ANALÍZIS III

Alk. Mat. 2. év 1. félév, 4+2 óra

Vizsgatételek

1. Metrikus, normált és belső szorzat terek. Eltérés, metrika, metrikus és félmetrikus tér, ekvivalens metrikák. Példák: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, alterek. Félnorma, norma, normált terek, ekvivalens normák. Példák: normák $\mathbf{K}^n$-en. Véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens. Belső szorzat terek, Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenség, belső szorzatból származó norma. Példa: $\mathbf{K}^n$.

2. Sorozatok. Gömbök, átmérő, korlátosság. Belső, külső és határpontok, izolált és torlódási pontok. Nyílt és zárt halmazok, környezetek. Halmazok belseje és lezártja. Bázis, szeparábilis terek. A nyílt és zárt halmazok, környezetek altérben, altér szeparábilitása. Sorozatok, határérték és sűrűsödési hely, Cauchy-sorozatok, teljesség. A bővített valós számok metrizálása. Banach-terek és Hilbert-terek fogalma.

3. Kompaktság és folytonosság. Kompakt halmazok és jellemzéseik. Lebesgue-szám. Határérték és folytonosság egy pontban, szakadások, átviteli elv. Metrikus terek szorzata. Kompaktság és folytonosság, folytonosság az egész téren, folytonosság és sűrű halmazok, egyenletes folytonosság.

4. Topológia. Összefüggőség, összefüggő halmazok $\mathbf{R}$-ben, összefüggőség és folytonosság. Lokális tulajdonságok. Metrikus tér topológiája, topologikus fogalmak. Az általános topológia elemei (vázlatosan, bizonyítások nélkül): szétválasztási axiómák, reguláris, teljesen reguláris és normális terek, szorzattér, Tyihonov tétele.

5. Függvényterek. Függvényterek, függvénysorozatok egyenletes és pontonkénti konvergenciája, a határfüggvény határértéke és folytonossága. Normált térbeli értékű függvények terei. Metrikus tér beágyazása Banach-térbe, teljes metrikus burok. Weierstrass approximációs tétele.

6. Banach-féle fixponttétel. Lipschitz-függvények, kontrakciók, Banach-féle fixponttétel. Alkalmazás: az implicit függvény tétel euklidészi térben.

7. Mértékterek. Mértéktér, a mérhető halmazok és a mérték tulajdonságai. Külső mértékek, mértéktér konstruálása, mérték természetes kiterjesztése. Mérték és topológia: generált σ-algebra, Borel-halmazok, Radon-mértékek metrikus tereken.

8. Példák mértékekre. A Lebesgue-mérték a számegyenesen, kapcsolata a topológiával és viselkedése affin transzformációnál. A Cantor-halmaz. Nem Lebesgue-mérhető halmaz létezése. A Lebesgue-Stieltjes mérték a számegyenesen és kapcsolata a topológiával. A Hausdorff-mérték és tulajdonságai.

9. Mérhető függvények. Metrikus térbeli értékű függvények mérhetősége. Borel-függvények. Mérhető függvények alaptulajdonságai. Bővített valós értékű mérhető függvények. Luzin tétele. Mérhető függvények sorozatai. Konvergencia mértékben és majdnem mindenütt. Jegorov tétele, Lebesgue tétele, a Riesz-féle kiválasztási tétel, approximáció egyszerű függvényekkel.

10. Integrál. Nemnegatív mérhető függvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai, Fatou-lemma, Beppo Levi tétele, megszámlálható sok függvény összegének integrálja. Bővített valós értékű függvények integrálja. Az integrál tulajdonságai. Lebesgue tétele, az integrál σ-additivitása és abszolút folytonossága. Komplex és euklidészi térbeli értékű függvények integrálja. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata.

11. Mértékek szorzata. Mértékterek szorzata, Fubini tétele (bizonyítás nélkül). A Lebesgue-mérték az euklidészi téren, kapcsolata a topológiával. A Lebesgue-mérték viselkedése eltolásoknál. Gömbök Lebesgue-mértéke (bizonyítás nélkül). Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása. A Lebesgue–Radon–Nikodym tétel (bizonyítás nélkül).

12. Integrálok kiszámítása. Ismertetés, bizonyítások nélkül, példákkal és magyarázatokkal: Newton–Leibniz formula. Parciális integrálás Lebesgue–Stieltjes-integrálokra. A Lebesgue-integrál és a Lebesgue–Stieltjes-integrál kapcsolata. Parciális integrálás Lebesgue-integrálokra. A Leibniz-szabály. Eloszlásfüggvény, az integrál és az eloszlásfüggvény kapcsolata. Helyettesítéses integrálás.

13. Klasszikus Fourier-sorok. Az $\mathbf{L}^2$-tér. Példák ortonormált rendszerekre. Integrálható függvény klasszikus Fourier-sorának együtthatói nullához tartanak. Dirichlet-formula. Dini-kritérium és következményei: Lipschitz-kritérium, Riemann lokalizációs tétele. Egyéb ortogonális rendszerek. Ortogonális polinomok.

Irodalom

Paul R. Halmos: Mértékelmélet, 1984.
Járai Antal: Mérték és integrál, 1988.
Járai Antal: Modern alkalmazott analízis, 1991.
A. A. Kirillov, A. D. Gvisiani: Feladatok a funkcionálanalízis köréből, 1985.
A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: A függvényelmélet és funkcionálanalízis elemei, 1981.
Laczkovich Miklós: Valós függvénytan, 1995.
Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai, 1978.

Követelményrendszer

Gyakorlati jegy: 2 zárthelyi alapján.

Aláírás: Az előadásokon való részvétel és előadásonként 1 feladat írásbeli beadása alapján. A feladatok a gyakorlaton nem, de a jegyzetben szereplő feladatok közül kerülhetnek ki, vagy kérésre az irodalomjegyzékben szereplő munkák feladatai közül. A feladatokat az egyes anyagrészek befejezése után két héttel kell beadni. Az esetleges elmaradások a következő két hétben kétszer annyi feladat beadásával pótolhatók.

Vizsga: Írásbeli „beugró”: 1 óra alatt 15 kérdésből (definíciók, tételek, egyszerű példák és ellenpéldák) legalább 8-at kell megválaszolni. Ezután kezdhető meg a szóbeli vizsga, anyaga: ami az előadáson elhangzott.