyenletbe, azt kapjuk, hogy léteznek olyan $c_{i,j}$ komplex konstansok és $u_i, v_j \in \mathbb{R}^n$ vektorok, hogy

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i,j=1}^{k} c_{i,j}f_1(u_i+v)f_2(u_i-v)f_1(u+v_j)f_2(u-v_j), \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Most $x = u + v$ és $y = u - v$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(y) = \sum_{i,j=1}^{k} c_{i,j}f_1\Big(u_i + \frac{x-y}{2}\Big)f_2\Big(u_i - \frac{x-y}{2}\Big) \\ f_1\Big(\frac{x+y}{2} + v_j\Big)f_2\Big(\frac{x+y}{2} - v_j\Big), \end{aligned} \tag{1}$$

ha $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ha most $f_1 = f_2 = f$, akkor egyszerűen alkalmazhatjuk az 1.27 tételt. Nevezetesen, választva egy Y korlátos nyílt halmazt, amelyen f nem nulla, és egy K felső korlátját az összes u_i, v_i és $y \in Y$ vektorok halmazának, az 1.27 tétel feltételei teljesülnek az

$$f(x) = \frac{1}{f(y)} \sum_{i,j=1}^{k} c_{i,j}f\big(u_i+\frac{x-y}{2}\big)f\big(u_i-\frac{x-y}{2}\big)f\big(\frac{x+y}{2}+v_j\big)f\big(\frac{x+y}{2}-v_j\big),$$

$x \in X$, $y \in Y$ függvényegyenletre, ahol X az origó körüli $5K$ sugarú nyílt gömb, a C kompakt halmaz pedig az origó körüli $4K$ sugarú zárt gömb.

Innen az f függvény $\mathcal{C}^\infty$-ben van X-en, és mivel K tetszőleges nagy lehet, $\mathbb{R}^n$-en mindenütt.

Lehetséges lenne az általános esetet erre a speciális esetre redukálni, felhasználva Bonk [27] eredményeit, amelyek az egyenlet speciális alakján múlnak. E helyett használhatjuk a 1.22 általános átviteli elvet is, hogy a fenti, két ismeretlen függvényt tartalmazó egyenlet regularitásának problémáját egy egyetlen ismeretlen függvényt tartalmazó egyenlet regularitási problémájára redukáljuk. Ez utóbbi, általánosabb módszert fogjuk használni.

Válasszunk Y_1 és Y_2 korlátos nyílt halmazokat úgy, hogy f_1 nem nulla Y_1-en és f_2 nem nulla Y_2-n. Új változókat vezetve be, és $X_1 = X_2$-t az origó középpontú $5K$ sugarú nyílt gömbnek választva, ahol K egy felső korlátja az összes u_i, v_i, $y \in Y_1$ és $y \in Y_2$ vektorok normáinak, az (1) egyenletből az alábbi függvényegyenlet-rendszert kapjuk:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1) = \frac{1}{f_2(y_1)} \sum_{i,j=1}^{k} & c_{i,j} f_1\big(u_i + \frac{x_1 - y_1}{2}\big) f_2\big(u_i - \frac{x_1 - y_1}{2}\big) \\
& f_1\big(\frac{x_1 + y_1}{2} + v_j\big) f_2\big(\frac{x_1 + y_1}{2} - v_j\big), \\
f_2(x_2) = \frac{1}{f_1(y_2)} \sum_{i,j=1}^{k} & c_{i,j} f_1\big(u_i + \frac{x_2 - y_2}{2}\big) f_2\big(u_i - \frac{x_2 - y_2}{2}\big) \\
& f_1\big(\frac{x_2 + y_2}{2} + v_j\big) f_2\big(\frac{x_2 + y_2}{2} - v_j\big),
\end{aligned}
$$

ahol $x_1 \in X_1$, $y_1 \in Y_2$, $x_2 \in X_2$ és $y_2 \in Y_1$. Legyen most $X = X_1 \times X_2$ és legyen f az $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ összefüggéssel definiálva, ahol $x = (x_1, x_2)$. Az átviteli elv alapján f — megfelelően választott D értelmezési tartománnyal és G_i, H függvényekkel — eleget tesz egy

$$
f(x) = H(f(G_0(y)), f(G_1(x,y)), \ldots, f(G_{4k}(x,y))), \quad (x,y) \in D
$$

függvényegyenletnek, ahol $y = (y_1, y_2)$. Valóban, legyen $Y = Y_2 \times Y_1$, $D = X \times Y$, $G_0(y_1, y_2) = (y_2, y_1)$, és ha $1 \le i \le k$, legyen

$$
\begin{aligned}
G_i(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \big(u_i + \frac{x_1 - y_1}{2}, u_i - \frac{x_2 - y_2}{2}\big), \\
G_{k+i}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \big(u_i + \frac{x_2 - y_2}{2}, u_i - \frac{x_1 - y_1}{2}\big), \\
G_{2k+i}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \big(\frac{x_1 + y_1}{2} + v_i, \frac{x_2 + y_2}{2} - v_i\big), \\
G_{3k+i}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \big(\frac{x_2 + y_2}{2} + v_i, \frac{x_1 + y_1}{2} - v_i\big).
\end{aligned}
$$

Továbbá, legyen $H = (H_1, H_2)$, ahol H_1 és H_2 megfelelően választott komplex értékű többváltozós függvények (esetleg néhány változótól nem függnek).

Most legyen $C_1 = C_2$ az origó középontú, $4K$ sugarú zárt gömb, és legyen $C = C_1 \times C_2$. Alkalmazva az 1.27 tételt, azt kapjuk, hogy az f függvény $\mathcal{C}^\infty$-ben van X-en. Ebből következik, hogy az f_1 és f_2 függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak az origó középpontú, $5K$ sugarú nyílt gömbön. Mivel K tetszőleges nagy lehet, az f_1 és f_2 függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak.

Meg fogjuk mutatni, hogy a 23.1(4) függvényegyenlet megoldásai a $k = 2$ esetben Weierstrass-féle szigma-függvényekkel adhatók meg. Itt a Weierstrass-féle függvények legfontosabb tulajdonságait csak összefoglaljuk abban a formában, ahogyan felhasználjuk. A bizonyítások megtalálhatók Saks és Zygmund [139] klasszikus munkájában.

23.6. Weierstrass-függvények. Legyenek ω_1, ω_2 nullától különböző komplex számok, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Legyen $\Omega = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$. A *Weierstrass-féle szigma-függvény*t a

$$\sigma(z, \omega_1, \omega_2) = z \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

abszolút konvergens szorzat definiálja. σ a z változó egész függvénye, (egyszeres) gyökei Ω pontjai. Elfajult esetként érdemes tekinteni a

$$\sigma(z, \omega_1, \infty) = z \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) = \frac{\omega_1}{\pi} \sin(\pi z/\omega_1)$$

függvényt, ahol $\Omega = \omega_1\mathbb{Z}$, és a

$$\sigma(z, \infty, \infty) = z \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) = z$$

függvényt, ahol $\Omega = \{0\}$. Az ω_1, ω_2 párokat röviden *rácsállandó*knak fogjuk nevezni; tehát vagy $\omega_1 = \infty$ és $\omega_2 = \infty$, vagy $0 \neq \omega_1 \in \mathbb{C}$ és $\omega_2 = \infty$, vagy $0 \neq \omega_1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq \omega_2 \in \mathbb{C}$ és $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. A Weierstrass-féle függvények első változó szerinti deriváltját egyszerűen $'$-vel fogjuk jelölni. A definícióból világos, hogy bármilyen $\alpha \neq 0$ komplex számra

$$\sigma(\alpha z, \alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \alpha\sigma(z, \omega_1, \omega_2).$$

A *Weierstrass-féle ζ-függvény*t, mint a σ-függvény logaritmikus deriváltját definiáljuk:

$$\zeta(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma'(z, \omega_1, \omega_2)}{\sigma(z, \omega_1, \omega_2)}.$$

ζ meromorf függvény az első változóban, pólusai Ω pontjai. A speciális esetekben

$$\zeta(z, \infty, \infty) = \frac{1}{z}$$

és

$$\zeta(z, \omega_1, \infty) = \frac{\pi}{\omega_1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{\omega_1} z\right) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega}\right),$$

egyébként pedig

$$\zeta(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right).$$

Itt is a definíció alapján világos, hogy bármely $\alpha \neq 0$ komplex számra

$$\zeta(\alpha z, \alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \zeta(z, \omega_1, \omega_2)/\alpha.$$

A *Weierstrass-féle $\mathcal{P}$-függvény*t a

$$\mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2) = -\zeta'(z, \omega_1, \omega_2)$$

összefüggéssel definiáljuk. A speciális esetekben

$$\mathcal{P}(z, \infty, \infty) = \frac{1}{z^2}$$

és

$$\mathcal{P}(z, \omega_1, \infty) = \frac{\pi^2}{\omega_1^2 \sin^2(\pi z/\omega_1)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^2},$$

egyébként pedig

$$\mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

A $\mathcal{P}$-függvény az első változójában periódikus, Ω adja a periódusok halmazát. A definíció alapján bármely $\alpha \neq 0$ komplex számra

$$\mathcal{P}(\alpha z, \alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2)/\alpha^2.$$

A $\mathcal{P}$-függvények differenciálegyenleteit is használni fogjuk. A speciális esetekben fennállnak a

$$\mathcal{P}'(z, \infty, \infty)^2 = 4\mathcal{P}(z, \infty, \infty)^3,$$

illetve

$$\mathcal{P}'(z, \omega_1, \infty)^2 = 4\mathcal{P}(z, \omega_1, \infty)^3 - 4\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\mathcal{P}(z, \omega_1, \infty)^2$$

differenciálegyenletek, egyébként pedig a

$$\mathcal{P}'(z, \omega_1, \omega_2)^2 = 4\mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2)^3 - g_2\mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2) - g_3$$

differenciálegyenlet, ahol

$$g_2 = 60 \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{és} \quad g_3 = 140 \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \frac{1}{\omega^6}.$$

Belátható, hogy $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Megmutatható (lásd Saks és Zygmund [139], Ch. VIII, § 13), hogy ha $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, akkor mindig léteznek olyan ω_1, ω_2 végtelentől különböző rácsállandók, hogy hozzájuk éppen az adott g_2, g_3 konstansok tartoznak.

Az egységes jelölések kedvéért, ha $\omega_1 = \omega_2 = \infty$, akkor legyen $g_1 = g_2 = g_3 = 0$; ha $\omega_1 \neq \infty$, de $\omega_2 = \infty$, akkor legyen $g_1 = 4\pi^2/\omega_1^2$ és $g_2 = g_3 = 0$; egyébként pedig legyen $g_1 = 0$. Így mindig $g_1 = 0$ vagy $g_2 = g_3 = 0$, vagy mindkét összefüggés teljesül, de a $\mathcal{P}$-függvények diferenciálegyenlete egységesen

$$\mathcal{P}'(z,\omega_1,\omega_2)^2 = 4\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2)^3 - g_1\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2)^2 - g_2\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2) - g_3$$

alakba írható. Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{P}$-függvények a

$$\mathcal{P}''(z,\omega_1,\omega_2) = 6\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2)^2 - g_1\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2) - g_2/2$$

másodrendű differenciálegyenletet is kielégítik. A g_1, g_2, g_3 számokat *invariáns*oknak szokás nevezni, mivel csak Ω-tól függnek, de nem függnek ω_1, ω_2 megválasztásától.

Mivel a fenti első- illetve másodrendű differenciálegyenletek autonóm egyenletek, akármilyen $e \in \mathbb{C}$ eltolással a $\mathcal{P}(z+e,\omega_1,\omega_2)$ függvény ugyanazt a differenciálegyenletet elégíti ki, mint a $\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2)$ függvény.

A $\mathcal{P}$-függvények segítségével akármilyen (komplex függvényekre vonatkozó) $y'^2 = 4y^3 + c_1y^2 + c_2y + c_3$ differenciálegyenlet megoldásai is megkaphatók, mégpedig $\mathcal{P}(z+e,\omega_1,\omega_2)+c$ alakban, alkalmas ω_1, ω_2 rácsállandókkal és e, c komplex konstansokkal. Valóban, ha a $4y^3 + c_1y^2 + c_2y + c_3$ polinom e_1, e_2, e_3 zérushelyei mind különbözőek, akkor legyen $c = (e_1 + e_2 + e_3)/3 = c_1/12$, és vezessük be $y + c$ helyett az új $\tilde{y}$ változót. Ekkor alkalmas g_2, g_3 komplex konstansokkal, amelyekre $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$,

$$4\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right)^3 + c_1\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right)^2 + c_2\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right) + c_3 = 4\tilde{y}^3 - g_2\tilde{y} - g_3.$$

A megfelelő, végtelentől különböző ω_1, ω_2 rácsállandókkal és akármilyen $e \in \mathbb{C}$ eltolással $z \mapsto \mathcal{P}(z+e,\omega_1,\omega_2)+c$ eleget tesz az $y'^2 = 4y^3 + c_1y^2 + c_2y + c_3$ differenciálegyenletnek.

Ha a $4y^3 + c_1y^2 + c_2y + c_3$ polinom e_1, e_2, e_3 zérushelyei nem mind különböznek, akkor a speciális esetek adják a megoldást. Ha mindhárom zérushely egybeesik, akkor ismét a $c = (e_1 + e_2 + e_3)/3 = e_1 = e_2 = e_3 = c_1/12$ választás vezet célhoz. $y + c$ helyett bevezetve az új $\tilde{y}$ változót,

$$4\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right)^3 + c_1\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right)^2 + c_2\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right) + c_3 = 4\tilde{y}^3.$$

Ha csak két zérushely, mondjuk e_1 és e_2 egyezik meg, akkor legyen $c = (e_1 + e_2)/2 = e_1 = e_2$, ekkor $y + c$ helyett bevezetve az új $\tilde{y}$ változót,

$$4\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right)^3 + c_1\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right)^2 + c_2\left(\tilde{y} - \frac{c_1}{12}\right) + c_3 = 4\tilde{y}^3 - 4e_3\tilde{y}^2.$$

23.7. Lemma. *A fenti jelölésekkel, legyenek ω_1, ω_2 rácsállandók, g_1, g_2, g_3 a hozzájuk tartozó invariánsok, és tekintsük az*

$$y^2 = 4x^3 - g_1x^2 - g_2x - g_3$$

egyenletet. Ennek minden $(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $y \neq 0$ *megoldásához létezik olyan* $z \in \mathbb{C}$, *hogy*

$$\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2) = x \quad \textit{és} \quad \mathcal{P}'(z,\omega_1,\omega_2) = y.$$

Bármely két ilyen z *különbsége* Ω*-ban van.*

Bizonyítás. A bizonyítás az $\omega_2 \neq \infty$ esetre megtalálható Saks és Zygmund [139] könyvében, Ch. VIII. 14.5. Az $\omega_2 = \infty$ esetre direkt számolással bizonyítható a lemma.

23.8. Lemma. *23.6 jelöléseivel, tegyük fel, hogy valamely* c, $\tilde{c}$, $d \neq 0$, e, $\tilde{e}$ *komplex konstansokra és* ω_1, ω_2 *valamint* $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ *rácsállandókra*

$$\mathcal{P}(dx+e,\omega_1,\omega_2) + c = \mathcal{P}(dx+\tilde{e},\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2) + \tilde{c}$$

minden, a számegyenes egy nem üres nyílt intervallumából vett x*-re. Ekkor* ω_1, ω_2 *illetve* $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ *ugyanazt a* Ω *rácsot generálják, a*

$$z \mapsto \mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2) \quad \textit{és} \quad z \mapsto \mathcal{P}(z,\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2)$$

függvények megegyeznek, $c = \tilde{c}$, *és* $e - \tilde{e} \in \Omega$.

Bizonyítás. Jelölje Ω illetve $\tilde{\Omega}$ az ω_1, ω_2 illetve $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ által generált rácsot. A bal oldal a $\mathbb{C} \setminus (\Omega - e)/d$, a jobb oldal a $\mathbb{C} \setminus (\tilde{\Omega} - \tilde{e})/d$ nyílt halmazon analitikus, és megegyeznek a számegyenes egy szakaszán, így az analitikus folytatás elve szerint (lásd Dieudonné [39], 9.4.2) megegyeznek ezen nyílt halmazok metszetén. Azonban az $((\Omega - e) \cup (\tilde{\Omega} - \tilde{e}))/d$ halmaz csupa izolált pontot tartalmaz, így ennek minden pontja egyszerre pólusa mindkét oldalnak, azaz $(\Omega - e)/d = (\tilde{\Omega} - \tilde{e})/d$. Ebből $\Omega = \tilde{\Omega}$ és $e - \tilde{e} \in \Omega$. A $\mathcal{P}$-függvények összeg előállításából következik, hogy $z \mapsto \mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2)$ és $z \mapsto \mathcal{P}(z,\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2)$ megegyeznek. Mivel $e - \tilde{e}$ periódusa ennek a függvénynek, bármilyen x értékre, amelyre $dx + e$ nem pólus,

$$\mathcal{P}(dx+e,\omega_1,\omega_2) = \mathcal{P}(dx+\tilde{e},\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2),$$

így $c = \tilde{c}$.

23.9. Lemma. *23.6 jelöléseivel, tegyük fel, hogy* ω_1, ω_2 *valamint* $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ *rácsállandók, és a megfelelő* g_i *illetve* $\tilde{g}_i$ *invariánsok megegyeznek, azaz* $g_1 = \tilde{g}_1$, $g_2 = \tilde{g}_2$ *és* $g_3 = \tilde{g}_3$. *Ekkor*

$$\mathcal{P}(z,\omega_1,\omega_2) = \mathcal{P}(z,\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2)$$

minden $z \in \mathbb{C}$*-re.*

Bizonyítás. Ha $g_2 = \tilde{g}_2 = 0$ és $g_3 = \tilde{g}_3 = 0$, akkor az állítás közvetlenül adódik $\mathcal{P}(z,\omega_1,\infty)$ definíciójából. Egyébként legyen e tetszőleges olyan valós szám, amelyre $y = \mathcal{P}'(e,\omega_1,\omega_2) \neq 0$ értelmezve van, és legyen $x = \mathcal{P}(e,\omega_1,\omega_2)$. Ekkor

$$y^2 = 4x^3 - g_1x^2 - g_2x - g_3,$$

így a 23.7 lemma szerint van olyan $\tilde{e} \in \mathbb{C}$, hogy

$$\mathcal{P}(\tilde{e}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = x \quad \text{és} \quad \mathcal{P}'(\tilde{e}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = y.$$

Ha s egy megfelelő „négyzetgyökvonás”, azaz a $z \mapsto z^2$ leképezés y egy alkalmas kis környezetére vett megszorításának az inverze, akkor

$$t \mapsto \mathcal{P}(t + e, \omega_1, \omega_2) \quad \text{és} \quad t \mapsto \mathcal{P}(t + \tilde{e}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$$

is eleget tesznek az

$$u' = s(4u^3 - g_1u^2 - g_2u - g_3)$$

differenciálegyenletnek és az $u(0) = x$ kezdeti feltételnek, így megyeznek az origó egy kis környezetéből vett t valós számokra. Így az előző lemma alkalmazható, és kapjuk az állítást.

23.10. Függvényegyenletek és szigma-függvények. Először is tegyünk néhány egyszerű észrevételt az

(1) $$f_1(u + v)f_2(u - v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v)$$

függvényegyenlet f_1, f_2, g_i, h_i, $1 \le i \le k$ megoldásaival kapcsolatban. Csak komplex értékű megoldásokat fogunk tekinteni, amelyek $\mathbb{K}^n$-en vannak értelmezve. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(2) *A $\mathbb{C}^n$-en értelmezett megoldások $\mathbb{R}^{2n}$-en értelmezett megoldásoknak is tekinthetők. Egy megoldás megszorítása egy $\mathbb{R}$ feletti altérre szintén megoldás az altéren, speciálisan $\mathbb{C}^n$-en értelmezett megoldások megszorítása $\mathbb{R}^n$-re is megoldás.*

(3) *Bármely $L : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ lineáris leképezésre $f_1 \circ L$, $f_2 \circ L$, $g_i \circ L$, $h_i \circ L$ megoldás $\mathbb{K}^m$-en.*

(4) *Bármely $c_1, c_2 \in \mathbb{K}^n$ konstansokra az $x \mapsto f_1(x + c_1)$, $y \mapsto f_2(y + c_2)$, $u \mapsto g_i(u + (c_1 + c_2)/2)$, $v \mapsto h_i(v + (c_1 - c_2)/2)$ eltoltak is megoldások.*

(5) *Ha $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$, $\tilde{g}_1$, $\tilde{h}_1$ a $k = 1$ speciális eset tetszőleges megoldásai, akkor $f_1\tilde{f}_1$, $f_2\tilde{f}_2$, $g_i\tilde{g}_1$ és $h_i\tilde{h}_1$ $(i = 1, \dots, k)$ is megoldások.*

(6) *Ha T tetszőleges komplex elemű $k \times k$-as invertálható mátrix, és T' a transzponáltja, akkor f_1, f_2, $\tilde{g}_i$ és $\tilde{h}_i$ is megoldások, ahol $g = (g_1, \dots, g_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k)$, $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k)$, $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_k)$ és $\tilde{g}(u) = T^{-1}g(u)$, $\tilde{h}(v) = T'h(v)$.*

A fenti transzformációk segítségével az (1) egyenlet egy megoldásából sok más megoldást kaphatunk. A $k = 1$ esetben az

(7) $$f_1(z) = f_2(z) = \exp(z^2), \qquad g_1(z) = h_1(z) = \exp(2z^2)$$

komplex változós, komplex értékű analitikus függvények megoldások. Ezekből a fenti transzformációkkal kaphatók az

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \exp(a_1 + L_1(x) + Q(x)), \\
f_2(y) &= \exp(a_2 + L_2(y) + Q(y))
\end{aligned} \tag{8}
$$

alakú $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ megoldások, ahol $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ konstansok, $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris formák, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pedig kvadratikus forma.

A $k = 2$ esetben ezekhez jön még az $\omega_1 \neq \infty$, $\omega_2 \neq \infty$ rácsállandók (lásd az előző pontot) esetén az

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= f_2(z) = \sigma(z, \omega_1, \omega_2), \\
g_1(z) &= h_2(z) = \sigma(z, \omega_1, \omega_2)^2, \\
g_2(z) &= -h_1(z) = \sigma(z, \omega_1, \omega_2)^2 \mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2)
\end{aligned} \tag{9}
$$

megoldás (lásd Saks-Zygmund [139], Ch. VIII. § 7), az $\omega_2 = \infty$ esetben, azaz ha ω, ∞ a rácsállandók, akkor pedig az

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= f_2(z) = \sigma(z, \omega, \infty), \\
g_1(z) &= h_2(z) = \sigma(z, \omega, \infty)^2, \\
g_2(z) &= -h_1(z) = \sigma'(z, \omega, \infty)^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

megoldás, valamint az

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \sigma(z, \omega, \infty), \\
f_2(z) &\equiv 1, \\
g_1(z) &= h_2(z) = \sigma(z, \omega, \infty), \\
g_2(z) &= h_1(z) = \sigma'(z, \omega, \infty)
\end{aligned} \tag{11}
$$

és az

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &\equiv 1, \\
f_2(z) &= \sigma(z, \omega, \infty), \\
g_1(z) &= h_2(z) = \sigma(z, \omega, \infty), \\
-g_2(z) &= h_1(z) = \sigma'(z, \omega, \infty)
\end{aligned} \tag{12}
$$

komplex változós, komplex értékű megoldások. Megjegyezzük, hogy mindezekben az esetekben a g_1, g_2 és a h_1, h_2 függvények is a komplex sík bármely pontjának bármely környezetében lineárisan függetlenek. Ezekből a fenti transzformációkkal kaphatók az

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \exp(a_1 + L_1(x) + Q(x))\sigma(L(x) + e_1, \omega_1, \omega_2), \\
f_2(y) &= \exp(a_2 + L_2(y) + Q(y))\sigma(L(x) + e_2, \omega_1, \omega_2)
\end{aligned} \tag{13}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \exp(a_1 + L_1(x) + Q(x))\sigma(L(x) + e_1, \omega, \infty), \\
f_2(y) &= \exp(a_2 + L_2(y) + Q(y))
\end{aligned} \tag{14}
$$

és

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \exp(a_1 + L_1(x) + Q(x)), \\
f_2(y) &= \exp(a_2 + L_2(y) + Q(y))\sigma(L(x) + e_2, \omega, \infty)
\end{aligned} \tag{15}
$$

alakú $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ megoldások, ahol ω_1, ω_2 illetve ω, ∞ rácsállandók, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$ konstansok, $L, L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris formák, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pedig kvadratikus forma. Megjegyezzük, hogy ha $L \not\equiv 0$, akkor a megfelelő g_1, g_2 és h_1, h_2 függvények is lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^n$ bármely pontjának bármely környezetében.

Fő eredményünk az lesz, hogy a (7)-ben illetve (9)–(12)-ben megadott komplex változós komplex értékű „alapmegoldásokból" a fenti transzformációkkal minden más megoldás megkapható. Pontosabban, a (8)-ban illetve (13)–(15)-ben megadott $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ párok adják $k = 2$ esetén az (1) függvényegyenlet minden olyan megoldását, amelyre f_1 és f_2 mérhetőek és egyik sem majdnem mindenütt nulla. (8)-ban illetve (13)–(15)-ben nem adtuk meg az f_1, f_2 párhoz tartozó g_i, h_i függvényeket, de ezek is könnyen meghatározhatók.

Egyébként, mint az alábbi, Gauchman és Rubel [45] dolgozatából származó lemma mutatja, az f_1, f_2 párhoz elég egyetlen g_i, h_i $i = 1, 2, \dots, k$ megoldásrendszert meghatározni, a többi könnyen megkapható. Mint a fentiekben láttuk, a számunkra érdekes $k = 2$ esetben egy ilyen g_1, g_2, h_1, h_2 függvényrendszer könnyen adódik, ha bebizonyítjuk, hogy f_1, f_2 a fent adott alakúak. A lemma jelentősége abban áll, hogy mutatja, a 23.1.(4) egyenlet megoldásánál az f_1, f_2 függvények meghatározására koncentrálhatunk.

Gauchmann és Rubel részletesen vizsgálták azokat az F függvényeket, amelyek előállíthatók

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u) h_i(v)$$

alakban, azaz bizonyos függvényterek tenzorszorzatának elemei. Vizsgálataikban elsősorban valós változós függvények tereinek tenzorszorzatára szorítkoztak, így a teljesség kedvéért a bizonyítást is megadjuk.

23.11. Lemma. *Legyenek U, V halmazok, $g_i : U \to \mathbb{C}$, $h_i : V \to \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, k)$ és $\tilde{g}_i : U \to \mathbb{C}$, $\tilde{h}_i : V \to \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, \tilde{k})$ függvények, és tegyük fel, hogy a g_i $(i = 1, \dots, k)$, a h_i $(i = 1, \dots, k)$, a $\tilde{g}_i$ $(i = 1, \dots, \tilde{k})$, és a $\tilde{h}_i$ $(i = 1, \dots, \tilde{k})$ függvények is lineárisan függetlenek, továbbá*

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u) h_i(v)$$

és

$$F(u,v)=\sum_{i=1}^{\tilde{k}}\tilde{g}_i(u)\tilde{h}_i(v)$$

két reprezentációja az $F: U\times V\to\mathbb{C}$ függvénynek. Ekkor $\tilde{k}=k$ és létezik egy egyértelműen meghatározott $k\times k$ méretű komplex elemű invertálható T mátrix úgy, hogy $g=(g_1,\dots,g_k)$, $\tilde{g}=(\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_k)$, $h=(h_1,\dots,h_k)$ és $\tilde{h}=(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_k)$ jelölésekkel $\tilde{g}(u)=T^{-1}g(u)$ és $\tilde{h}(v)=T'h(v)$ minden $u\in U$, $v\in V$-re. Itt T' a T transzponáltja.

Bizonyítás. Mivel a h_i függvények lineárisan függetlenek, léteznek $v_j\in V$, $j=1,\dots,k$ pontok, hogy

$$\det((h_i(v_j))_{i,j=1}^k)\neq 0.$$

Ezeket behelyettesítve a

$$\sum_{i=1}^{k}g_i(u)h_i(v)=\sum_{i=1}^{\tilde{k}}\tilde{g}_i(u)\tilde{h}_i(v)$$

egyenlőségbe, egy lineáris egyenletrendszert kapunk a g_i függvényekre, amelynek determinánsa a fenti determináns. Így van olyan $k\times\tilde{k}$ méretű komplex elemű T mátrix, hogy $g(u)=T\tilde{g}(u)$. Mivel a g_i-k lineárisan függetlenek, következik, hogy $k\le\tilde{k}$, és a szimmetriát felhasználva, hogy $\tilde{k}\le k$, azaz $\tilde{k}=k$. Nyilván T invertálható kell legyen, mivel egyébként a megfelelő lineáris transzformáció képtere nem lehetne k dimenziós. Mivel

$$\sum_{i=1}^{k}g_i(u)h_i(v)=\sum_{i=1}^{k}\tilde{g}_i(u)\tilde{h}_i(v),$$

és így

$$\sum_{i=1}^{k}h_i(v)\sum_{j=1}^{k}t_{ij}\tilde{g}_j(u)=\sum_{j=1}^{k}\tilde{g}_j(u)\sum_{i=1}^{k}t_{ij}h_i(v)=\sum_{j=1}^{k}\tilde{g}_j(u)\tilde{h}_j(v)$$

minden $u\in U$, $v\in V$-re, következik, hogy $\tilde{h}(v)=T'h(v)$. Ha T_1 egy másik transzformáció, amelyre $g(u)=T_1\tilde{g}(u)$, akkor erre is $\tilde{h}(v)=T_1'h(v)$, és így $0=(T'-T_1')h(v)$, ami ellentmond a h_i függvények lineáris függetlenségének.

Az alábbi lemma tovább redukálja a megoldandó problémát. Durván szólva, azt mondja, hogy sokszor elég a megoldást lokálisan megkeresni, ekkor már meghatározható a teljes megoldás.

23.12. Lemma. *Legyenek* $f_1, f_2, g_i, h_i, \tilde{g}_i, \tilde{h}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, k)$ *függvények, tegyük fel, hogy a* g_i*,* h_i *függvények analitikusak, és van olyan* $\delta > 0$*, hogy*

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \tag{1}$$

ha $|u|, |v| < \delta$*. Tegyük fel, hogy bármely* $\varepsilon > 0$*-ra a* g_i*,* $i = 1, 2, \dots, k$ *függvények is, és a* h_i*,* $i = 1, 2, \dots, k$ *függvények is lineárisan függetlenek az origó* ε *sugarú környezetén. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{g}_i(u)\tilde{h}_i(v) \tag{2}$$

fennáll minden $u, v \in \mathbb{R}^n$*-re. Ekkor (1) fennáll mindenütt, és* f_1*,* f_2 *is analitikusak.*

Bizonyítás. Világos, hogy azon $0 < \delta \le \infty$ bővített valós számok között, amelyekre (1) teljesül minden $|u|, |v| < \delta$ esetén, van egy maximális. Azt kell megmutatnunk, hogy ez a maximális érték ∞. Tegyük fel indirekt, hogy nem ez a helyzet, és a maximális δ véges.

Megmutatjuk, hogy f_2 nem azonosan nulla az origó egyetlen környezetében sem. Ha ugyanis azonosan nulla lenne egy $\varepsilon \le 2\delta$ sugarú környezetben, akkor az (1) egyenletből $|u|, |v| < \varepsilon/2$ esetén azt kapnánk, hogy $0 = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v)$, ami ellentmond a g_i, h_i függvények lineáris függetlenségének. Új változókat írva az (1) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$f_1(x)f_2(y) = \sum_{i=1}^{k} g_i\Big(\frac{x+y}{2}\Big)h_i\Big(\frac{x-y}{2}\Big)$$

bármely olyan $x, y \in \mathbb{R}^n$ párra, amelyre $|x+y| < 2\delta$ és $|x-y| < 2\delta$ is fennáll. Rögzítsünk egy y_0-at, amelyre $f_2(y_0) \ne 0$. Mindkét oldalt osztva $f_2(y_0)$-al, azt kapjuk, hogy

$$f_1(x) = \frac{1}{f_2(y_0)} \sum_{i=1}^{k} g_i\Big(\frac{x+y_0}{2}\Big)h_i\Big(\frac{x-y_0}{2}\Big)$$

hacsak $|x| < 2\delta - |y_0|$. Ebből következik, hogy f_1 analitikus az origó $2\delta - |y_0|$ sugarú környezetén. Mivel $|y_0|$ tetszőlegesen kicsiny lehet, kapjuk, hogy f_1 analitikus az origó 2δ sugarú környezetén. Teljesen hasonlóan adódik, hogy f_2 is analitikus ezen a környezeten.

Most felhasználjuk a (2) egyenletet. Az előző lemmából következik, hogy $\tilde{g}_i$ és $\tilde{h}_i$ is lineárisan függetlenek az origó bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan v_j, $j = 1, \dots, k$ vektorokat, amelyekre $|v_j| < \varepsilon$ és $\det((h_i(v_j))_{i,j=1}^{k}) \ne 0$. Az

$$f_1(u+v_j)f_2(u-v_j) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{g}_i(u)\tilde{h}_i(v_j)$$

egyenletek teljesülnek minden $u \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, k$-ra. Ezeknek az egyenleteknek a segítségével bármely $\tilde{g}_j(u)$ kifejezhető $f_1(u+v_j)f_2(u-v_j)$ alakú tagok konstans együtthatós lineáris kombinációjaként. Ebből következik, hogy $\tilde{g}_i$ analitikus az origó $2\delta - \varepsilon$ sugarú nyílt környezetében. Mivel ε tetszőlegesen kicsinynek választható, minden $\tilde{g}_i$ analitikus az origó 2δ sugarú nyílt környezetében. Most ugyanúgy, mint az előző lépésben, következik, hogy f_1 és f_2 analitikusak az origó 4δ sugarú környezetében. Így az (1) egyenlet jobb- és baloldala is analitikus a

$$\{(u,v) : u, v \in \mathbb{R}^n, |u|, |v| < 2\delta\}$$

nyílt halmazon, és megegyeznek ennek a halmaznak a

$$\{(u,v) : u, v \in \mathbb{R}^n, |u|, |v| < \delta\}$$

részhalmazán. Az analitikus folytatás elve szerint (lásd Dieudonné [39], 9.4.2) az (1) egyenlet teljesül, ha $|u|, |v| < 2\delta$. Ez ellentmond δ maximális voltának, azaz beláttuk, hogy $\delta = \infty$.

23.13. Determinánsok. Legyen

$$F(u,v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \qquad \text{ha } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Legyenek továbbá $\Lambda_u^0, \dots, \Lambda_u^k$ tetszőleges, a g_i függvényeket tartalmazó valamely (lineáris) függvénytéren értelmezett lineáris funkcionálok. Az alsó index jelzi, hogy a funkcionál az u változóban hat, a felső index pedig egy egyszerű sorszám. A funkcionálok tetszőlegesek, például egy függvényhez hozzárendelhetik egy adott pontban felvett értékét, valamely adott parciális vagy irány menti deriváltjának értékét egy adott pontban (minden funkcionál ugyanabban a pontban, vagy különböző pontokban), ezek valamely lineáris kombinációját, stb. Hasonlóan, legyenek $\Lambda_v^0, \dots, \Lambda_v^k$ a v változóban ható lineáris funkcionálok, amelyek egy, a h_i függvényeket tartalmazó lineáris téren hatnak. A $v \mapsto \Lambda_u^j F(u,v)$, $j = 0, 1, \dots, k$ függvények a h_i függvények lineáris kombinációi, így nem lehetnek lineárisan függetlenek. Léteznek tehát olyan c_j nem mind nulla konstansok, hogy $\sum_{j=0}^k c_j \Lambda_u^j F(u,v) = 0$. Alkalmazva erre az összefüggésre a Λ_v^i lineáris funkcionálokat, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{k} c_j \Lambda_v^i \Lambda_u^j F(u,v) = 0, \qquad \text{ha } i = 0, \dots, k.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\det \left(\Lambda_v^i \Lambda_u^j F(u,v)\right)_{i,j=0}^k = 0.$$

Ezt az összefüggést fogjuk arra felhasználni, hogy differenciálegyenletet kapjunk az 23.1.(4) egyenletben szereplő f_1, f_2 függvényekre.

23.14. Differenciálegyenlet. Az előző pont jelöléseit fogjuk használni. Vizsgáljuk meg először az egyszerűbb egydimenziós $n = 1$ esetet. Hogy egyszerűbb jelöléseket kapjunk, jelölje egy f függvény parciális deriváltjait f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv}, stb. Legyenek u és v rögzített elemek. Ekkor a $\Lambda_u^0(g) = g(u)$, $\Lambda_u^1(g) = g'(u)$, $\Lambda_u^2(g) = g''(u)$, $\Lambda_v^0(h) = h(v)$, $\Lambda_v^1(h) = h'(v)$, $\Lambda_v^2(h) = h''(v)$ választással azt kapjuk, hogy

$$\det\begin{pmatrix} F & F_u & F_{uu} \\ F_v & F_{uv} & F_{uuv} \\ F_{vv} & F_{uvv} & F_{uuvv} \end{pmatrix} = 0.$$

Csak az az eset érdekes számunkra, amikor $F(u, v) \neq 0$. Jelölje ln az exp függvény $|\Im(z)| < \pi$ sávra való megszorításának inverzét. Tegyük fel, hogy $F(u_0, v_0) \neq 0$. Ekkor az origó egy környezetében értelmezve van a $G(u, v) = \ln(F(u + u_0, v + v_0)/F(u_0, v_0))$ függvény, és itt

$$F(u + u_0, v + v_0) = F(u_0, v_0) \exp(G(u, v)).$$

A determináns könnyen felírható G segítségével is. Kiemelve a közös tényezőket, az első sor, illetve az első oszlop alkalmas többszöröseit kivonva a többi sorból illetve oszlopból, azt kapjuk, hogy

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{uv} & 2G_uG_{uv} + G_{uuv} \\ 0 & 2G_{uv}G_v + G_{uvv} & * \end{pmatrix} = 0,$$

ahol $* = 4G_uG_vG_{uv} + 2G_uG_{uvv} + 2G_vG_{uuv} + 2G_{uv}^2 + G_{uuvv}$. Most a második sor, illetve oszlop alkalmas többszörösét levonva a harmadikból, azt kapjuk, hogy

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{uv} & G_{uuv} \\ 0 & G_{uvv} & 2G_{uv}^2 + G_{uuvv} \end{pmatrix} = 0,$$

azaz, hogy

$$2G_{uv}^3 + G_{uv}G_{uuvv} - G_{uuv}G_{uvv} = 0.$$

23.15. Parciális differenciálegyenlet. Hasonló egyenletet kívánunk levezetni az összes $n \geq 1$ esetre is. Itt is az előző két pontban használt jelöléseket alkalmazzuk. Ha $u_1, u_2, \ldots$ irányok (tetszőleges, nem feltétlenül 1 hosszú vektorok), jelöljék egy f függvény irány menti deriváltjait

$$f_{u_1}, f_{u_2}, \ldots, f_{u_1u_1}, f_{u_1u_2}, \ldots .$$

Hasonlóan eljárva mint fent, rögzítve az u és v pontokat, és tetszőleges $u_1, u_2, \ldots$ valamint $v_1, v_2, \ldots$ irányok szerinti irány menti deriváltakat használva, $\Lambda_u^0(g) = g(u)$, $\Lambda_u^1(g) = g_{u_1}(u)$, $\Lambda_u^2(g) = g_{u_2u_3}(u)$, $\Lambda_v^0(h) = h(v)$, $\Lambda_v^1(h) = h_{v_1}(v)$, $\Lambda_v^2(h) = h_{v_2v_3}(v)$ választással azt kapjuk, hogy az

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{u_1v_1} & G_{u_2}G_{u_3v_1} + G_{u_3}G_{u_2v_1} + G_{u_2u_3v_1} \\ 0 & G_{v_2}G_{u_1v_3} + G_{v_3}G_{u_1v_2} + G_{u_1v_2v_3} & ** \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa nulla, ahol

$$\begin{aligned} ** =&G_{u_2}G_{v_2}G_{u_3v_3} + G_{u_2}G_{v_3}G_{u_3v_2} + G_{u_3}G_{v_2}G_{u_2v_3} + G_{u_3}G_{v_3}G_{u_2v_2} \\ &+ G_{u_2}G_{u_3v_2v_3} + G_{u_3}G_{u_2v_2v_3} + G_{v_2}G_{u_2u_3v_3} + G_{v_3}G_{u_2u_3v_2} \\ &+ G_{u_2v_2}G_{u_3v_3} + G_{u_2v_3}G_{u_3v_2} + G_{u_2u_3v_2v_3}. \end{aligned}$$

A determinánst kifejtve, egy parciális differenciálegyenletet kaphatunk, ami azonban sokkal bonyolultabb, mint az $n = 1$ esetben kapott egyenlet. Hogy egyszerűsítsük, keressünk további összefüggéseket. $\Lambda_u^0(g) = g(u)$, $\Lambda_u^1(g) = g_{u_1}(u)$, $\Lambda_u^2(g) = g_{u_2}(u)$, $\Lambda_v^0(h) = h(v)$, $\Lambda_v^1(h) = h_{v_1}(v)$, $\Lambda_v^2(h) = h_{v_2}(v)$ választással hasonlóan, mint fent, azt kapjuk, hogy

$$G_{u_1v_1}G_{u_2v_2} = G_{u_1v_2}G_{u_2v_1}. \tag{2}$$

Ezt felhasználva, a $\Lambda_u^0(g) = g(u)$, $\Lambda_u^1(g) = g_{u_1}(u)$, $\Lambda_u^2(g) = g_{u_2}(u)$, $\Lambda_v^0(h) = h(v)$, $\Lambda_v^1(h) = g_{v_1}(v)$, $\Lambda_v^2(h) = h_{v_2v_3}(v)$ választással azt kapjuk, hogy

$$G_{u_1v_1}G_{u_2v_2v_3} = G_{u_2v_1}G_{u_1v_2v_3}, \tag{3}$$

és hasonlóan, $\Lambda_u^0(g) = g(u)$, $\Lambda_u^1(g) = g_{u_1}(u)$, $\Lambda_u^2(g) = g_{u_2u_3}(u)$, $\Lambda_v^0(h) = h(v)$, $\Lambda_v^1(h) = h_{v_1}(v)$, $\Lambda_v^2(h) = h_{v_2}(v)$ választással pedig, hogy

$$G_{u_1v_1}G_{u_2u_3v_2} = G_{u_1v_2}G_{u_2u_3v_1}. \tag{4}$$

Ezeket az összefüggéseket felhasználva, az (1) mátrix determinánsának kifejtésével kapott egyenlet lényegesen egyszerűsödik, és azt kapjuk, hogy

$$2G_{u_1v_1}G_{u_2v_2}G_{u_3v_3} + G_{u_1v_1}G_{u_2u_3v_2v_3} - G_{u_1v_2v_3}G_{v_1u_2u_3} = 0. \tag{5}$$

Most $x = u + v$, $y = u - v$ helyettesítéssel, $H(x) = \ln(f_1(x + x_0)/f_1(x_0))$, $K(y) = \ln(f_2(y + y_0)/f_2(y_0))$ jelöléssel valamint $u_1 = e_1$, $v_1 = e_1'$, $u_2 = e_2$, $v_2 = e_2'$, $u_3 = e_3$, $v_3 = e_3'$ választással, ahol $e_1, e_1', e_2, e_2', e_3, e_3'$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^n$-ből, azt kapjuk, hogy az origó valamely környezetéből vett x, y esetén fennállnak az alábbi parciális differenciálegyenletek (vegyük észre, hogy $G(u, v) = H(x) + K(y)$, ha $F(u, v) = f_1(u + v)f_2(u - v)$):

$$\begin{aligned} &(H_{e_1e_1'}(x) - K_{e_1e_1'}(y))(H_{e_2e_2'}(x) - K_{e_2e_2'}(y)) \\ &\quad = (H_{e_1e_2'}(x) - K_{e_1e_2'}(y))(H_{e_2e_1'}(x) - K_{e_2e_1'}(y)), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &(H_{e_1e_1'}(x) - K_{e_1e_1'}(y))(H_{e_2e_2'e_3'}(x) + K_{e_2e_2'e_3'}(y)) \\ &\quad = (H_{e_2e_1'}(x) - K_{e_2e_1'}(y))(H_{e_1e_2'e_3'}(x)) + K_{e_1e_2'e_3'}(y)), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &(H_{e_1e_1'}(x) - K_{e_1e_1'}(y))(H_{e_2e_3e_2'}(x) - K_{e_2e_3e_2'}(y)) \\ &\quad = (H_{e_1e_2'}(x) - K_{e_1e_2'}(y))(H_{e_2e_3e_1'}(x)) - K_{e_2e_3e_1'}(y)), \end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&2(H_{e_1e_1'}(x)-K_{e_1e_1'}(y))(H_{e_2e_2'}(x)-K_{e_2e_2'}(y))(H_{e_3e_3'}(x)-K_{e_3e_3'}(y))\\
(9)\qquad &+(H_{e_1e_1'}(x)-K_{e_1e_1'}(y))(H_{e_2e_3e_2'e_3'}(x)+K_{e_2e_3e_2'e_3'}(y))\\
&-(H_{e_1e_2'e_3'}(x)+K_{e_1e_2'e_3'}(y))(H_{e_2e_3e_1'}(x)-K_{e_2e_3e_1'}(y))=0.
\end{aligned}
$$

Ezt az egyenletrendszert fogjuk megoldani, először lokálisan, majd globálisan. A következő három lemmában a lokális megoldásokat határozzuk meg, a globális megoldásokat a fő tételben keressük meg. A lemmákban a logikailag lehetséges eseteknek csak egy részét tárgyaljuk, a többi lehetséges esettel a fő tétel foglalkozik. A lemmák, ugyanúgy, mint a parciális differenciálegyenlet-rendszer levezetése, teljesen lokális természetűek, így az itt alkalmazott meggondolások a 23.1.(1) egyenlet, vagy más, hasonló egyenletek más tartományokon való megoldásánál is használhatók.

Első lépésként egy adott irány mentén keressük meg a megoldásokat.

23.16. Lemma: a differenciálegyenlet-rendszer megoldása egy irány mentén. *23.15 jelöléseit fogjuk használni az irány menti deriváltakra, 23.6 jelöléseit pedig a rácsállandókkal és $\mathcal{P}$-függvényekkel kapcsolatban. Legyen $f\in\mathbb{R}^n$ egy egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon>0$-ra a H és K függvények az origó $\mathbb{R}^n$-beli ε sugarú környezetén értelmezett komplex értékű $\mathcal{C}^\infty$ függvények, és $|x|,|y|<\varepsilon$ esetén eleget tesznek a 23.15 pontbeli (6)–(9) differenciálegyenleteknek. Ekkor*

(1) ha $H_{ff}(x)-K_{ff}(y)\neq 0$, $H_{fff}(x)\neq 0$ és $K_{fff}(y)\neq 0$, ha $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x|,|y|<\varepsilon$, akkor van olyan $0<\varepsilon'<\varepsilon$ és $0<\delta\le\varepsilon-\varepsilon'$, hogy valamely $c\in\mathbb{C}$-vel, ω_1,ω_2 rácsállandókkal, és e, $\tilde e$ az origó ε' sugarú környezetén értelmezett folytonos, komplex értékű függvényekkel minden $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x|,|y|<\varepsilon'$, $t,s\in\mathbb{R}$, $|t|,|s|<\delta$ esetén

$$H_{ff}(x+tf)=-\mathcal{P}(t+e(x),\omega_1,\omega_2)+c$$

és

$$K_{ff}(y+sf)=-\mathcal{P}(s+\tilde e(y),\omega_1,\omega_2)+c;$$

(2) ha $H_{ff}(x)-K_{ff}(y)\neq 0$, $H_{fff}(x)\neq 0$ és $K_{fff}(y)=0$, ha $x,y\in\mathbb{R}^n$ és $|x|,|y|<\varepsilon$, akkor van olyan $0<\varepsilon'<\varepsilon$ és $0<\delta\le\varepsilon-\varepsilon'$, hogy valamely $c\in\mathbb{C}$-vel, $\omega(x),\infty$ rácsállandókkal és az origó ε' sugarú környezetén értelmezett $e(x)$ komplex értékű függvénnyel minden $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x|,|y|<\varepsilon'$, $t,s\in\mathbb{R}$, $|t|,|s|<\delta$ esetén

$$H_{ff}(x+tf)=-\mathcal{P}(t+e(x),\omega(x),\infty)+c\quad\text{és}\quad K_{ff}(y+sf)=c;$$

(3) ha $H_{ff}(x)-K_{ff}(y)\neq 0$, $H_{fff}(x)=0$ és $K_{fff}(y)\neq 0$, ha $x,y\in\mathbb{R}^n$ és $|x|,|y|<\varepsilon$, akkor van olyan $0<\varepsilon'<\varepsilon$ és $0<\delta\le\varepsilon-\varepsilon'$, hogy valamely $c\in\mathbb{C}$-vel, $\omega(y),\infty$ rácsállandókkal és az origó ε' sugarú környezetén értelmezett, komplex értékű $e(y)$ függvénnyel minden $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x|,|y|<\varepsilon'$, $t,s\in\mathbb{R}$, $|t|,|s|<\delta$ esetén

$$H_{ff}(x+tf)=c\quad\text{és}\quad K_{ff}(y+sf)=-\mathcal{P}(s+e(y),\omega(y),\infty)+c;$$

(4) *ha $H_{fff}(x) = 0$ és $K_{fff}(y) = 0$, ha $x, y \in \mathbb{R}^n$ és $|x|, |y| < \varepsilon$, akkor valamely $c \in \mathbb{C}$-vel minden $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ esetén, ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x|, |y| < \varepsilon'$ és $|t|, |s| < \delta = \varepsilon - \varepsilon'$, akkor*

$$H_{ff}(x + tf) = c \quad \text{és} \quad K_{ff}(y + sf) = c.$$

Bizonyítás. Legyen $0 < \varepsilon'' < \varepsilon$ tetszőleges. Rögzített x és y esetén legyen $\mathcal{H}(t) = H_{ff}(x + tf)$ és $\mathcal{K}(s) = K_{ff}(y + sf)$. Ezzel a jelöléssel, $e_1 = e_2 = e_3 = e_1' = e_2' = e_3' = f$ választással a 23.15 (9) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$(5)\quad 2(\mathcal{H}(t) - \mathcal{K}(s))^3 - (\mathcal{H}'(t)^2 - \mathcal{K}'(s)^2) + (\mathcal{H}(t) - \mathcal{K}(s))(\mathcal{H}''(t) + \mathcal{K}''(s)) = 0,$$

ha $t, s \in \mathbb{R}$, $|t|, |s| < \varepsilon - \varepsilon''$.

Először az (1) esettel fogunk foglalkozni. $\mathcal{L}(t) = \mathcal{H}(t) - \mathcal{K}(0)$ jelöléssel $\mathcal{L}(0) \neq 0$ és $\mathcal{L}'(t) \neq 0$. Az (5) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$2\mathcal{L}(t)^3 - (\mathcal{L}'(t)^2 - \mathcal{K}'(0)^2) + \mathcal{L}(t)(\mathcal{L}''(t) + \mathcal{K}''(0)) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy az $\mathcal{L}$ függvény eleget tesz az

$$(6)\qquad \mathcal{L}''\mathcal{L} - \mathcal{L}'^2 + 2\mathcal{L}^3 + \mathcal{K}''(0)\mathcal{L} + \mathcal{K}'(0)^2 = 0$$

differenciálegyenletnek. Jól ismert módszerekkel ez a differenciálegyenlet az elsőrendű

$$(7)\qquad \mathcal{L}'^2 = -4\mathcal{L}^3 - 2C\mathcal{L}^2 + 2\mathcal{K}''(0)\mathcal{L} + \mathcal{K}'(0)^2$$

differenciálegyenletre redukálható, valamely C konstanssal. Ezen redukciós lépés pontossá tétele helyett meg fogjuk mutatni, hogy az

$$(8)\qquad \mathcal{L}(0) = \mathcal{L}_0 \neq 0, \qquad \mathcal{L}'(0) = \mathcal{L}_1 \neq 0$$

kezdeti feltételek mellett (6) és (7) lokálisan ekvivalensek. Pontosabban, (7) minden megoldása, amelyre $\mathcal{L}'$ sehol sem nulla, megoldása (6)-nak is. Megfordítva, (6) minden megoldásához, amely eleget tesz (8)-nak is, azzal az egyetlen C konstanssal, amelyre teljesül, hogy

$$(9)\qquad \mathcal{L}_1^2 = -4\mathcal{L}_0^3 - 2C\mathcal{L}_0^2 + 2\mathcal{K}''(0) + \mathcal{K}'(0)^2,$$

létezik $\mathbb{R}$-ben az origónak olyan környezete, amelyen a megoldás eleget tesz (7)-nek.

Tekintsük először (7) egy megoldását, amelynek deriváltja nem tűnik el. Differenciálva az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$2\mathcal{L}''\mathcal{L}' + 12\mathcal{L}'\mathcal{L}^2 - 2\mathcal{K}''(0)\mathcal{L}' = 4C\mathcal{L}'\mathcal{L}.$$

Mindkét oldalt osztva $2\mathcal{L}'$-vel és szorozva $\mathcal{L}$-el, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}''\mathcal{L} + 6\mathcal{L}^3 - \mathcal{K}''(0)\mathcal{L} = 2C\mathcal{L}^2.$$

$2C\mathcal{L}^2$-et kifejezve (7)-ből, és behelyettesítve ebbe az egyenletbe, kapjuk (6)-ot.

A megfordítás valamivel nehezebb. Nyilván egy és csak egy olyan C konstans létezik, amelyre fennáll a (9) összefüggés. Így az adott kezdeti feltételek mellett C egyértelműen meghatározott. Először megmutatjuk, hogy (6) megoldásai a (8) kezdeti feltételek mellett lokálisan egyértelműek abban az értelemben, hogy bármely két megoldáshoz van olyan környezete az origónak, amelyen egybeesnek. Mindkét megoldás a nulla egy-egy környezetén kielégíti az explicit

$$\mathcal{L}'' = \frac{\mathcal{L}'^2}{\mathcal{L}} - 2\mathcal{L}^2 - \mathcal{K}''(0) - \frac{\mathcal{K}'(0)^2}{\mathcal{L}} \tag{10}$$

egyenletet. Ennek az egyenletnek a (8) kezdőfeltételek mellett egy és csak egy teljes megoldása van. Így tehát a két megoldás a nulla egy környezetén meg kell egyezzen ezzel.

Most tekintsük (6) egy tetszőleges $\mathcal{L}$ megoldását, amely nem tűnik el. Az egyetlen, (9)-nek eleget tévő C konstanst választva, (7) bármely megoldása, amelynek deriváltja nem nulla sehol sem, és eleget tesz (8)-nak (van ilyen megoldás, mint alább látni fogjuk), megegyezik $\mathcal{L}$-el a nulla egy környezetében. Így $\mathcal{L}$ eleget tesz (7)-nek a nulla egy környezetében.

A következő lépés, hogy megoldjuk (7)-et a (8) kezdőfeltételek mellett. A Weierstrass-féle $\mathcal{P}$-függvényekről mondottak szerint (lásd 23.6) van olyan c_1 konstans, valamint ω_1 és ω_2 rácsállandók, hogy bármely $e \in \mathbb{C}$ konstansra a

$$t \mapsto -\mathcal{P}(t + e, \omega_1, \omega_2) + c_1$$

függvény eleget tesz a (7) egyenletnek, kivéve legfeljebb megszámlálható sok izolált $t \in \mathbb{R}$ pontot. A 23.7 lemma szerint az e komplex konstans megválasztható úgy, hogy a (8) kezdeti feltételek is teljesüljenek. Megjegyezzük, hogy e megválasztása csak a kezdeti feltételektől függ, és bár nem egyértelmű, de bármely két megfelelő e különbsége Ω-ban van. Mivel (6) és (7) lokálisan ekvivalensek, beláttuk, hogy van olyan $\delta > 0$, hogy valamely c konstanssal $|t| < \delta$ esetén

$$\mathcal{H}(t) = -\mathcal{P}(t + e, \omega_1, \omega_2) + c.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy vannak olyan $\tilde{c}$ és $\tilde{e}$ konstansok, $\tilde{\delta} > 0$, valamint $\tilde{\omega}_1$ és $\tilde{\omega}_2$ rácsállandók, hogy $|s| < \tilde{\delta}$ esetén

$$\mathcal{K}(s) = -\mathcal{P}(s + \tilde{e}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) + \tilde{c}.$$

Itt is $\tilde{e}$ csak a kezdeti feltételektől függ, és megválasztása $\tilde{\Omega}$ egy elemének hozzáadásától eltekintve egyértelmű.

Eddig meggondolásaink rögzített x és y esetén voltak érvényesek. Vizsgáljuk meg az eredmény függését x-től és y-tól. Ha mondjuk $y = 0$, akkor minden x-re, amelyre $|x| < \delta$, alkalmazhatjuk eddigi meggondolásainkat, és azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\omega_1(x), \omega_2(x)$ rácsállandók, $c(x)$ és $e(x)$ komplex konstansok, és $\delta(x) > 0$, hogy

$$H_{ff}(x+tf) = -\mathcal{P}(t+e(x), \omega_1(x), \omega_2(x)) + c(x), \quad \text{ha} \quad |t| < \delta(x).$$

Hasonlóan, léteznek olyan $\tilde{\omega}_1(y), \tilde{\omega}_2(y)$ rácsállandók, $\tilde{c}(y)$ és $\tilde{e}(y)$ komplex konstansok, és $\tilde{\delta}(y) > 0$, hogy

$$K_{ff}(y+sf) = -\mathcal{P}(s+\tilde{e}(y), \tilde{\omega}_1(y), \tilde{\omega}_2(y)) + \tilde{c}(y), \quad \text{ha} \quad |s| < \tilde{\delta}(y).$$

Meg fogjuk vizsgálni a paraméterek függését x-től illetve y-tól.

Legyen $g_i(x)$ az $\omega_1(x), \omega_2(x)$ segítségével, $\tilde{g}_i(y)$ pedig az $\tilde{\omega}_1(y), \tilde{\omega}_2(y)$ segítségével definiálva, $i = 1, 2, 3$ (lásd 23.6). A jelölések egyszerűsítésére nem fogjuk kiírni az x-től, illetve y-tól való függést. További rövidítésként legyen $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t+e, \omega_1, \omega_2)$ és $\tilde{\mathcal{P}}(s) = \mathcal{P}(s+\tilde{e}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$. A $\mathcal{P}$ és $\tilde{\mathcal{P}}$ függvények eleget tesznek a

$$\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_1\mathcal{P}^2 - g_2\mathcal{P} - g_3 \quad \text{és} \quad \mathcal{P}'' = 6\mathcal{P}^2 - g_1\mathcal{P} - g_2/2$$

illetve

$$\tilde{\mathcal{P}}'^2 = 4\tilde{\mathcal{P}}^3 - \tilde{g}_1\tilde{\mathcal{P}}^2 - \tilde{g}_2\tilde{\mathcal{P}} - \tilde{g}_3 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathcal{P}}'' = 6\tilde{\mathcal{P}}^2 - \tilde{g}_1\tilde{\mathcal{P}} - \tilde{g}_2/2$$

egyenleteknek. Helyettesítsünk vissza (5)-be, és használjuk fel a fenti összefüggéseket. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 =& 12(\tilde{c}-c)\mathcal{P}(t)\tilde{\mathcal{P}}(s) + (g_1 - \tilde{g}_1)\mathcal{P}(t)\tilde{\mathcal{P}}(s) \\ &+ 6(c-\tilde{c})^2(\tilde{\mathcal{P}}(s) - \mathcal{P}(t)) + (c-\tilde{c})\left(g_1\mathcal{P}(t) + \tilde{g}_1\tilde{\mathcal{P}}(s)\right) \\ &+ \frac{g_2 - \tilde{g}_2}{2}(\mathcal{P}(t) + \tilde{\mathcal{P}}(s)) + 2(c-\tilde{c})^3 + (c-\tilde{c})\frac{g_2+\tilde{g}_2}{2} + (g_3 - \tilde{g}_3). \end{aligned} \tag{11}$$

Differenciálva t szerint, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 = 12(\tilde{c}-c)\mathcal{P}'(t)\tilde{\mathcal{P}}(s) + (g_1 - \tilde{g}_1)\mathcal{P}'(t)\tilde{\mathcal{P}}(s) \\ - 6(c-\tilde{c})^2\mathcal{P}'(t) + (c-\tilde{c})g_1\mathcal{P}'(t) + \frac{g_2 - \tilde{g}_2}{2}\mathcal{P}'(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Differenciálva s szerint is, azt kapjuk, hogy

$$0 = 12(\tilde{c}-c)\mathcal{P}'(t)\tilde{\mathcal{P}}'(s) + (g_1 - \tilde{g}_1)\mathcal{P}'(t)\tilde{\mathcal{P}}'(s)$$

teljesül, ha $|t|$ és $|s|$ elég kicsi. Ez csak úgy lehetséges, ha

$$g_1 - \tilde{g}_1 = 12(c - \tilde{c}). \tag{13}$$

Visszahelyettesítve ezt (12)-be, azt kapjuk, hogy

$$0 = (g_1^2 - \tilde{g}_1^2 + 12g_2 - 12\tilde{g}_2)\mathcal{P}'(t),$$

ami csak úgy lehetséges, hogy ha

$$12(g_2 - \tilde{g}_2) = \tilde{g}_1^2 - g_1^2. \tag{14}$$

Ezt és (13)-at felhasználva, (11)-ből azt kapjuk, hogy

$$(g_1 - \tilde{g}_1)^3 + 36(g_1 - \tilde{g}_1)(g_2 + \tilde{g}_2) + 864(g_3 - \tilde{g}_3) = 0. \tag{15}$$

Megmutatjuk, hogy $\tilde{c} = c$, $\tilde{g}_1 = g_1$, $\tilde{g}_2 = g_2$ és $\tilde{g}_3 = g_3$ konstansok, amiből következik, hogy $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$ és $\tilde{\omega}_2 = \omega_2$ konstansnak választhatók.

Először azt mutatjuk meg, hogy nincs olyan x, y pár, hogy $\tilde{\omega}_2(y) = \infty$, de $\omega_2(x) \neq \infty$, vagy $\omega_2(x) = \infty$, de $\tilde{\omega}_2(y) \neq \infty$. A két eset tárgyalása hasonló, csak az elsővel foglalkozunk. Ha lenne ilyen pár, akkor, felhasználva, hogy $\tilde{g}_2 = \tilde{g}_3 = g_1 = 0$, a (14) egyenletből azt kapnánk, hogy $12g_2 = \tilde{g}_1^2$, így a (15) egyenletből az adódna, hogy $\tilde{g}_1^3 = 216g_3$. Ekkor azonban a $4z^3 - g_2z - g_3 = 0$ egyenletnek $-\tilde{g}_1/12$ (legalább) kétszeres gyöke lenne, ami ellentmond annak, hogy $\omega_2 \neq \infty$.

Tehát két eset maradt: vagy $\omega_2(x) = \tilde{\omega}_2(y) = \infty$ minden x, y-ra, vagy ez egyetlen x, y párra sem áll fenn. Az első esetben $g_2(x) = g_3(x) = 0 = \tilde{g}_2(y) = \tilde{g}_3(y)$ mindenütt, és így (15)-ből $g_1(x) = \tilde{g}_1(y)$ mindenütt, azaz mindkettő konstans, és megegyeznek. Ekkor a 23.9 lemma szerint $\omega_1 = \tilde{\omega}_1$ konstansnak választható. A második esetben $g_1(x) = 0 = \tilde{g}_1(y)$ mindenütt, és így (14)-ből $g_2(x) = \tilde{g}_2(y)$, (15)-ből pedig $g_3(x) = \tilde{g}_3(y)$ mindenütt. Így g_2 és $\tilde{g}_2$, illetve g_3 és $\tilde{g}_3$ konstansok és megegyeznek. Megint a 23.9 lemma szerint, $\omega_1 = \tilde{\omega}_1$ és $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$ konstansnak választható. Mindkét esetben (13)-ból $c(x)$ és $\tilde{c}(y)$ is konstansok és megegyeznek.

Most vizsgáljuk $e(x)$-et illetve $\tilde{e}(y)$-t. Mint említettük, $e(x)$ csak a $H_{ff}(x)$ és $H_{fff}(x)$ kezdőértékektől függ, és csak modulo Ω egyértelműen meghatározott. Tudjuk, hogy

$$H_{ff}(x) = -\mathcal{P}(e(x), \omega_1, \omega_2) + c$$

és

$$H_{fff}(x) = -\mathcal{P}'(e(x), \omega_1, \omega_2).$$

Legyen

$$X(x) = \mathcal{P}(e(x), \omega_1, \omega_2) \quad \text{és} \quad Y(x) = \mathcal{P}'(e(x), \omega_1, \omega_2).$$

Mivel a fenti összefüggések szerint az X és Y függvények kifejezhetők $H_{ff}(x)$ illetve $H_{fff}(x)$ segítségével is, így $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak. Az X és Y függvények kielégítik az $Y^2 = 4X^3 - g_1X^2 - g_2X - g_3$ egyenletet. Mivel az origóban Y nem nulla, az origó körül X egyértelműen meghatározza Y-t. Ugyanezen okból a $z \mapsto \mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2)$ leképezés invertálható $e(0)$ valamely környezetében.

Jelölje I az inverzét, és legyen $e^*(x) = I(c - H_{ff}(x))$. Az origó valamely környezetében fennáll, hogy

$$X(x) = \mathcal{P}(e^*(x), \omega_1, \omega_2).$$

Mivel X egyértelműen meghatározza Y-t, az origó valamely környezetében az is teljesül, hogy

$$Y(x) = \mathcal{P}'(e^*(x), \omega_1, \omega_2).$$

Ez viszont azt jelenti a 23.7 lemma szerint, hogy

$$e(x) - e^*(x) \in \Omega.$$

Így akár azt is feltehetjük, hogy $e \equiv e^*$, azaz feltehetjük, hogy $e \in \mathcal{C}^\infty$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\tilde{e} \in \mathcal{C}^\infty$ is feltehető.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy $\delta(x)$ és $\tilde{\delta}(y)$ az x-től illetve y-tól függetlennek és egyenlőnek választhatók. Válasszuk $\delta(x)$-et maximálisnak azon ε''-nél nem nagyobb δ' számok közül, amelyekre

$$H_{ff}(x + tf) = -\mathcal{P}(t + e(x), \omega_1, \omega_2) + c,$$

ha $|t| < \delta'$. Megmutatjuk, hogy ha $|x| < \varepsilon' = \varepsilon''/2$, akkor $\delta(x) \geq \varepsilon'$. Tegyük fel, hogy valamely x-re ez nem teljesül, például $\delta(x) < \varepsilon'$-höz tetszőlegesen közel van olyan $t > \delta(x)$, hogy

$$H_{ff}(x + tf) \neq -\mathcal{P}(t + e(x), \omega_1, \omega_2) + c.$$

(Az az eset, amikor ez $t < -\delta(x)$-re teljesül, hasonlóan kezelhető.) Bevezetve a $\tilde{t} = t - \delta(x)$, $\tilde{x} = x + \delta(x)f$ új változókat, azt kapjuk, hogy $H_{ff}(\tilde{x} + \tilde{t}f)$ és $-\mathcal{P}(\tilde{t} + e(x) + \delta(x), \omega_1, \omega_2) + c$ az origó egy bal oldali környezetében egybeesnek, de egyetlen jobb oldali környezetben sem azonosan egyenlőek. Mivel másrészt

$$H_{ff}(\tilde{x} + \tilde{t}f) = -\mathcal{P}(\tilde{t} + e(\tilde{x}), \omega_1, \omega_2) + c,$$

ha $|\tilde{t}| < \delta(\tilde{x})$, a 23.8 lemma szerint $e(\tilde{x}) - e(x) - \delta(x) \in \Omega$. Így viszont a nulla egy jobboldali környezetében is $H_{ff}(\tilde{x}+\tilde{t}f) = -\mathcal{P}(\tilde{t}+e(x)+\delta(x), \omega_1, \omega_2)+c$, ami ellentmondás.

Következő lépésként a (2) esettel foglalkozunk. Ebben az esetben $\mathcal{K}' \equiv 0$ és $\mathcal{K}'' \equiv 0$, és ugyanúgy mint az (1) esetben, azt kapjuk, hogy $\mathcal{L}$ eleget tesz az

$$\mathcal{L}'^2 = -4\mathcal{L}^3 - 2C\mathcal{L}^2 \tag{17}$$

egyenletnek a nulla egy környezetében, valamint a (8) kezdeti feltételeknek. A Weierstrass-féle $\mathcal{P}$-függvényekről mondottak szerint (lásd 23.6) van olyan c_1 konstans, valamint ω, ∞ rácsállandók, hogy bármely e konstansra a

$$t \mapsto -\mathcal{P}(t + e, \omega, \infty) + c_1$$

függvény eleget tesz a (17) egyenletnek, kivéve legfeljebb megszámlálható sok izolált $t \in \mathbb{R}$ pontot. Itt is a 23.7 lemma szerint az e komplex konstans megválasztható úgy, hogy a (8) kezdeti feltételek is teljesüljenek, továbbá e megválasztása csak a kezdeti feltételektől függ, és bár nem egyértelmű, de bármely két megfelelő e különbsége Ω-ban van. Ezzel beláttuk, hogy van olyan $\delta > 0$, hogy valamely c konstanssal $|t| < \delta$ esetén

$$\mathcal{H}(t) = -\mathcal{P}(t + e, \omega, \infty) + c.$$

Továbbá nyilván $\mathcal{K}(s) = \tilde{c}$ valamely konstansra, a nulla egy környezetében.

Vizsgáljuk meg az eredmény függését x-től és y-tól. Itt is azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\omega(x), \infty$ rácsállandók, $c(x)$ és $e(x)$ komplex konstansok, és $\delta(x) > 0$, hogy

$$H_{ff}(x + tf) = -\mathcal{P}(t + e(x), \omega(x), \infty) + c(x), \quad \text{ha} \quad |t| < \delta(x),$$

továbbá létezik olyan $\tilde{c}(y)$ komplex konstans és $\tilde{\delta}(y) > 0$, hogy

$$K_{ff}(y + sf) = \tilde{c}(y), \quad \text{ha} \quad |s| < \tilde{\delta}(y).$$

Itt is megvizsgáljuk a paraméterek függését x-től illetve y-tól.

Legyen $g_1(x)$ az $\omega(x), \infty$ segítségével definiálva (lásd 23.6-ot). A jelölések egyszerűsítésére nem fogjuk kiírni az x-től, illetve y-tól való függést. További rövidítésként legyen $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t + e, \omega, \infty)$. A $\mathcal{P}$-függvény eleget tesz a

$$\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_1\mathcal{P}^2 \quad \text{és} \quad \mathcal{P}'' = 6\mathcal{P}^2 - g_1\mathcal{P}$$

egyenletnek. Helyettesítsünk vissza (5)-be, és használjuk fel a fenti összefüggéseket. Azt kapjuk, hogy

$$0 = \left(g_1(c - \tilde{c}) - 6(c - \tilde{c})^2\right)\mathcal{P}(t) + 2(c - \tilde{c})^3. \tag{18}$$

Differenciálva t szerint, azt kapjuk, hogy

$$0 = \left(g_1(c - \tilde{c}) - 6(c - \tilde{c})^2\right)\mathcal{P}'(t).$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$g_1(c - \tilde{c}) = 6(c - \tilde{c})^2.$$

Visszahelyettesítve ezt (18)-ba, azt kapjuk, hogy $c(x) = \tilde{c}(y)$, ami csak úgy lehetséges, ha mindkettő ugyanaz a c konstans.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy $\delta(x)$ és $\tilde{\delta}(y)$ az x-től illetve y-tól függetlennek és egyenlőnek választhatók. Ez ugyanúgy végezhető a 23.8 lemma felhasználásával, mint az (1) esetben.

(3) bizonyítása teljesen hasonló (2) bizonyításához. Végül (4) triviálisan következik (5)-ből.

23.17. Lemma: összefüggés az iránymenti deriváltak között. *Az irány menti deriváltakra 23.15 jelöléseit fogjuk használni. Tegyük fel, hogy $\delta > 0$, e és f vektorok $\mathbb{R}^n$-ben, és H, K az $\mathbb{R}^n$ tér δ sugarú, origó középpontú nyílt gömbjén értelmezett, komplex értékű $\mathcal{C}^\infty$ függvények, amelyek eleget tesznek a 23.15 pont (6)–(9) differenciálegyenleteinek. Ekkor*

(1) *ha $H_{eee}(x)$, $K_{eee}(y)$ és $H_{ee}(x) - K_{ee}(y)$ nem nulla semmilyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x|, |y| < \delta$ esetén sem, akkor léteznek olyan d, c' és c'' komplex konstansok, hogy*

$$\begin{aligned}
&H_{ef}(x) = dH_{ee}(x) + c' \quad \text{és} \quad K_{ef}(y) = dK_{ee}(y) + c',\\
&H_{ff}(x) = d^2 H_{ee}(x) + c'' \quad \text{és} \quad K_{ff}(y) = d^2 K_{ee}(y) + c'',\\
&H_{fff}(x) = d^3 H_{eee}(x) \quad \text{és} \quad K_{fff}(y) = d^3 K_{eee}(y)
\end{aligned}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}^n$-re, amelyre $|x|, |y| < \delta$;

(2) *ha $H_{eee}(x)$ és $H_{ee}(x) - K_{ee}(y)$ nem nulla semmilyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x|, |y| < \delta$ esetén sem, de $K_{eee}(y) = 0$, ha $|y| < \delta$, akkor léteznek olyan d, c_{ee}, c_{ef} és c_{ff} komplex konstansok, hogy*

$$\begin{gathered}
K_{ee}(y) = c_{ee}, \quad K_{ef}(y) = c_{ef}, \quad K_{ff}(y) = c_{ff},\\
H_{ef}(x) - c_{ef} = d(H_{ee}(x) - c_{ee}),\\
H_{ff}(x) - c_{ff} = d^2(H_{ee}(x) - c_{ee}),\\
H_{fff}(x) = d^3 H_{eee}(x)
\end{gathered}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}^n$-re, amelyre $|x|, |y| < \delta$;

(3) *ha $K_{eee}(y)$ és $H_{ee}(x) - K_{ee}(y)$ nem nulla semmilyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x|, |y| < \delta$ esetén sem, de $H_{eee}(x) = 0$, ha $|x| < \delta$, akkor léteznek olyan d, c_{ee}, c_{ef} és c_{ff} komplex konstansok, hogy*

$$\begin{gathered}
H_{ee}(x) = c_{ee}, \quad H_{ef}(x) = c_{ef}, \quad H_{ff}(x) = c_{ff},\\
K_{ef}(y) - c_{ef} = d(K_{ee}(y) - c_{ee}),\\
K_{ff}(y) - c_{ff} = d^2(K_{ee}(y) - c_{ee}),\\
K_{fff}(y) = d^3 K_{eee}(y)
\end{gathered}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}^n$-re, amelyre $|x|, |y| < \delta$;

(4) *ha H_{eee}, H_{fff}, K_{eee} és K_{fff} is azonosan nullák az origó δ sugarú környezetén, akkor léteznek olyan c_{ee}, c_{ef} és c_{ff} komplex konstansok, hogy*

$$\begin{aligned}
H_{ee}(x) &= c_{ee} = K_{ee}(y),\\
H_{ef}(x) &= c_{ef} = K_{ef}(y),\\
H_{ff}(x) &= c_{ff} = K_{ff}(y)
\end{aligned}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}^n$-re, amelyre $|x|, |y| < \delta$.

Bizonyítás. Először néhány összefüggést vezetünk le a 23.15 pont (7)–(9) egyenleteiből. Írjuk fel a 23.15 (9) egyenletet mégegyszer, megcserélve e_1 és e_1', e_2 és e_2' valamint e_3 és e_3' szerepét, és vonjuk ki a két egyenletet egymásból. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\left(H_{e_1e_2'e_3'}(x)+K_{e_1e_2'e_3'}(y)\right)\left(H_{e_1'e_2e_3}(x)-K_{e_1'e_2e_3}(y)\right)\\&\quad=\left(H_{e_1'e_2e_3}(x)+K_{e_1'e_2e_3}(y)\right)\left(H_{e_1e_2'e_3'}(x)-K_{e_1e_2'e_3'}(y)\right).\end{aligned}$$

Ebből egyszerűsítve, majd felcserélve e_1 és e_1' szerepét, azt kapjuk, hogy

$$H_{e_1e_2e_3}(x)K_{e_1'e_2'e_3'}(y)=H_{e_1'e_2'e_3'}(x)K_{e_1e_2e_3}(y). \tag{5}$$

További hasznos összefüggéseket kaphatunk a 23.15 pont (7) és (8) egyenleteiből. (8)-ban e_3 helyére e_3'-at írva, e_1 és e_1' illetve e_2 és e_2' szerepét felcserélve, majd a kapott egyenletet hozzáadva (7)-hez, illetve kivonva azt (7)-ből, végül a kapott két egyenletben e_1' és e_2 szerepét felcserélve, azt kapjuk, hogy

$$\left(H_{e_1e_2}(x)-K_{e_1e_2}(y)\right)H_{e_1'e_2'e_3'}(x)=\left(H_{e_1'e_2}(x)-K_{e_1'e_2}(y)\right)H_{e_1e_2'e_3'}(x), \tag{6}$$

illetve

$$\left(H_{e_1e_2}(x)-K_{e_1e_2}(y)\right)K_{e_1'e_2'e_3'}(y)=\left(H_{e_1'e_2}(x)-K_{e_1'e_2}(y)\right)K_{e_1e_2'e_3'}(y). \tag{7}$$

Kezdjük (1) bizonyításával. $e_1=e_2=e_3=e_1'=e_2'=e$, $e_3'=f$ választással (5)-ből azt kapjuk, hogy

$$H_{eee}(x)K_{eef}(y)=H_{eef}(x)K_{eee}(y).$$

Mivel H_{eee} és K_{eee} se nulla sehol sem, azt kapjuk, hogy

$$\frac{K_{eef}(y)}{K_{eee}(y)}=\frac{H_{eef}(x)}{H_{eee}(x)}.$$

Ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha mindkét oldal megegyezik ugyanazzal a d konstanssal. Most (6)-ból

$$\begin{aligned}\left(H_{ef}(x)-K_{ef}(y)\right)H_{eee}(x)&=\left(H_{ee}(x)-K_{ee}(y)\right)H_{eef}(x)\\&=\left(H_{ee}(x)-K_{ee}(y)\right)dH_{eee}(x).\end{aligned}$$

Mindkét oldalt osztva H_{eee}-vel, és a kapott összefüggést átrendezve,

$$H_{ef}(x)-dH_{ee}(x)=K_{ef}(y)-dK_{ee}(y),$$

ami csak úgy állhat fenn, ha mindkét oldal ugyanaz a konstans. Végül a 23.15 pont (6) egyenletéből

$$\begin{aligned}&\left(H_{ff}(x)-K_{ff}(y)\right)\left(H_{ee}(x)-K_{ee}(y)\right)\\&\quad=\left(H_{ef}(x)-K_{ef}(y)\right)^2=d^2\left(H_{ee}(x)-K_{ee}(y)\right)^2.\end{aligned} \tag{9}$$

Mindkét oldalt osztva $H_{ee}(x)-K_{ee}(y)$-al, ugyanúgy, mint fent, kapjuk, hogy $H_{ff}(x)-d^2H_{ee}(x)$ és $K_{ff}(y)-d^2K_{ee}(y)$ ugyanaz a konstans. (1) utolsó két egyenlete (9) felhasználásával adódik.

(2) bizonyításához (5)-ből $e_1'=e_2'=e_3'=e$ választással kapjuk, hogy

$$H_{eee}(x)K_{e_1e_2e_3}(y)=H_{e_1e_2e_3}(x)K_{eee}(y).$$

Mivel a jobb oldal mindenütt nulla, $K_{e_1e_2e_3}$ azonosan nulla tetszőleges e_1, e_2, e_3 vektorokra. Speciálisan K_{ee}, K_{ef} és K_{ff} minden parciális deriváltja nulla, így konstansok. Jelölje ezeket a konstansokat rendre c_{ee}, c_{ef} és c_{ff}. Tekintsük a

$$\frac{H_{ef}(x)-c_{ef}}{H_{ee}(x)-c_{ee}}$$

függvény valamely g irány menti deriváltját. Ez

$$\frac{H_{efg}(x)\left(H_{ee}(x)-c_{ee}\right)-\left(H_{ef}(x)-c_{ef}\right)H_{eeg}(x)}{\left(H_{ee}(x)-c_{ee}\right)^2}.$$

A (6) összefüggésből $e_1=e_2=e_2'=e$, $e_1'=f$, $e_3'=g$ helyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló nulla. Ez azt jelenti, hogy bármely irány menti derivált nulla, azaz

$$\frac{H_{ef}(x)-c_{ef}}{H_{ee}(x)-c_{ee}}\equiv d$$

valamely d konstanssal. Ugyanúgy, mint az előző bekezdésben, kapjuk, hogy

$$H_{ff}(x)-c_{ff}=d^2\left(H_{ee}(x)-c_{ee}\right).$$

(3) bizonyítása (2) bizonyításával analóg.

Végül (4) bizonyításához 23.15 (9)-ből $e_1=e_2=e_3=e_1'=e_2'=e_3'=e$ választással adódik, hogy

$$2\left(H_{ee}(x)-K_{ee}(y)\right)^3=0,$$

amiből H_{ee} és K_{ee} konstansok és megegyeznek. Hasonlóan adódik, hogy H_{ff} és K_{ff} is konstansok és megegyeznek. A 23.15 (6) egyenletet felhasználva, úgy mint fent, kapjuk, hogy H_{ef} és K_{ef} szintén konstansok és megegyeznek.

23.18. Lemma: lokális megoldások. *Tegyük fel, hogy a H és K függvények az origó egy $\delta>0$ sugarú környezetén értelmezett komplex értékű $\mathcal{C}^\infty$ függvények és ott eleget tesznek a 23.15 pontbeli (6)–(9) parciális differenciálegyenleteknek, továbbá*

(1) bármely $1\le j\le n$ indexre, ∂_j^3H is és ∂_j^3K is vagy mindenütt nulla az adott környezetben, vagy sehol sem nulla az adott környezetben;

(2) bármely olyan j indexre, amelyre ∂_j^3H vagy ∂_j^3K nem nulla az adott környezetben, $\partial_j^2H(x)-\partial_j^2K(y)$ sehol sem nulla az adott környezetből vett bármely x-re és y-ra;

(3) van olyan j index, hogy vagy $\partial_j^3 H$ vagy $\partial_j^3 K$ vagy mindkettő nem nulla sehol sem az adott környezetben.

Ekkor az $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ jelölésekkel, valamint 23.6 jelöléseivel

(4) ha minden j-re vagy sem $\partial_j^3 H$ sem $\partial_j^3 K$ nem nulla sehol sem az adott környezetben, vagy mindkettő nulla mindenütt az adott környezetben, akkor valamely ω_1, ω_2 rácsállandókkal és $a, \tilde{a}, b_i, \tilde{b}_i, c, \tilde{c}, c_{i,j} = c_{j,i}, d_i, e, \tilde{e}$ komplex számokkal az origó valamely környezetében

$$H(x) = a + \sum_i b_i x_i + \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j + \ln\bigl(c\,\sigma(d_1 x_1 + \ldots + d_n x_n + e; \omega_1, \omega_2)\bigr)$$

és

$$K(y) = \tilde{a} + \sum_i \tilde{b}_i y_i + \sum_{i,j} c_{i,j} y_i y_j + \ln\bigl(\tilde{c}\,\sigma(d_1 y_1 + \ldots + d_n y_n + \tilde{e}; \omega_1, \omega_2)\bigr),$$

továbbá d_i pontosan akkor nulla, ha $\partial_i^3 H$ és $\partial_i^3 K$ nullák;

(5) ha minden j-re vagy $\partial_j^3 H$ sehol sem nulla, $\partial_j^3 K$ pedig mindenütt nulla az adott környezetben, vagy mindkettő mindenütt nulla az adott környezetben, akkor valamely ω, ∞ rácsállandókkal és $a, \tilde{a}, b_i, \tilde{b}_i, c, c_{i,j} = c_{j,i}, d_i, e, \tilde{e}$ komplex számokkal az origó egy környezetében

$$H(x) = a + \sum_i b_i x_i + \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j + \ln\bigl(c\,\sigma(d_1 x_1 + \ldots + d_n x_n + e; \omega, \infty)\bigr)$$

és

$$K(y) = \tilde{a} + \sum_i \tilde{b}_i y_i + \sum_{i,j} c_{i,j} y_i y_j,$$

továbbá d_i pontosan akkor nulla, ha $\partial_i^3 H$ nulla;

(6) ha minden j-re vagy $\partial_j^3 H$ mindenütt nulla, $\partial_j^3 K$ pedig sehol sem nulla az adott környezetben, vagy mindkettő nulla az adott környezetben mindenütt, akkor valamely ω, ∞ rácsállandókkal és $a, \tilde{a}, b_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}, c_{i,j} = c_{j,i}, d_i, e, \tilde{e}$ komplex számokkal az origó egy környezetében

$$H(x) = a + \sum_i b_i x_i + \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j$$

és

$$K(y) = \tilde{a} + \sum_i \tilde{b}_i y_i + \sum_{i,j} c_{i,j} y_i y_j + \ln\bigl(\tilde{c}\,\sigma(d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n + \tilde{e}; \omega, \infty)\bigr),$$

továbbá d_i pontosan akkor nulla, ha $\partial_i^3 K$ nulla;

(7) az (1), (2) (3) feltételek mellett lehetséges többi esetben nincs megoldás a nulla egyetlen környezetében sem.

Bizonyítás. Az előző lemma alapján világos, hogy ha van olyan j index, hogy $\partial_j^3 H$ sehol sem nulla, $\partial_j^3 K$ pedig azonosan nulla az adott környezetben, akkor $\partial_i^3 K$ minden $1 \le i \le n$-re azonosan nulla az adott környezetben. Hasonlóan, ha van olyan j index, hogy $\partial_j^3 K$ sehol sem nulla, $\partial_j^3 H$ pedig azonosan nulla az adott környezetben, akkor $\partial_i^3 H$ minden $1 \le i \le n$-re azonosan nulla az adott környezetben. Így csak a (4)–(6) pontokban megadott esetekben lehetséges megoldás az origó valamely környezetében, és ezzel (7)-et beláttuk.

(4)–(6) bizonyítása a dimenziószám szerinti indukcióval történik. Nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy azok az i indexek, amelyekre $\partial_i^3 H$ és $\partial_i^3 K$ azonosan nullák, mind nagyobbak, mint azok az indexek, amelyekre valamelyik vagy mindkettő nem nulla.

Kezdjük (4) bizonyításával. $n = 1$-re az állítás következik a 23.16 lemmából. Indukciós feltevésünk, hogy $n-1$-re teljesül az állítás, azaz léteznek olyan rácsállandók és olyan $a, \tilde{a}, b_i, \tilde{b}_i, c, \tilde{c}, c_{i,j} = c_{j,i}, d_i, e, \tilde{e}$, $(i, j < n)$ komplex számok, hogy a nulla egy környezetén

$$H(x) = a + \sum_{i<n} b_i x_i + \sum_{i,j<n} c_{i,j} x_i x_j + \ln\bigl(c\,\sigma(d_1 x_1 + \cdots + d_{n-1}x_{n-1} + e; \omega_1, \omega_2)\bigr) \tag{8}$$

és

$$K(y) = \tilde{a} + \sum_{i<n} \tilde{b}_i y_i + \sum_{i,j<n} c_{i,j} y_i y_j + \ln\bigl(\tilde{c}\,\sigma(d_1 y_1 + \cdots + d_{n-1}y_{n-1} + \tilde{e}; \omega_1, \omega_2)\bigr), \tag{9}$$

ha az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ standard bázisvektorok közül az első $n-1$ által kifeszített altérben vagyunk, valamint minden $i < n$-re teljesül, hogy $d_i = 0$ akkor és csak akkor, ha $\partial_i^3 H \equiv 0 \equiv \partial_i^3 K$.

A képletek tömörebbé tételére vezessük be az $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ és $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0)$ rövidítéseket.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor sem $\partial_n^3 H$, sem $\partial_n^3 K$ nem tűnik el. A 23.16 lemmából azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = -\mathcal{P}(x_n + e_1(x'), \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) + c_1 \tag{10}$$

és

$$\partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = -\mathcal{P}(y_n + \tilde{e}_1(y'), \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) + c_1 \tag{11}$$

elég kicsiny x', y', x_n és y_n esetén, ahol x_n, y_n valós számok, x' és y' pedig olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, amelyeknek utolsó koordinátája nulla.

A bizonyítás alapgondolata megmutatni, hogy van olyan d_n konstans és léteznek olyan $e_i(x_i, \ldots, x_{n-1})$ és $\tilde{e}_i(x_i, \ldots, x_{n-1})$ folytonos függvények, amelyekkel $d_n = D_i d_i$ valamint

$$e_i(x_i, \ldots, x_{n-1}) = \frac{d_i x_i}{d_n} + e_{i+1}(x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$$

és

$$\tilde{e}_i(y_i, \dots, y_{n-1}) = \frac{d_i y_i}{d_n} + \tilde{e}_{i+1}(y_{i+1}, \dots, y_{n-1}),$$

ha $i < n$. Vegyük észre, hogy e_n és $\tilde{e}_n$ konstansok.

Vizsgáljuk a kezdeti feltételeket. A 23.17 lemmából azt kapjuk, hogy $i < n$-re valamely D_i és c_i', c_i'' konstansokkal

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_n H(x) &= D_i \partial_i^2 H(x) + c_i' \quad \text{és} \quad \partial_i \partial_n K(y) = D_i \partial_i^2 K(y) + c_i', \\ \partial_n^2 H(x) &= D_i^2 \partial_i^2 H(x) + c_i'' \quad \text{és} \quad \partial_n^2 K(y) = D_i^2 \partial_i^2 K(y) + c_i'', \\ \partial_n^3 H(x) &= D_i^3 \partial_i^3 H(x) \quad \text{és} \quad \partial_n^3 K(y) = D_i^3 \partial_i^3 K(y) \end{aligned} \tag{12}$$

minden elég kicsiny x, y esetén. Az utolsó sorból következik, hogy $D_i \neq 0$. A $\partial_n^2 H$-ra kapott (10) összefüggést differenciálva x_n szerint, majd $x_n = 0$-t helyettesítve, és felhasználva (12) utolsó sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) &= -\partial_n^3 H(x') = -D_1^3 \partial_1^3 H(x') \\ &= D_1^3 d_1^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Másrészt, (10)-et és (12) második sorát felhasználva,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) - c_1 &= -\partial_n^2 H(x') = -D_1^2 \partial_1^2 H(x') - c_1'' \\ &= D_1^2 d_1^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega_1, \omega_2) - 2D_1^2 c_{11} - c_1'' \end{aligned} \tag{14}$$

is teljesül minden elég kicsiny x'-re. Az implicit függvény tétel szerint ebből következik, hogy bármely rögzített $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$-re az e_1 függvény folytonosan differenciálható függvénye x_1-nek. Differenciálva (14)-et x_1 szerint, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}'(e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \partial_1 e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\qquad = D_1^2 d_1^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Ebből felhasználva (13)-at, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &D_1^3 d_1^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega_1, \omega_2) \partial_1 e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\qquad = D_1^2 d_1^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

azaz $\partial_1 e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1/D_1$. Ez azt jelenti, hogy valamely $e_2(x_2, \dots, x_{n-1})$ folytonos függvénnyel $e_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_1/D_1 + e_2(x_2, \dots, x_{n-1})$. Bevezetve a $d_n = D_1 d_1$ jelölést, és visszahelyettesítve (14)-be, majd felhasználva a minden nullától különböző α komplex számra fennálló

$$\mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2)/\alpha^2 = \mathcal{P}(\alpha z, \alpha\omega_1, \alpha\omega_2)$$

összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(16)\quad &\mathcal{P}(d_1x_1/d_n + e_2(x_2,\dots,x_{n-1}),\tilde\omega_1,\tilde\omega_2) - c_1\\ &\quad = d_n^2\mathcal{P}(d_1x_1+\ldots+d_{n-1}x_{n-1}+e,\omega_1,\omega_2\big) - 2D_1^2c_{11} - c_1''\\ &\quad = \mathcal{P}(d_1x_1/d_n+\ldots+d_{n-1}x_{n-1}/d_n+e/d_n,\omega_1/d_n,\omega_2/d_n) - 2c_{11}D_1^2 - c_1''.\end{aligned}$$

Ebben az egyenletben $x_2,\dots,x_{n-1}$ helyére nullát helyettesítve, a 23.8 lemmából azt kapjuk, hogy $c_1 = 2c_{11}D_1^2 + c_1''$ és a $z \mapsto \mathcal{P}(z,\tilde\omega_1,\tilde\omega_2)$ függvény megegyezik a $z \mapsto \mathcal{P}(z,\omega_1/d_n,\omega_2/d_n)$ függvénnyel. Bevezetve a $c_{nn} = c_{11}D_1^2 + c_1''/2$ jelölést így (10)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\partial_n^2H(x'+x_nf_n)\\ (17)\qquad &\quad = 2c_{nn} - \mathcal{P}(x_n + d_1x_1/d_n + e_2(x_2,\dots,x_{n-1}),\omega_1/d_n,\omega_2/d_n)\\ &\quad = 2c_{nn} - d_n^2\mathcal{P}(d_1x_1 + d_ne_2(x_2,\dots,x_{n-1}) + d_nx_n,\omega_1,\omega_2),\end{aligned}$$

(14)-ből pedig, hogy

$$\begin{aligned}(18)\qquad &\mathcal{P}(d_1x_1 + d_ne_2(x_2,\dots,x_{n-1}),\omega_1,\omega_2)\\ &\qquad = \mathcal{P}(d_1x_1+\ldots+d_{n-1}x_{n-1}+e,\omega_1,\omega_2\big),\end{aligned}$$

végül (11)-ből, hogy

$$(19)\qquad \partial_n^2K(y'+y_nf_n) = 2c_{nn} - d_n^2\mathcal{P}(d_n\tilde e_1(y_1,\dots,y_{n-1}) + d_ny_n,\omega_1,\omega_2).$$

Az utóbbi egyenletben $y_n = 0$-t helyettesítve, és felhasználva (12) második sorát, valamint a $d_n = D_1d_1$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(20)\qquad &\mathcal{P}(d_n\tilde e_1(y_1,y_2,\dots,y_{n-1}),\omega_1,\omega_2)\\ &\qquad = \mathcal{P}(d_1y_1+\ldots+d_{n-1}y_{n-1}+\tilde e,\omega_1,\omega_2\big).\end{aligned}$$

Innen, rögzítve az $y_2,\dots,y_{n-1}$ változókat, az implicit függvény tételből azt kapjuk, hogy $\tilde e_1$ folytonosan differenciálható függvénye y_1-nek. Differenciálva y_1 szerint, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&d_n\mathcal{P}'(d_n\tilde e_1(y_1,y_2,\dots,y_{n-1}),\omega_1,\omega_2)\partial_1\tilde e_1(y_1,\dots,y_{n-1})\\ &\qquad = d_1\mathcal{P}'(d_1y_1+\ldots+d_{n-1}y_{n-1}+\tilde e,\omega_1,\omega_2).\end{aligned}$$

Másrészt, differenciálva (19)-et y_n szerint, majd $y_n = 0$-t helyettesítve, és felhasználva (12) utolsó sorát valamint az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&d_n^3\mathcal{P}'(d_n\tilde e_1(y_1,\dots,y_{n-1}),\omega_1,\omega_2) = -\partial_n^3K(y') = -D_1^3\partial_1^3K(y')\\ &\qquad = D_1^3d_1^3\mathcal{P}'(d_1y_1+\ldots+d_{n-1}y_{n-1},\omega_1,\omega_2\big).\end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve az előző egyenletbe az adódik, hogy

$$\tilde e_1(y_1,y_2,\dots,y_{n-1}) = d_1y_1/d_n + \tilde e_2(y_2,\dots,y_{n-1})$$

valamely folytonos $\tilde{e}_2$ függvénnyel, és így (19)-ből

$$\partial_n^2 K(y'+y_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2 \mathcal{P}(d_1 y_1 + d_n \tilde{e}_2(y_2, \ldots, y_{n-1}) + d_n y_n, \omega_1, \omega_2), \tag{21}$$

(20)-ból pedig

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(d_1 y_1 + d_n \tilde{e}_2(y_2, \ldots, y_{n-1}), \omega_1, \omega_2) \\ &\qquad = \mathcal{P}(d_1 y_1 + \ldots + d_{n-1} y_{n-1} + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Megjegyezzük, hogy ebben az egyenletben $y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0$-t, illetve a (18) egyenletben $x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$-t helyettesítve, a 23.8 lemma felhasználásával adódik, hogy $d_n e_2(0, \ldots, 0) - e$ illetve $d_n \tilde{e}_2(0, \ldots, 0) - \tilde{e}$ is az ω_1, ω_2 által generált Ω rács elemei.

Hasonlóan folytathatjuk. $x_n = 0$-t helyettesítve (17)-ben, felhasználva (12) második sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &d_n^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + d_n e_2(x_2, \ldots, x_{n-1}), \omega_1, \omega_2) - 2c_{nn} \\ &\qquad = -\partial_n^2 H(x') = -D_2^2 \partial_2^2 H(x') - c_2'' \\ &\qquad = D_2^2 d_2^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega_1, \omega_2) - 2 D_2^2 d_2^2 c_{22} - c_2''. \end{aligned} \tag{23}$$

Felhasználva (18)-at, ebből az egyenletből azt kapjuk, hogy $D_2 d_2 = d_n$. A (17) egyenletet differenciálva x_n szerint, majd $x_n = 0$-t helyettesítve, felhasználva (12) utolsó sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &d_n^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + d_n e_2(x_2, \ldots, x_{n-1}), \omega_1, \omega_2) \\ &\qquad = -\partial_n^3 H(x') = -D_2^3 \partial_2^3 H(x') \\ &\qquad = D_2^3 d_2^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega_1, \omega_2), \end{aligned} \tag{24}$$

azaz mivel $D_2 d_2 = d_n$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}'(d_1 x_1 + d_n e_2(x_2, \ldots, x_{n-1}), \omega_1, \omega_2) \\ &\qquad = \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{25}$$

(18) miatt bármely rögzített $x_3, \ldots, x_{n-1}$-re az implicit függvény tételből az e_2 függvény folytonosan parciálisan differenciálható x_2 szerint. Differenciálva (18)-at x_2 szerint azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &d_n \mathcal{P}'(d_1 x_1 + d_n e_2(x_2, \ldots, x_{n-1}), \omega_1, \omega_2) \partial_1 e_2(x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ &\qquad = d_2 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{26}$$

Ebből felhasználva (25)-öt az adódik, hogy

$$\partial_1 e_2(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}) = d_2 / d_n$$

mindenütt. Ez azt jelenti, hogy valamely folytonos $e_3(x_3, \ldots, x_{n-1})$ függvénnyel

$$e_2(x_2, \ldots, x_{n-1}) = d_2 x_2 / d_n + e_3(x_3, \ldots, x_{n-1}).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy valamely folytonos $\tilde{e}_3(y_3, \dots, y_{n-1})$ függvénnyel

$$\tilde{e}_2(y_2, \dots, y_{n-1}) = d_2 y_2 / d_n + \tilde{e}_3(y_3, \dots, y_{n-1}).$$

Indukcióval folytatva, végül azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n + d e_n, \omega_1, \omega_2)$$

és

$$\partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2 \mathcal{P}(d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n + d\tilde{e}_n, \omega_1, \omega_2).$$

Mivel, mint megmutattuk, $d_n e_n - e = d_n e_2(0, \dots, 0) - e$ és $d_n \tilde{e}_n - \tilde{e} = d_n \tilde{e}_2(0, \dots, 0) - \tilde{e}$ is elemei az Ω rácsnak, és Ω pontjai periódusok, az is teljesül, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n + e, \omega_1, \omega_2)$$

és

$$\partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2).$$

Most integráljuk ezeket az egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_n H(x' + x_n f_n) = {} & 2c_{nn} x_n + d_n \zeta(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n + e, \omega_1, \omega_2) \\ & + B_1(x_1, \dots, x_{n-1})\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\partial_n K(y' + y_n f_n) = {} & 2c_{nn} y_n + d_n \zeta(d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2) \\ & + \tilde{B}_1(y_1, \dots, y_{n-1}).\end{aligned}$$

A B_1 és $\tilde{B}_1$ függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak. Újra differenciálva x_1 illetve y_1 szerint, majd $x_n = 0$-t illetve $y_n = 0$-t helyettesítve, felhasználva (12) első sorát és a (8) és (9) kezdeti feltételeket, valamint, hogy $D_i d_i = d_n$, ha $i < n$, azt kapjuk, hogy $\partial_1 B \equiv \partial_1 \tilde{B}$ konstansok. A közös értéket $2c_{1,n}$-el jelölve, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_n H(x' + x_n f_n) = {} & 2c_{nn} x_n + d_n \zeta(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n + e, \omega_1, \omega_2) \\ & + 2c_{1,n} x_1 + B_2(x_2, \dots, x_{n-1})\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\partial_n K(y' + y_n f_n) = {} & 2c_{nn} y_n + d_n \zeta(d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2) \\ & + 2c_{1,n} y_1 + \tilde{B}_2(y_2, \dots, y_{n-1}).\end{aligned}$$

Indukcióval hasonlóan folytatva, végül azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_n H(x' + x_n f_n) = {} & 2c_{nn} x_n + d_n \zeta(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n + e, \omega_1, \omega_2) \\ & + 2c_{1,n} x_1 + \dots + 2c_{n-1,n} x_{n-1} + b_n\end{aligned}$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn} y_n + d_n \zeta(d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_n y_n + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2)$$
$$+ 2c_{1,n} y_1 + \cdots + 2c_{n-1,n} y_{n-1} + \tilde{b}_n.$$

Következő lépésként ezeket az egyenleteket integráljuk. Az indukciós feltevés miatt

$$\ln\bigl(c\,\sigma(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e, \omega_1, \omega_2)\bigr) \quad \text{és}$$
$$\ln\bigl(\tilde{c}\,\sigma(d_1y_1 + d_2y_2 + \cdots + d_ny_n + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2)\bigr)$$

értelmezve vannak az origó egy környezetében. Így az előző egyenletek integrálásával az adódik, hogy az origó egy kis gömbkörnyezetében

$$H(x' + x_n f_n) = \ln\bigl(c\,\sigma(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e, \omega_1, \omega_2)\bigr)$$
$$+ c_{nn}x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2c_{i,n}x_ix_n + b_nx_n + a_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

és

$$K(y' + y_n f_n) = \ln\bigl(\tilde{c}\,\sigma(d_1y_1 + d_2y_2 + \cdots + d_ny_n + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2)\bigr)$$
$$+ c_{nn}y_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2c_{i,n}y_iy_n + \tilde{b}_ny_n + \tilde{a}_1(y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Az $x_n = 0$ illetve $y_n = 0$ helyettesítéssel, felhasználva a (8) és (9) kezdeti feltételeket, azt kapjuk, hogy

$$a_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = a + \sum_{i<n} b_ix_i + \sum_{i,j<n} c_{ij}x_ix_j \quad \text{és}$$
$$\tilde{a}_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \tilde{a} + \sum_{i<n} \tilde{b}_iy_i + \sum_{i,j<n} c_{ij}y_iy_j.$$

Így kapjuk az állítást.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor $\partial_n^3 H$ és $\partial_n^3 K$ is nullák. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy $d_n = 0$ választással teljesül az állítás. A 23.16 lemmából azt kapjuk, hogy van olyan $c_1 \in \mathbb{C}$ konstans, hogy minden elég kicsi x', y', x_n és y_n esetén

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = c_1 \quad \text{és} \quad \partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = c_1.$$

Így $c_{nn} = c_1/2$ jelöléssel írhatjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn} \quad \text{és} \quad \partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}.$$

Vegyük észre, hogy minden $i < n$-re $\partial_i\partial_n H(x')$ és $\partial_i\partial_n K(y')$ ugyanaz a konstans; ha ugyanis $\partial_i^3 H$ és $\partial_i^3 K$ nem nullák, akkor fennállnak a (12) összefüggések, és (12) utolsó sorából $D_i = 0$, így az állítás következik (12) első sorából. Ha viszont $\partial_i^3 H$ és $\partial_i^3 K$ is azonosan nullák, akkor az állítás a 23.17 lemma (4) esetéből következik.

Most integráljuk a fenti egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$\partial_n H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn}x_n + B_1(x_1, \dots, x_{n-1})$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}y_n + \tilde{B}_1(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

A B_1 és $\tilde{B}_1$ függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak. Újra differenciálva x_1 illetve y_1 szerint, majd $x_n = 0$-t illetve $y_n = 0$-t helyettesítve, azt kapjuk, hogy $\partial_1 B \equiv \partial_1 \tilde{B}$ konstansok. A közös értéket $2c_{1,n}$-el jelölve, azt kapjuk, hogy

$$\partial_n H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn}x_n + 2c_{1,n}x_1 + B_2(x_2, \dots, x_{n-1})$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}y_n + 2c_{1,n}y_1 + \tilde{B}_2(y_2, \dots, y_{n-1}).$$

Indukcióval hasonlóan folytatva, végül azt kapjuk, hogy

$$\partial_n H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn}x_n + 2c_{1,n}x_1 + \dots + 2c_{n-1,n}x_{n-1} + b_n$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}y_n + 2c_{1,n}y_1 + \dots + 2c_{n-1,n}y_{n-1} + \tilde{b}_n.$$

Ezeknek az egyenleteknek az integrálásával az adódik, hogy

$$H(x' + x_n f_n) = c_{nn}x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2c_{i,n}x_i x_n + b_n x_n + a_1(x_1, \dots, x_{n-1})$$

és

$$K(y' + y_n f_n) = c_{nn}y_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2c_{i,n}y_i y_n + \tilde{b}_n y_n + \tilde{a}_1(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Az $x_n = 0$ illetve $y_n = 0$ helyettesítéssel, felhasználva a (8) és (9) kezdeti feltételeket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = a + \sum_{i<n} b_i x_i + \sum_{i,j<n} c_{i,j}x_i x_j \\ + \ln\bigl(c\,\sigma(d_1x_1 + d_{n-1}x_{n-1} + e; \omega_1, \omega_2)\bigr), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(y_1, \dots, y_{n-1}) = \tilde{a} + \sum_{i<n} \tilde{b}_i y_i + \sum_{i,j<n} c_{i,j}y_i y_j \\ + \ln\bigl(\tilde{c}\,\sigma(d_1y_1 + \ldots + d_{n-1}y_{n-1} + \tilde{e}; \omega_1, \omega_2)\bigr), \end{aligned}$$

így mivel $d_n = 0$, kapjuk az állítást.

(5) bizonyításánál is az $n = 1$ eset következik a 23.16 lemmából. Indukciós feltevésünk, hogy

$$H(x) = a + \sum_{i<n} b_i x_i + \sum_{i,j<n} c_{i,j} x_i x_j + \ln\big(c\,\sigma(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e; \omega, \infty)\big)$$

és

$$K(y) = \tilde{a} + \sum_{i<n} \tilde{b}_i y_i + \sum_{i,j<n} c_{i,j} y_i y_j,$$

ha az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ standard bázisvektorok közül az első $n-1$ által kifeszített altérben vagyunk, továbbá a d_i pontosan akkor nulla, ha $\partial_i^3 H$ azonosan nulla.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\partial_n^3 H$ nem tűnik el. A 23.16 lemmából azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = -\mathcal{P}(x_n + e_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1}), \infty) + c_1 \tag{27}$$

és

$$\partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = c_1 \tag{28}$$

elég kicsiny x', y', x_n és y_n esetén, ahol x_n, y_n valós számok, x' és y' pedig olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, amelyeknek utolsó koordinátája nulla.

Vizsgáljuk most is a kezdeti feltételeket. Az indukciós feltevésből $\partial_i^2 K(y') = 2c_{ii}$. Ezt felhasználva, a 23.17 lemmából azt kapjuk, hogy valamely D_i, c_{in} és c_{nn} komplex konstansokkal

$$\begin{aligned} \partial_i^2 K(y) = 2c_{ii}, \quad \partial_i \partial_n K(y) = 2c_{in}, \quad \partial_n^2 K(y) = 2c_{nn}, \\ \partial_i \partial_n H(x) - 2c_{in} = D_i(\partial_i^2 H(x) - 2c_{ii}), \\ \partial_n^2 H(x) - 2c_{nn} = D_i^2(\partial_i^2 H(x) - 2c_{ii}), \\ \partial_n^3 H(x) = D_i^3 \partial_i^3 H(x) \end{aligned} \tag{29}$$

minden elég kicsiny x, y esetén. Az utolsó sorból következik, hogy $D_i \neq 0$ minden $i < n$-re. (29) első sorából $c_1 = 2c_{nn}$, továbbá (28)-ból

$$\frac{(\partial_n^3 H(x))^2 - 4(\partial_n^2 H(x) - 2c_{nn})^3}{(\partial_n^2 H(x) - 2c_{nn})^2} = D_1^2 \frac{(\partial_1^3 H(x))^2 - 4(\partial_1^2 H(x) - 2c_{11})^3}{(\partial_1^2 H(x) - 2c_{11})^2}.$$

Az indukciós feltevés miatt, felhasználva a $\mathcal{P}$-függvények differenciálegyenletét, azt kapjuk, hogy ha $\omega = \infty$, akkor a jobb oldal nulla. Ha $\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ valahol végtelentől különbözne, akkor a bal oldal $4\pi^2/\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1})^2$ lenne, ez lehetetlen, így $\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv \infty$. Ha $\omega \neq \infty$, akkor a jobb oldal $4d_1^2 D_1^2 \pi^2/\omega^2 \neq 0$, így a bal oldal sem nulla, azaz $\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq \infty$ sehol sem. Ekkor viszont a bal oldal $4\pi^2/\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1})^2$, amiből azt kapjuk, hogy $\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \pm\omega/(d_1 D_1)$. Mivel az előjel érdektelen (a rács ugyanaz marad), feltehetjük, hogy $\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \omega/(d_1 D_1)$ mindenütt.

Bevezetve a $d_n = D_1 d_1$ jelölést és visszahelyettesítve (27)-be, valamint felhasználva a bármely nullától különböző α komplex számra fennálló

$$\mathcal{P}(z, \omega, \infty)/\alpha^2 = \mathcal{P}(\alpha z, \alpha\omega, \infty)$$

összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = -d_n^2 \mathcal{P}(d_n x_n + d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) + 2c_{nn}. \tag{30}$$

Ha ebben az egyenletben $x_n = 0$-t helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x') = -d_n^2 \mathcal{P}(e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) + 2c_{nn}.$$

Ha viszont először differenciálunk x_n szerint, és aztán helyettesítünk $x_n = 0$-t, akkor azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^3 H(x') = -d_n^3 \mathcal{P}'(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty).$$

Legyen

$$X(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathcal{P}(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty)$$

és

$$Y(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathcal{P}'(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty).$$

Mivel a fenti összefüggések szerint az X és Y függvények kifejezhetők $\partial_n^2 H(x')$ illetve $\partial_n^3 H(x')$ segítségével is, így $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak. Tegyük fel, hogy $\omega \neq \infty$. Az X és Y függvények kielégítik az $Y^2 = 4X^3 - 4\pi^2 X^2/\omega^2$ egyenletet. Mivel az origóban Y nem nulla, az origó körül X egyértelműen meghatározza Y-t. Ugyanezen okból a $z \mapsto \mathcal{P}(z, \omega, \infty)$ leképezés invertálható $d_n e_1(0, \dots, 0)$ valamely környezetében. Jelölje I az inverzét, és legyen $e_1^*(x_1, \dots, x_{n-1}) = I\left(-(\partial_n^2 H(x') - 2c_{nn})/d_n^2\right)/d_n$. Az origó valamely környezetében fennáll, hogy

$$X(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathcal{P}(d_n e_1^*(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty).$$

Mivel X egyértelműen meghatározza Y-t, az origó valamely környezetében az is teljesül, hogy

$$Y(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathcal{P}'(d_n e_1^*(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty).$$

Ez viszont azt jelenti a 23.7 lemma szerint, hogy

$$d_n\big(e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) - e_1^*(x_1, \dots, x_{n-1})\big) \in \Omega.$$

Így akár azt is feltehetjük, hogy $e_1 = e_1^*$, azaz feltehetjük, hogy $e_1 \in \mathcal{C}^\infty$. Hasonlóan kapjuk ugyanezt, ha $\omega = \infty$.

Vizsgáljuk most az e_1 függvényt. Egyrészt $x_n = 0$-t helyettesítve (30)-ban, felhasználva (29) harmadik sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &d_n^2 \mathcal{P}(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) - 2c_{nn} \\ &\quad= -\partial_n^2 H(x') = -D_1^2 \partial_1^2 H(x') + 2D_1^2 c_{11} - 2c_{nn} \\ &\quad= D_1^2 d_1^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega, \infty) - 2c_{nn}. \end{aligned} \tag{31}$$

Felhasználva, hogy $d_n = D_1 d_1$, ebből az egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) \\ = \mathcal{P}\big(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega, \infty\big), \end{aligned} \tag{32}$$

Másrészt (30) egyenletet differenciálva x_n szerint, majd $x_n = 0$-t helyettesítve, felhasználva (29) utolsó sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_n^3 \mathcal{P}'(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) \\ = -\partial_n^3 H(x') = -D_1^3 \partial_2^3 H(x') \\ = D_1^3 d_1^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega, \infty), \end{aligned} \tag{33}$$

azaz mivel $D_1 d_1 = d_n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) \\ = \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega, \infty). \end{aligned} \tag{34}$$

(32) miatt bármely rögzített $x_2, \dots, x_{n-1}$-re az implicit függvény tételből az e_1 függvény folytonosan parciálisan differenciálható x_1 szerint. Differenciálva (32)-t x_1 szerint azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_n \mathcal{P}'(d_n e_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) \partial_1 e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ = d_1 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega, \infty). \end{aligned} \tag{35}$$

Ebből felhasználva (34)-et az adódik, hogy

$$\partial_1 e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = d_1 / d_n$$

mindenütt. Ez azt jelenti, hogy valamely folytonos $e_2(x_2, \dots, x_{n-1})$ függvénnyel

$$e_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = d_1 x_1 / d_n + e_2(x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Visszahelyettesítve (32)-be, $x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ választással a 23.8 lemmából azt is megkapjuk, hogy $d_n e_2(0, \dots, 0) - e$ eleme az ω által generált Ω (elfajult) rácsnak.

Hasonlóan folytathatjuk. Egyrészt $x_n = 0$-t helyettesítve (30)-ban, felhasználva (29) harmadik sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_n^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + d_n e_2(x_2, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) - 2c_{nn} \\ = -\partial_n^2 H(x') = -D_2^2 \partial_2^2 H(x') + 2D_2^2 c_{22} - 2c_{nn} \\ = D_2^2 d_2^2 \mathcal{P}(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1} + e, \omega, \infty) - 2c_{nn}. \end{aligned} \tag{36}$$

Felhasználva (32)-t, ebből az egyenletből azt kapjuk, hogy $D_2 d_2 = d_n$. A (30) egyenletet differenciálva x_n szerint, majd $x_n = 0$-t helyettesítve, felhasználva (29) utolsó sorát és az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_n^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + d_n e_2(x_2, \dots, x_{n-1}), \omega, \infty) \\ = -\partial_n^3 H(x') = -D_2^3 \partial_2^3 H(x') \\ = D_2^3 d_2^3 \mathcal{P}'(d_1 x_1 + \ldots + d_{n-1} x_{n-1}, \omega, \infty), \end{aligned} \tag{37}$$

azaz mivel $D_2 d_2 = d_n$,

$$
\begin{aligned}
(38)\qquad & \mathcal{P}'(d_1x_1 + d_n e_2(x_2,\dots,x_{n-1}),\omega,\infty) \\
& \qquad = \mathcal{P}'(d_1x_1 + \ldots + d_{n-1}x_{n-1},\omega,\infty).
\end{aligned}
$$

(32) miatt bármely rögzített $x_3,\dots,x_{n-1}$-re az implicit függvény tételből az e_2 függvény folytonosan parciálisan differenciálható x_2 szerint. Differenciálva (32)-t x_2 szerint azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad & d_n\mathcal{P}'(d_1x_1 + d_n e_2(x_2,\dots,x_{n-1}),\omega,\infty)\partial_1 e_2(x_2,\dots,x_{n-1}) \\
& \qquad = d_2\mathcal{P}'(d_1x_1 + \ldots + d_{n-1}x_{n-1},\omega,\infty).
\end{aligned}
$$

Ebből felhasználva (36)-ot az adódik, hogy

$$\partial_1 e_2(x_2,x_3,\dots,x_{n-1}) = d_2/d_n$$

mindenütt. Ez azt jelenti, hogy valamely folytonos $e_3(x_3,\dots,x_{n-1})$ függvénnyel

$$e_2(x_2,\dots,x_{n-1}) = d_2x_2/d_n + e_3(x_3,\dots,x_{n-1}).$$

Indukcióval folytatva, végül azt kapjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2\mathcal{P}(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e_n,\omega,\infty).$$

Mivel, mint megmutattuk, $e_n - e = d_n e_2(0,\dots,0) - e$ eleme az Ω rácsnak, és Ω pontjai periódusok, az is teljesül, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn} - d_n^2\mathcal{P}(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e,\omega,\infty).$$

Most integráljuk a $\partial_n^2 H$-ra és $\partial_n^2 K$-ra kapott egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\partial_n H(x' + x_n f_n) &= 2c_{nn}x_n + d_n\zeta(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e,\omega,\infty) \\
&\quad + B_1(x_1,\dots,x_{n-1})
\end{aligned}
$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}y_n + \tilde{B}_1(y_1,\dots,y_{n-1}).$$

A B_1 és $\tilde{B}_1$ függvények $\mathcal{C}^\infty$-ben vannak. Újra differenciálva x_1 illetve y_1 szerint, majd $x_n = 0$-t illetve $y_n = 0$-t helyettesítve, felhasználva (29) első és második sorát, valamint, hogy $D_i d_i = d_n$, ha $i < n$, azt kapjuk, hogy $\partial_1 B \equiv 2c_{1,n} \equiv \partial_1 \tilde{B}$ konstansok, így

$$
\begin{aligned}
\partial_n H(x' + x_n f_n) &= 2c_{nn}x_n + d_n\zeta(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e,\omega,\infty) \\
&\quad + 2c_{1,n}x_1 + B_2(x_2,\dots,x_{n-1})
\end{aligned}
$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}y_n + 2c_{1,n}y_1 + \tilde{B}_2(y_2,\dots,y_{n-1}).$$

Indukcióval hasonlóan folytatva, végül azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_n H(x' + x_n f_n) &= 2c_{nn}x_n + d_n\zeta(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e, \omega, \infty) \\ &\quad + 2c_{1,n}x_1 + \cdots + 2c_{n-1,n}x_{n-1} + b_n\end{aligned}$$

és

$$\partial_n K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}y_n + 2c_{1,n}y_1 + \cdots + 2c_{n-1,n}y_{n-1} + \tilde{b}_n.$$

Következő lépésként ezeket az egyenleteket integráljuk. Az indukciós feltevés miatt

$$\ln\bigl(c\,\sigma(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e, \omega, \infty)\bigr)$$

értelmezve van az origó egy környezetében. Így az előző egyenletek integrálásával az adódik, hogy az origó egy kis gömbkörnyezetében

$$\begin{aligned}H(x' + x_n f_n) &= \ln\bigl(c\,\sigma(d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + e, \omega, \infty)\bigr) \\ &\quad + c_{nn}x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2c_{i,n}x_ix_n + b_nx_n + a_1(x_1, \ldots, x_{n-1})\end{aligned}$$

és

$$K(y' + y_n f_n) = c_{nn}y_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2c_{i,n}y_iy_n + \tilde{b}_ny_n + \tilde{a}_1(y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Az $x_n = 0$ illetve $y_n = 0$ helyettesítéssel, felhasználva a (8) és (9) kezdeti feltételeket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}a_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= a + \sum_{i<n} b_ix_i + \sum_{i,j<n} c_{ij}x_ix_j \quad \text{és} \\ \tilde{a}_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) &= \tilde{a} + \sum_{i<n} \tilde{b}_iy_i + \sum_{i,j<n} c_{ij}y_iy_j.\end{aligned}$$

Így kapjuk az állítást.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor $\partial_n^3 H$ és $\partial_n^3 K$ is nulla mindenütt. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy $d_n = 0$ választással teljesül az állítás. A 23.16 lemmából azt kapjuk, hogy van olyan $c_1 \in \mathbb{C}$ konstans, hogy minden elég kicsi x', y', x_n és y_n esetén

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = c_1 \quad \text{és} \quad \partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = c_1.$$

Így $c_{nn} = c_1/2$ jelöléssel írhatjuk, hogy

$$\partial_n^2 H(x' + x_n f_n) = 2c_{nn} \quad \text{és} \quad \partial_n^2 K(y' + y_n f_n) = 2c_{nn}.$$

Vegyük észre, hogy minden $i < n$-re $\partial_i\partial_n H(x')$ és $\partial_i\partial_n K(y')$ ugyanaz a konstans; ha ugyanis $\partial_i^3 H$ és $\partial_i^3 K$ nem nullák, akkor fennállnak a (29) összefüggések, és (29) utolsó sorából $D_i = 0$, így az állítás következik (29) első és második sorából. Ha viszont $\partial_i^3 H$ és $\partial_i^3 K$ is azonosan nullák, akkor az állítás a 23.17 lemma (4) esetéből következik. A továbbiakban ugyanúgy járhatunk el, mint (4) bizonyításában.

Végül (6) bizonyítása (5) bizonyításával analóg.

23.19. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények eleget tesznek az*

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = g_1(u)h_1(v) + g_2(u)h_2(v), \qquad u, v \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletnek, f_1 és f_2 mérhetőek és egyik sem majdnem mindenütt nulla. Ekkor léteznek olyan $a, \tilde{a}, e, \tilde{e} \in \mathbb{C}$ konstansok, $L, L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris és $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kvadratikus leképezések, valamint ω_1, ω_2 rácsállandók (lásd 23.6), hogy

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \exp(a + L_1(x) + Q(x))\sigma(L(x) + e, \omega_1, \omega_2), \quad \textit{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \textit{és} \\ f_2(y) &= \exp(\tilde{a} + L_2(y) + Q(y))\sigma(L(y) + \tilde{e}, \omega_1, \omega_2), \quad \textit{ha} \quad y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \exp(a + L_1(x) + Q(x))\sigma(L(x) + e, \omega_1, \infty), \quad \textit{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \textit{és} \\ f_2(y) &= \exp(\tilde{a} + L_2(y) + Q(y)), \quad \textit{ha} \quad y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \exp(a + L_1(x) + Q(x)), \quad \textit{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \textit{és} \\ f_2(y) &= \exp(\tilde{a} + L_2(y) + Q(y))\sigma(L(y) + \tilde{e}, \omega_1, \infty), \quad \textit{ha} \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy f_1, f_2 függvényében a 23.11 és 23.10 pontok alapján g_1, g_2, h_1, h_2 meghatározhatók.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy vagy van olyan $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont és olyan $1 \le i \le n$ index, hogy $H(x) = \ln(f_1(x + x_0)/f_1(x_0))$ jelöléssel $\partial_i^3 H$ nem azonosan nulla az origó egyetlen környezetében sem, vagy van olyan $y_0 \in \mathbb{R}^n$ pont és $1 \le i \le n$ index, hogy $K(y) = \ln(f_2(y+y_0)/f_2(y_0))$ jelöléssel $\partial_i^3 K$ nem azonosan nulla az origó egyetlen környezetében sem. A két eset tárgyalása hasonló, az elsőt fogjuk részletezni. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük azt is, hogy $i = 1$, azaz feltesszük, hogy van olyan $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy a fenti H-val $\partial_1^3 H$ az origó egyetlen környezetében sem azonosan nulla. Meg fogjuk mutatni, hogy $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ úgy is megválaszhatók, hogy amellett, hogy $\partial_1^3 H$ nem azonosan nulla az origó egyetlen környezetében sem, $|x|, |y| < \delta$ esetén teljesüljenek a 23.15 pont (6)–(9) egyenletei, továbbá minden $1 \le j \le n$ esetén az alábbi feltételek is fennállnak:

(1) $\partial_j^3 H(x)$ vagy minden $|x| < \delta$ esetén nulla, vagy egyetlen $|x| < \delta$ esetén sem nulla;

(2) $\partial_j^3 K(y)$ is vagy minden $|y| < \delta$ esetén nulla, vagy egyetlen $|y| < \delta$ esetén sem nulla;

(3) ha $\partial_j^3 H \ne 0$ vagy $\partial_j^3 K \ne 0$, vagy mindkettő fennáll, akkor $\partial_j^2 H(x) - \partial_j^2 K(y)$ sem nulla egyetlen $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ párra sem.

Ennek bizonyítására induljunk ki olyan $\varepsilon > 0$ számból, és olyan x_1 illetve y_1 pontokból, amelyekre a $H_1(x) = \ln(f_1(x + x_1)/f_1(x_1))$ és $K_1(y) = \ln(f_2(y{+}y_1)/f_2(y_1))$ függvények értelmezve vannak az origó ε sugarú környezetében, és $\partial_1^3 H_1$ nem azonosan nulla az origó egyetlen környezetében sem. Az ε csökkentésével elérhető, hogy bármely x_0, y_0-ra, amelyre $|x_0 - x_1| < \varepsilon$ illetve $|y_0 - y_1| < \varepsilon$, a $\delta = \varepsilon - \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}$ sugarú környezeten értelmezve legyenek az (x_0-tól illetve y_0-tól is függő) $H(x) = \ln(f_1(x + x_0)/f_1(x_0))$ illetve $K(y) = \ln(f_2(y{+}y_0)/f_2(y_0))$ függvények. Vizsgáljuk meg a H_1 és H, illetve K_1 és K függvények közötti kapcsolatot. Elég kicsiny ε esetén

$$\begin{aligned} H(x) &= \ln(f_1(x + x_0)/f_1(x_0)) \\ &= \ln((f_1(x + (x_0 - x_1) + x_1)/f_1(x_1)) - \ln(f_1(x_0)/f_1(x_1)) \\ &= H_1(x + (x_0 - x_1)) + \ln(f_1(x_1)/f_1(x_0)). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy H deriváltjai az origó körül ugyanúgy viselkednek, mint H_1 deriváltjai az $x_0 - x_1$ pont körül. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$K(y) = K_1(y + (y_0 - y_1)) + \ln(f_2(y_1)/f_2(y_0)),$$

azaz hogy K deriváltjai az origó körül ugyanúgy viselkednek, mint K_1 deriváltjai az $y_0 - y_1$ pont körül.

Világos, hogy szükség esetén csökkentve ε-t elérhető, hogy $|x_0|, |y_0| < \varepsilon$ esetén H és K teljesítse a 23.15 pontbeli (6)–(9) parciális differenciálegyenletrendszert az origó δ sugarú környezetén. Tekintsük az

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon, \partial_1^3 H_1(x) \neq 0\}$$

nyílt halmazt. Ez egy Baire-tér. Azon $x \in X$ pontok X_j halmaza, amelyeknek vagy van olyan X-beli környezete, amelyen $\partial_j^3 H_1$ sehol sem nulla, vagy van olyan X-beli környezete, amelyen $\partial_j^3 H_1$ mindenütt nulla, sűrű nyílt halmaz X-ben. Így a $\cap_{j=2}^n X_j$ halmaz sűrű nyílt részhalmaza X-nek. Legyen x_2 ennek tetszőleges pontja. Az $x_1 + x_2$ valamely környezetéből vett x_0 pontokra teljesül (1). Hasonlóan kapjuk az y_2 pontot: Tekintjük az $Y = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \varepsilon\}$ nyílt halmazt. Ez egy Baire-tér. Azon $y \in Y$ pontok Y_j halmaza, amelyeknek vagy van olyan Y-beli környezete, amelyen $\partial_j^3 K_1$ sehol sem nulla, vagy van olyan Y-beli környezete, amelyen $\partial_j^3 K_1$ mindenütt nulla, sűrű nyílt halmaz Y-ban. Így a $\cap_{j=1}^n Y_j$ halmaz sűrű nyílt részhalmaza Y-nak. Legyen y_2 ennek tetszőleges pontja. $y_1 + y_2$ valamely környezetéből vett y_0 pontokra teljesül (2). Meg kell még mutatnunk, hogy x_0 és y_0 úgy is választható, hogy (3) is teljesüljön. Ez indukcióval könnyen következik. Legyen $x_0 = x_1 + x_2$ és $y_0 = y_1 + y_2$. Ha (3) már teljesül $1 \leq j < k$ esetén, és $\partial_k^3 H_1(x_2) = \partial_k^3 H(0) \neq 0$, akkor helyettesítsük x_2-t $x_2 + te_k$-val, ahol e_k a k-adik egységvektor, t pedig olyan kicsi, hogy az eddig már teljesített feltételek továbbra is fennálljanak, ha pedig $\partial_k^3 H_1(x_2) = \partial_k^3 H(0) = 0$, akkor, felhasználva, hogy $\partial_k^3 K_1(y_2)) = \partial_k^3 K(0) \neq 0$, helyettesítsük y_2-t $y_2 + te_k$-val, ahol t pedig olyan kicsi, hogy az eddig már teljesített feltételek továbbra is fennálljanak. Ha ezekkel az új x_2, y_2 értékekkel újra képezzük $x_0 = x_1 + x_2$-t és $y_0 = y_1 + y_2$-t, akkor (3) már teljesül $1 \leq j \leq k$ esetén.

Most alkalmazhatjuk a 23.18 lemmát. Azt kapjuk, hogy léteznek olyan $a', \tilde{a}', c, \tilde{c}, e', \tilde{e}' \in \mathbb{C}$ konstansok, $L, L_1', L_2' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris leképezések és $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kvadratikus leképezés, hogy az origó elég kis környezetében

$$\begin{aligned} H(x) &= a' + L_1'(x) + Q(x) + \ln \sigma\big(c(L(x) + e', \omega_1, \omega_2)\big) \quad \text{és} \\ K(y) &= \tilde{a}' + L_2'(y) + Q(y) + \ln\big(\tilde{c}\sigma(L(y) + \tilde{e}', \omega_1, \omega_2)\big) \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} H(x) &= a' + L_1'(x) + Q(x) + \ln\big(c\sigma(L(x) + e', \omega_1, \infty)\big) \quad \text{és} \\ K(y) &= \tilde{a}' + L_2'(y) + Q(y) \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} H(x) &= a' + L_1'(x) + Q(x) \quad \text{és} \\ K(y) &= \tilde{a}' + L_2'(y) + Q(y) + \ln\big(\tilde{c}\sigma(L(y) + \tilde{e}', \omega_1, \infty)\big). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $x \mapsto f_1(x + x_0)$ illetve $y \mapsto f_2(y + y_0)$ leképezések a tételben állított előállítással rendelkeznek az origó egy kis környezetében. Azonban a 23.10 pontból tudjuk, hogy ezek a függvények az origó egy kis környezetében eleget tesznek egy (1) típusú függvényegyenletnek mindenütt analitikus, és az origó bármely környezetében lineárisan független $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ függvényekkel a jobb oldalon. Így alkalmazható rájuk a 23.12 lemma, és kapjuk, hogy mindenütt a tételben kívánt előállítással rendelkeznek. Ebből következik, hogy más $a, \tilde{a}, e, \tilde{e} \in \mathbb{C}$ konstansokkal és $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris leképezésekkel az f_1 és f_2 függvények is a tételben adott előállításúak.

Hátra van még annak az esetnek a vizsgálata, amikor minden $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontra, amelyre $f_1(x_0) \neq 0$, a $H(x) = \ln(f_1(x+x_0)/f_1(x_0))$ függvény minden $\partial_i^3 H$ parciális deriváltja nulla az origó valamely környezetében, és minden $y_0 \in \mathbb{R}^n$ pontra, amelyben $f_2(y_0) \neq 0$, a $K(y) = \ln(f_2(y + y_0)/f_2(y_0))$ függvény minden $\partial_i^3 K$ parciális deriváltja nulla az origó valamely környezetében. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a tétel állítása $L \equiv 0$ választással teljesül, azaz azt fogjuk megmutatni, hogy léteznek olyan $a, \tilde{a}$ komplex konstansok, $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris, illetve $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kvadratikus leképezések, hogy

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \exp(a + L_1(x) + Q(x)), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \\ f_2(y) &= \exp(\tilde{a} + L_2(y) + Q(y)), \quad \text{ha} \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Itt is először azt mutatjuk meg, hogy a fenti előállítás lokálisan teljesül. A 23.17 lemma (4) állítása szerint bármely x_0-ra és y_0-ra, amelyre $f_1(x_0) \neq 0$

illetve $f_2(y_0) \neq 0$, a megfelelő H illetve K függvényekre alkalmas $a', \tilde{a}'$ komplex konstansokkal, $L_1', L_2' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris illetve $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kvadratikus függvényekkel

$$H(x) = a' + L_1'(x) + Q(x) \quad \text{és}$$
$$K(y) = \tilde{a}' + L_2'(y) + Q(y).$$

Ebből, mivel $f_1(x+x_0) = f_1(x_0)\exp(H(x))$ és $f_2(y+y_0) = f_2(y_0)\exp(K(y))$, új változót vezetve be, más $a, \tilde{a}$ komplex konstansokkal és $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lineáris leképezésekkel az x_0, illetve y_0 egy környezetében

$$f_1(x) = \exp(a + L_1(x) + Q(x)) \quad \text{és}$$
$$f_2(y) = \exp(\tilde{a} + L_2(y) + Q(y)).$$

Rögzítsünk egy x_0, y_0 párt, és tekintsük azt a maximális $0 < \delta \leq \infty$ sugarat, amelyre f_1 nem nulla az x_0 pont δ sugarú környezetén. Mivel f_1 analitikus ezen a gömbön, a fenti előállítás teljesül az egész gömbön az x_0, y_0 párhoz tartozó a-val, L_1-el és Q-val. Mivel $\delta < \infty$ esetén az $x \mapsto a + L_1(x) + Q(x)$ függvény korlátos lenne a gömbön, f_1 nem lehetne folytonos, mert a gömbön $|f_1|$-nek létezne pozitív alsó korlátja. Ez azt jelenti, hogy $\delta = \infty$, azaz a fenti előállítás az egész $\mathbb{R}^n$-en teljesül az x_0, y_0 párhoz tartozó a-val, L_1-el és Q-val. Hasonlóan kapjuk, hogy f_2 is felírható (4) alakban az x_0, y_0 párhoz tartozó $\tilde{a}$-al, L_2-vel és Q-val.

Irodalom

[1] Aczél János, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Birkhäuser, 1961.

[2] Aczél János, *Ein Blick auf Funktionalgleichungen und Ihre Anwendungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1962.

[3] Aczél János, *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, 1966.

[4] Aczél János, *On strict monotonicity of continuous solutions of certain types of functional equations.* Canad. Math. Bull. *9(2)* (1966), 229–232.

[5] Aczél János, *On Applications and Theory of Functional Equations.* Academic Press, 1969.

[6] Aczél János, *Notes on generalized information functions.* Aequationes Math. *22* (1981), 97–107.

[7] Aczél János, *Some unsolved problems in the theory of functional equations, II.* Aequationes Math. *26* (1984), 255–260.

[8] Aczél János, *A short course on functional equations.* D. Reidel, 1987.

[9] Aczél János, *Remark 15. In Report of Meeting; The Twenty-sixth International Symposium on Functional Equations.* Aequationes Math. *37* (1989), 107.

[10] Aczél János, *The state of the second part of Hilbert's fifth problem.* Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) *20* (1989), 153–163.

[11] Aczél János, *Remark 15. Report of meeting. The twenty-sixth symposium on functional equations.* Aequationes Math. *37* (1989), 107–108.

[12] Aczél János (Ed.), *Aggregating clones, colors, equations, iterates, numbers, and tiles.* Birkhäuser, 1995. (Also as Vol. 50 of Aequationes Math.)

[13] Aczél János, Walter Benz, *Über das harmonische Produkt und eine korrespondierende Funktionalgleichung.* Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Univ. Hamburg. *43* (1975), 3–10.

[14] Aczél János, Jukang Chung, *Integrable solutions of functional equations of a general type.* Studia Sci. Math. Hungar. *17* (1982–84), 51–67.

[15] Aczél János, Daróczy Zoltán, *On measures of informations and their characterizations.* Academic Press, 1975.

[16] Aczél János, Jean Dhombres, *Functional equations in several variables.* Encyclopedia of mathematics and its applications 31. Cambridge University Press, 1989.

[17] Aczél János, Roman Ger, Járai Antal, *Solutions of an equation arising from utility that is both separable and additive.* Proc. Amer. Math. Soc. *127* (1999), 2923–2929.

[18] Aczél János, Stanislaw Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der Geometrischen Objekte.* Pańśtowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa, 1960.

[19] Paul S. Alexandrov (Ed.), *Die Hilbertschen Probleme.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1971.

[20] Claudi Alsina, *Problem 1.* Aequations Math. *47* (1994), 302.

[21] John A. Baker, *Regularity properties of functional equations.* Aequationes Math. *6* (1971), 243–248.

[22] John A. Baker, *On the functional equation* $f(x)g(y) = \prod_{i=1}^{n} h_i(a_i x + b_i y)$. Aequationes Math. *11* (1974), 154–162.

[23] John A. Baker, *Functional equations, tempered distributions and Fourier transforms.* Trans. Amer. Math. Soc. *315* (1989), 57–68.

[24] John A. Baker, *Functional equations, distributions and approximate identities.* Can. J. Math. *17(4)* (1990), 696–708.

[25] John A. Baker, *Difference Operators, Distributions and Functional Equations.* Periodica Math. Hungar. *23(3)* (1991) 171–183.

[26] Nicolas Bourbaki, *Elements of mathematics. General topology.* Addison-Wesley, 1966.

[27] Mario Bonk, *The addition theorem of Weierstraß's sigma function.* Math. Ann. *298* (1994), 591–601.

[28] Mario Bonk, *The addition formula for theta functions.* Aequationes Math. *53* (1997), 54–72.

[29] Claude Chevalley, *Theory of Lie groups I.* Princeton University Press, 1964.

[30] Daróczy Zoltán, *On the measurable solutions of a functional equation.* Acta Math. Sci. Hungar. *22* (1971–72), 11–14.

[31] Daróczy Zoltán, *Über die stetigen Lösungen der Aczél–Benz'schen Funktionalgleichung.* Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Univ. Hamburg *50* (1980), 210-218.

[32] Daróczy Zoltán, Járai Antal, *On the measurable solutions of a functional equation arising in information theory.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *34* (1979), 105–116.

[33] Daróczy Zoltán, Helmut Kiesewetter, *Ein Funktionalgleichung von Abel und die Grundgleichung der Information.* Period. Math. Hungar. *4* (1973), 25–28.

[34] Daróczy Zoltán, Maksa Gyula, *Nonnegative information functions.* Collection: Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Kossuth L. Univ. Debrecen, Debrecen, 1977), 67–78.

[35] Jean Dhombres, *Some aspects of functional equations.* Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand, 1979.

[36] Georg T. Diderrich, *Local boundedness and the Shannon entropy.* Information and Control *36* (1978), 292–308.

[37] Georg T. Diderrich, *Continued fractions and the fundamental equation of information.* Aequationes Math. *19* (1979), 93–103.

[38] Georg T. Diderrich, *Boundedness on a set of positive measure and the fundamental equation of information.* Publ. Math. Debrecen *33* (1986), 1–7.

[39] Jean Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis I–IX.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1971–1988.

[40] Wolfgang Eichhorn, *Functional Equations in Economics.* Addison-Wesley, 1978.

[41] Erdős Pál, John C. Oxtoby, *Partitions of the plane into sets having positive measure in every no-null measurable product set.* Trans. Amer. Math. Soc. *79* (1955), 91–102.

[42] Herbert Federer, *Geometric measure theory.* Springer, 1969.

[43] Fenyő István, *Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. *7* (1956), 383–396.

[44] Zbigniew Gajda, *Christensen measurable solutions of generalized Cauchy functional equations.* Aequationes Math. *31* (1986), 147–158.

[45] Hillel Gauchman, Lee A. Rubel, *Sums of products of functions of x times functions of y.* Lin. Alg. and its Appl. *125* (1989), 19–63.

[46] Dan Geiger, David Heckerman, *A characterization of the Dirichlet distribution through global and local parameter independence.* Ann. of Statist. *25* (1997), 1344–1369.

[47] Roman Ger, *Mazur's criterion for continuity of convex functionals.* Talk given at the 25th ISFE in Hamburg–Rissen, 1987.

[48] Enrico Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser, 1984.

[49] Karl-Goswin Grosse-Erdmann, *Regularity properties of functional equations and inequalities.* Aequationes Math. *37* (1989), 233–251.

[50] Hiroshi Haruki, *Studies on certain functional equations from the standpoint of analytic function theory.* Sci. Rep. Osaka Univ. *14* (1965), 1–40.

[51] Otto Haupt, *Über einen Eindeutigkeitssatz für gewisse Funktionalgleichungen.* J. Reine Angew. Math. *186* (1944), 58–64.

[52] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis I.* Springer, 1963.

[53] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis II.* Springer, 1970.

[54] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross, *Extension of Haar measure and of harmonic analysis for locally compact Abelian groups.* Math. Ann. *160* (1965), 171–195.

[55] Edwin Hewitt, Karl Stromberg, *Real and abstract analysis.* Springer, 1965.

[56] David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen Band III.* Springer, 1970.

[57] Einar Hille, *Topics in Classical Analysis.* In Vol. III of the book *Lectures on Modern Mathematics*, Ed. by Thomas L. Saaty. John Wiley & Sons, 1965.

[58] Einar Hille, Ralph S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, 1957.

[59] Lars Hörmander, *Linear Partial Differential Operators.* Springer, 1976.

[60] Andrzej Hulanicki, *On subsets of full outer measure in products of measure spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci. *7* (1959), 331–335.

[61] Gerald L. Itzkowitz, *Extension of Haar measure for compact connected Abelian groups.* Bull. Amer. Math. Soc. *71* (1965), 152–156.

[62] Gerald L. Itzkowitz, *Measurability and continuity for a functional equation on a topological group.* Aequationes Math. *7* (1971), 194–198.

[63] Járai Antal, *Mérhető függvények korlátosságáról. Diákköri dolgozat.* KLTE, Debrecen, 1973, 15 oldal.

[64] Járai Antal, *Függvényegyenletek mérhető megoldásairól.* Egyetemi doktori értekezés. KLTE, Debrecen, 1976, 46 oldal.

[65] Járai Antal, *Remark 17. Solution of two problems of W. Sander.* Aequationes Math. *19* (1979), 286–288.

[66] Járai Antal, *On measurable solutions of functional equations.* Publ. Math. Debrecen *26* (1979), 17–35.

[67] Járai Antal, *Regularity properties of functional equations.* Aequationes Math. *25* (1982), 52–66.

[68] Járai Antal, *Invariant extension of Haar measure.* Diss. Math. *233* (1984), 1–26.

[69] Járai Antal, *A remark to a paper of J. Aczél and J. K. Chung.* Studia Sci. Math. Hungar. *19* (1984), 273–274.

[70] Járai Antal, *Derivates are Borel functions.* Aequationes Math. *29* (1985), 24–27.

[71] Járai Antal, *Remark 12. In: Proceedings of the Twenty-third International Symposium on Functional Equations.* Centre for Information Theory, University of Waterloo, 1985, 57–58.

[72] Járai Antal, *On regular solutions of functional equations.* Aequationes Math. *30* (1986), 21–54.

[73] Járai Antal, *Remark to the problem 4 of C. Alsina and J.–L. Garcia–Roig.* Aequationes Math. *35* (1988), 120.

[74] Járai Antal, *Függvényegyenletek regularitási tulajdonságai.* Kandidátusi értekezés. Debrecen, 1988, 96 oldal

[75] Járai Antal, *Függvényegyenletek regularitási tulajdonságai.* Kandidátusi értekezés tézisei. Debrecen, 1988, 21 oldal.

[76] Járai Antal, *Remark 3. (Solution of a problem of C. Alsina and J.–L. Garcia-Roig.)* Aequations Math. *36* (1989), 98.

[77] Járai Antal, *On a problem of S. Mazur.* (a) Beküldve. (b) Talk, XII. Österreichischer Mathematikerkongreß, Wien, 1989; Abstract: XII. Österreichischer Mathematikerkongreß, Vortragsauszüge, Österreichischer Mathematiker Gesellshaft, 1989. (c) 27th International Symposium on Functional Equations, Bielsko Biala–Katowice–Krakow, Poland, 1989; Abstract: Aequationes Math. 39 (1990), 280. (d) KLTE TTK Debrecen, Technical report 91/15, 1–6.

[78] Járai Antal, *Remark 22. (To a theorem of J. Aczél.)* Aequationes Math. *37* (1989), 111.

[79] Járai Antal, *Differentiation of parametric integrals and regularity of functional equations.* Grazer Math. Ber. *315* (1991), 45–50.

[80] Járai Antal, *Hölder continuous solutions of functional equations.* Compes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada *14* (1992), 213–218.

[81] Járai Antal, *On Hölder continuous solutions of functional equations.* Publ. Math. Debrecen *43/3–4* (1993), 359–365.

[82] Járai Antal, *On Lipschitz property of solutions of functional equations.* Aequationes Math. *47* (1994), 69–78.

[83] Járai Antal, *On the analytic solutions of functional equations.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 14 (1994), 71–77.

[84] Járai Antal, *On continuous solutions of functional equations.* Publ. Math. Debrecen, *44/1–2* (1994), 115-122.

[85] Járai Antal, *Függvényegyenletek regularitási tulajdonságai.* Habilitációs értekezés. Debrecen, 1994. 132 oldal.

[86] Járai Antal, *Függvényegyenletek regularitási tulajdonságai.* Habilitációs értekezés tézisei. Debrecen, 1994. 34 oldal.

[87] Járai Antal, *A Steinhaus type theorem.* Publ. Math. Debrecen *47* (1995), 1–13.

[88] Járai Antal, *Remark 30. (Solution of a problem of K. Lajkó.)* Aequationes Math. 49 (1995), 196.

[89] Járai Antal, *Regularity properties of functional equations. Leaflets in Mathematics.* Janus Pannonius University, Pécs, 1996, 1–77.

[90] Járai Antal, *Remark 23. (To the talk of R. Badora.)* Aequationes Math. *51* (1996), 178.

[91] Járai Antal, *A generalization of a theorem of Piccard.* Publ. Math. Debrecen *52 (3-4)* (1998), 497–506.

[92] Járai Antal, *Regularity Property of the Functional Equation of the Dirichlet Distribution.* Aequationes Math. 56 (1998), 37-46.

[93] Járai Antal, *Measurable solutions of functional equations satisfied almost everywhere.* Math. Pannonica *10/1* (1999), 103–110.

[94] Járai Antal, *Regularity of bounded variation solutions of functional equations.* Aequationes Math., megjelenés alatt.

[95] Járai Antal, *Regularity properties of functional equations on manifolds.* Beküldve.

[96] Járai Antal, *Measurability implies continuity for solutions of functional equations — even with few variables.* Beküldve.

[97] Járai Antal, *Baire property implies continuity for solutions of functional equations — even with few variables.* Acta Sci. Math. Szeged *66* (2000), 579–601.

[98] Járai, Antal, *Continuity implies differentiability for solutions of functional equations — even with few variables.* Megjelenés alatt.

[99] Járai Antal, Maksa Gyula, *Remark 19. Solution of a problem of C. Alsina.* Proceedings of the Twenty-third International Symposium on Functional Equations. Centre for Information Theory, University of Waterloo, 1985.

[100] Járai Antal, Maksa Gyula, *Remark 2. (Solution of a problem of C. Alsina and J. L. Garcia-Roig.)* Aequations Math. *47* (1994), 302.

[101] Járai Antal, Maksa Gyula, *Regular solutions of a functional equation.* C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, *17(1)* (1995), 7–10.

[102] Járai Antal, Páles Zsolt, *Remark 10. Solution of a problem of T. M. K. Davison.* Aequationes Math. 53 (1997), 190.

[103] Járai Antal, Wolfgang Sander, *A Regularity Theorem in Information Theory.* Publ. Math. Debrecen *50* (1997), 339–357.

[104] Járai Antal, Székelyhidi László, *Regularization and General Methods in the Theory of Functional Equations.* Survey paper. Aequationes Math. *52* (1986), 10–29.

[105] Shizuo Kakutani, John C. Oxtoby, *Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space.* Ann. of Math. (N. S.) *52/2* (1950), 580–590.

[106] Shizuo Kakutani, Kunihiko Kodaira, *A non-separable translation invariant extension of the Lebesgue measure space.* Ann. of Math. (N. S.) *52/2* (1950), 574–579.

[107] Johannes H. B. Kemperman, *A general functional equation.* Trans. Amer. Math. Soc. *86* (1957), 28–56.

[108] Zygfryd Kominek, *Some generalization of the theorem of S. Piccard.* Prace Naukowe Uniwersytetu Ślaskiego w Katowicach *37* (1973), 31–33.

[109] Krausz Tamás, *Steinhaus-típusú tételek. Diákköri dolgozat.* KLTE Mat. Int., Debrecen, 1980.

[110] Marek Kuczma, *Functional equations in a single variable.* PWN - Polish Scientific Publisher, 1968.

[111] Marek Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Uniwersytet Śląski, 1985.

[112] Marek Kuczma, Bogdan Choczewski, Roman Ger, *Iterative Functional Equation.* Encyclopedia of mathematics and its applications 32. Cambridge University Press, 1990.

[113] Marzin E. Kuczma, *A generalization of Steinhaus' theorem to coordinatewise measure preserving binary transformations.* Colloq. Math. *36* (1976), 241–248.

[114] Marzin E. Kuczma, *Differentation of implicit functions and Steinhaus' theorem in topological measure spaces.* Colloq. Math. *39* (1978), 95–107.

[115] Marzin E. Kuczma, Marek Kuczma, *An elementary proof and an extension of a theorem of Steinhaus.* Glas. Mat. *6(26)* (1971), 11–18.

[116] Svetozar Kurepa, *A cosine functional equation in Hilbert space.* Canad. J. Math. *12* (1957), 45–50.

[117] Iwo Labuda, Richard D. Mauldin, *Problem 24 of "The Scottish Book" concerning additive functionals.* Coll. Math. *48* (1984), 89–91.

[118] Laczkovich Miklós, *Valós függvénytan. Egyetemi jegyzet.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1995.

[119] Lajkó Károly, *On the general solution of rectangle-type functional equations.* Publ. Math. Debrecen *28* (1981), 137–143.

[120] Lajkó Károly, *Remarks to a functional equation arising in the spectral theory of random fields. (Talk on the 32. ISFE.)* Aequationes Math. *49* (1995), 175.

[121] Bohdan Lawruk, Halina Światak, *On Functions Satisfying a Generalized Mean Value Equation.* Aequationes Math. *11* (1974), 1–10.

[122] Zbigniew Lipecki, *On continuity of group homomorphisms.* Coll. Math. *48* (1984), 93–94.

[123] Losonczi László, *On a functional equation of sum form.* Publ. Math. Debrecen *26* (1989), 167–177.

[124] Maksa Gyula, *The general solution of a functional equation related to the mixed theory of information.* Aequationes Math. *22* (1981), 90–96.

[125] Maksa Gyula, *Bounded symmetric information functions.* C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada *Vol. II* (1980), No. 5, 247–252.

[126] Janusz Matkowski, *Continuous solutions of a functional equation.* Publ. Math. Debrecen, *52/3-4* (1998), 559-562.

[127] Janusz Matkowski, Tadeusz Świątkowski, *A refined Steinhaus theorem and subadditive functions.* Megjelenés alatt.

[128] Daniel R. Mauldin (Ed.), *The Scottish Book.* Birkhäuser, 1981.

[129] Michael A. McKiernan, *Boundedness on a Set of Positive Measure and the Mean Value Property Characterizes Polynomials an a Space V^n.* Aequationes Math. *4* (1970), 31–36.

[130] Michael A. McKiernan, *Difference and mean value type functional equations.* Centro Internationale Matematico Estivo. Corso tenuto a La Mendola (Trento) dal 20 al 28 agosto 1970.

[131] Frank Morgan, *Geometric measure theory. A beginner's guide.* Academic Press, 1988

[132] John C. Oxtoby, *Mass und Kategorie.* Springer, 1971.

[133] Luigi Paganoni, *Sulla equivalenza fra misurabilitá e continuitá per le soluzioni di una classe di equazioni funzionali.* Riv. Mat. Univ. Parma *(3)3* (1974), 175–188.

[134] Páles Zsolt, *On reduction of linear two variable functional equations to differential equations without substitutions.* Aequationes Math. *43* (1992), 236–247.

[135] S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien.* Mém. Univ. Neuchâtel, *13*, Secrétariat de l'Université Neuchâtel, 1939.

[136] Richard Rochberg, Lee A. Rubel, *A functional equation.* Indiana Univ. Math. J. *41* (1992), 363–376.

[137] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis. Second edition.* McGraw-Hill, 1964.

[138] Thomas L. Saaty, *Modern Nonlinear Equations.* Dover, 1981.

[139] Stanisław Saks, Antoni Zygmund, *Analytic Functions.* Warszawa–Wrocław 1952.

[140] Wolfgang Sander, *Verallgemeinerungen eines Satzes von H. Steinhaus.* Manuscripta Math. *18* (1976), 25–42. Sander, W., *Errata hierzu.* Manuscripta Math. *20* (1977), 101–103.

[141] Wolfgang Sander, *Regularitätseigenschaften von Funktionalgleichungen.* Glas. Math. Ser. III *13(33)* (1978), 237–247.

[142] Wolfgang Sander, *Verallgemeinerte Cauchy-Functionalgleihungen.* Aequationes Math. *18* (1978), 357–369.

[143] Wolfgang Sander, *A generalization of a theorem of S. Piccard.* Proc. Amer. Math. Soc. *73* (1979), 281–282.

[144] Wolfgang Sander, *Problem P179.* Aequationes Math. *19* (1979), 287.

[145] Wolfgang Sander, *Ein Beitrag zur Baire-Kategorie-Theorie.* Manuscripta Math. *34* (1981), 71–83.

[146] Wolfgang Sander, *Problem 19.* Aequationes Math. 46 (1993), 294.

[147] Wolfgang Sander, *On a generalized fundamental equation of information.* Results in Math. *26* (1994), 372–381.

[148] Laurent Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Oxford University Press, 1973.

[149] Jaroslav Smítal, *On functions and functional equations.* Adam Hilger, 1988.

[150] Hugo Steinhaus, *Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive.* Fund. Math. *1* (1920), 93–104.

[151] Halina Światak, *On the Regularity of the Locally Integrable Solutions of the Functional Equations* $\sum_{i=1}^{k} a_i(x,t)f(x+\varphi_i(t)) = b(x,t)$. Aequationes Math. *4* (1970), 291–296.

[152] Halina Światak, *Criteria for the Regularity of Continuous and Locally Integrable Solutions of a Class of Linear Functional Equations.* Aequationes Math. *6* (1971), 170–187.

[153] Halina Światak, *On Certain Regularity Problems for Solutions of Functional Equations.* Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astr. et Phys. *XIX (3)* (1971), 209–212.

[154] Halina Światak, *The regularity of the locally integrable and continuous solutions of nonlinear functional equations.* Trans. Amer. Math. Soc. *221(1)* (1976), 97–118.

[155] Halina Światak, *Existence and regularity problems for nonlinear functional equations.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *30 (1–2)* (1977), 21–31.

[156] Székelyhidi László, *On a class of linear functional equations.* Publ. Math. Debrecen *29* (1982), 19–28.

[157] Székelyhidi László, *On a problem of S. Mazur.* Trans. Amer. Math. Soc. *316* (1989), 161–164.

[158] Székelyhidi László, *Convolution Type Functional Equations on Topological Abelian Groups.* World Scientific, 1991.

[159] Rolf Trautner, *A covering principle in real analysis.* Quart. J. Math. Oxford *38(2)* (1987), 127–130

[160] Akira Tsutsumi, Shigeru Haruki, *Functional Equations and Hypoellipticity.* Proc. Japan Acad. *Ser. A, 58(3)* (1982), 105–108.

[161] Akira Tsutsumi, Shigeru Haruki, *The regularity of solutions of functional equations and hypoellipticity.* In: Aczél János (ed.), Functional Equations: History, Applications and Theory, 99–112. D. Reidel, 1984.

[162] Akira Tsutsumi, Shigeru Haruki, *On Hypoelliptic Functional Equations.* Math. Japonica *36(3)* (1991), 581–590.

[163] Fikret Vajzovič, *On the solution of one functional equation.* Mat. Vesnik *5* (1968), 25–28.

[164] André Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Paris, 1951.

[165] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis I.–IV.* Springer, 1990.