A szedés az $\mathcal{AMS}$-TEX Járai Antal és Járai Zoltán által írt magyar változatával készült.

BEVEZETÉS A MATEMATIKÁBA

FELADATOK

Járai Antal

BEVEZETÉS
A MATEMATIKÁBA
FELADATOK

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

Ez az feladatgyüjtemény azzal a céllal készült, hogy segítséget nyújtson a programtervező matematikus és programtervező informatikus hallgatók számára tartott „Bevezetés a matematikába" gyakorlatokhoz. Bár számos, a Komputer Algebra Tanszék munkatársai által összeállított feladatgyűjtemény áll rendelkezésre (Bruder [5], [6]; Gonda [25], [26]; Lángné [45], [46], [47], [48], [49]), néhány terület egyáltalán nincs, vagy csak hiányosan van lefedve, elsősorban az anyag változása miatt. Olyan feladatokat igyekeztem összegyűjteni, amelyek segítenek megérteni az előadáson tanult általános fogalmakat, illetve rávilágítanak az informatikai alkalmazásokra. A feltétlenül megoldandónak tartott feladatokat $\rightarrow$ jelzi. A törzsanyagon kívüli részeket *-gal jelöltem. A $^\circ$-rel megjelölt részek olyan fogalmakat is felhasználnak, amelyeket még nem definiáltunk; ezek a középiskolai ismeretek alapján általában megoldhatók. Az itt definiált fogalmakat *dőlt* betűvel szedtem.

Ha az első gyakorlat előbb van, mint az első előadás, a teljes indukcióval kapcsolatos, illetve a síkbeli ponthalmazok felvázolásával foglalkozó feladatokkal érdemes kezdeni.

A feladatok nagy részét — mint a legtöbb feladatgyűjteményben teszik — máshonnan vettem át. Valószínűleg azok a feladatok, amelyeket nem átvettem, is szerepelnek már valahol. Mivel a feladatok eredetének kinyomozása lehetetlen, feladatonként nem adok meg hivatkozást, de az irodalomjegyzékben hivatkozom azokra a művekre, amelyekből sok feladat származik.

Budapest, 2007. október 23. *A Szerző*

1. HALMAZOK

1.1. Logikai alapok

→ **1.1.1. Feladat** [**5**]**.** Pozitív egészeket tekintve, jelölje $P(x)$, $E(x)$, $O(x)$ illetve $D(x,y)$ rendre azt, hogy x prím, páros, páratlan, illetve, hogy x osztója y-nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat. Tagadjuk a formulákat, formálisan, illetve köznyelvileg.

(1) $P(7)$;

(2) $(E(2) \wedge P(2))$;

(3) $(\forall x(D(2,x) \Rightarrow E(x)))$;

(4) $(\exists x(E(x) \wedge D(x,6)))$;

(5) $(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2,x)))$;

(6) $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x,y) \Rightarrow E(y)))))$;

(7) $(\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x,y)))))$;

(8) $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x,y)))))$;

(9) $((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y(x \neq y \wedge E(y) \wedge P(y)))))))$.

→ **1.1.2. Feladat** [**7**]**.** Az embereket tekintve, jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x,y)$ illetve $T(x,y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y-nak valamint hogy x tiszteli y-t. Formalizáljuk az alábbi állításokat:

(1) minden bíró jogász;

(2) vannak ügyeskedő jogászok;

(3) nincs ügyeskedő bíró;

(4) bizonyos bírók idősek, de életerősek;

(5) d bíró sem nem idős, sem nem életerős;

(6) a bírók kivételével minden jogász ügyeskedő;

(7) néhány jogász, aki politikus, képviselő is;

(8) egyetlen képviselő felesége sem idős;

(9) minden idős képviselő jogász;

(10) van olyan nő, aki jogász és képviselő;

(11) minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót;

(12) bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek;

(13) van olyan bíró, aki tisztel néhány nőt;

(14) bizonyos ügyeskedők egyetlen jogászt sem tisztelnek;

(15) d bíró egyetlen ügyeskedőt sem tisztel;

(16) vannak jogászok és ügyeskedők is, akik tisztelik d bírót;

(17) csak bírók tisztelnek bírókat;

(18) minden bíró csak bírókat tisztel;

(19) minden nős képviselő életerős;

(20) azok a jogászok, akiknek életerős feleségük van, mind képviselők.

→ **1.1.3. Feladat [4].** Jelölje $N()$, $E()$, $H()$, illetve $B()$ azt, hogy ma süt a nap, hogy ma esik az eső, hogy ma havazik, illetve, hogy tegnap borult volt az ég. Fordítsuk le magyar nyelvre (az üres zárójeleket nem írtuk ki):

(1) $(N \Rightarrow \neg(E \wedge H))$;

(2) $(B \iff N)$;

(3) $(B \wedge (N \vee E))$;

(4) $((B \Rightarrow E) \vee N)$;

(5) $(N \iff ((E \wedge \neg H) \vee B)$;

(6) $((N \iff E) \wedge (\neg H \vee B))$.

→ **1.1.4. Feladat [7].** Definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y-nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga.

1.1.5. Feladat [6]. Bevezetve a $H(x, y)$ predikátumot arra, hogy x és y házastársak, definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y-nak férje, felesége, sógora, sógornője, apósa, anyósa, veje, menye.

1.1.6. Feladat [5]. Az előző két feladatban használt predikátumok mellett milyen prediátumra van még szükségünk, ha bátyja, húga, nénje, stb. fogalmakat is formalizálni akarunk?

→ **1.1.7. Feladat [6].** Formalizáljuk az alábbi állításokat:

(1) Márta nem szőke;

(2) nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz;

(3) esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár;

(4) Éva vagy Pisti ott volt;

(5) ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez;

(6) elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj;

(7) kizárt, hogy se matekból, se fizikából ne menjek át elsőre;

(8) ha a szemtanú megbízható, és az ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor téved az írásszakértő;

(9) szivárvány csak akkor van, ha esik az eső, a Nap is süt, de nincs dél;

(10) minden ajtón van kilincs;

(11) nem mind molnár, ki szekercét fog hóna alá;

(12) ki nem szólt csak bégetett, az kapott dícséretet;

(13) mindig fázom, ha fúj a szél.

1.1.8. Feladat [5]. Formalizáljuk az alábbi térgeometriai axiómákat:

(1) ha egy egyenes két pontja benne van egy síkban, akkor minden pontja benne van;

(2) van négy nem egy síkban fekvő pont;

(3) párhuzamossági axióma.

→ **1.1.9. Feladat [0].** Tegyük fel, hogy a következő három állítás igaz: Ha Éva angolul tud, akkor tud németül vagy franciául is. Éva nem tud németül. Éva valamelyiken beszél a három nyelvből. Következik-e ezekből, hogy Éva tud franciául?

→ **1.1.10. Feladat [6].** Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L, F)$, hogy az L lány táncolt az F fiúval. Formalizáljunk pontosan az alábbi „gyorsírással" felírt formulákat. Döntsük el, hogy melyik következik a másikból. (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, a másik is.)

(1)

$$\exists L \forall F\ T(L,F), \qquad \forall F \exists L\ T(L,F), \qquad \exists F \forall L\ T(L,F),$$

$$\forall L \exists F\ T(L,F), \qquad \forall L \forall F\ T(L,F), \qquad \exists L \exists F\ T(L,F);$$

(2)

$$\neg\exists L \exists F\ T(L,F), \qquad \forall F \exists L\ \neg T(L,F), \qquad \forall L \exists F\ \neg T(L,F), \qquad \forall L \forall F\ \neg T(L,F).$$

1.2. Halmazelméleti alapfogalmak

→ **1.2.1. Feladat** [5]. Legyenek $x = \{\text{alma}, \text{körte}\}$ és $y = \{\text{kutya}, \text{macska}\}$ halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy x eleme, x részhalmaza, illetve x se nem eleme, se nem részhalmaza: $\big\{\{x\}, y\big\}$, x, $\emptyset \cap x$, $\{x\} \setminus \big\{\{x\}\big\}$, $\{x\} \cup x$, $\{x\} \cup \{\emptyset\}$.

1.2.2. Feladat. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.1.2.13.

1.2.3. Feladat. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.1.2.15.

1.2.4. Feladat. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.1.2.16.

→ **1.2.5. Feladat** [0]. Legyen $\mathcal{A} = \big\{\{a,b,c\}, \{a,d,e\}, \{a,f\}\big\}$. Mi lesz $\cup\mathcal{A}$ és $\cap\mathcal{A}$?

→° **1.2.6. Feladat** [5]. Határozzuk meg a $\big\{\{x \in \mathbb{R} : |x| < y\} : y \in \mathbb{R}, y > 0\big\}$ halmazrendszer unióját és metszetét.

° **1.2.7. Feladat** [5]. Határozzuk meg a

$$\big\{\{x \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} : y, r \in \mathbb{R}, |y| \le 1, 1 < r < 5\big\}$$

halmazrendszer unióját és metszetét.

° **1.2.8. Feladat** [5]. Határozzuk meg azon nyílt körlapok rendszerének unióját, illetve metszetét, amelyek sugarára $2 < r < 3$, középpontjuk koordinátáira pedig $0 \le x, y \le 1$.

→ **1.2.9. Feladat** [1]. Adjunk meg olyan halmazrendszert, amely diszjunkt, de nem páronként diszjunkt. Van-e olyan halmazrendszer, amely páronként diszjunkt, de nem diszjunkt?

→ **1.2.10. Feladat** [5]. Ha X egy halmaz, legyen $X^+ = X \cup \{X\}$. Írjuk fel a $\emptyset^+$, $\emptyset^{++}$, $\emptyset^{+++}$ halmazokat. Igaz-e, hogy $\emptyset^+ \in \emptyset^{++}$, hogy $\emptyset^+ \subset \emptyset^{++}$, hogy $\emptyset^+ \cap \emptyset^{++} = \emptyset$, hogy $\emptyset^+ \cup \emptyset^{++} = \emptyset^{++}$, illetve hogy $(\emptyset \cap \emptyset^{++}) \in \emptyset^+$?

1.2.11. Feladat. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.1.2.18.

→ **1.2.12. Feladat** [0]. Bizonyítsuk be, hogy $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$.

→ **1.2.13. Feladat** [3]. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, és $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

→ **1.2.14. Feladat** [3]. Legyen $A, B, C, D \subset X$, és jelölje $'$ az X alaphalmazra vonatkozó komplementert. Egyszerűsítsük, amennyire lehet:

(1) $\Big(A \cup \big(B \cap (C \cup D')\big)\Big)'$;

(2) $\big((A' \cup B) \cap (A \cup B')\big)'$;

(3)
$$\begin{aligned}&(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \\ &\cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C).\end{aligned}$$

1.2.15. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra $A = \emptyset$ pontosan akkor, ha $B = A \triangle B$.

1.2.16. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$, és a tartalmazás lehet valódi.

° **1.2.17. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, \dots, A_n$ halmazok, akkor x pontosan akkor eleme az $A \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$ halmaznak, ha x az $A_1, \dots, A_n$ halmazok közül páratlan soknak eleme.

→ **1.2.18. Feladat [4].** Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra és melyek nem:
(1) $(A \cup B) \setminus A = B$;
(2) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;
(3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
(4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

→ **1.2.19. Feladat.** Írjuk fel a hatványhalmazt egy-egy 0, 1, 2, illetve 3 elemű halmazra.

→ **1.2.20. Feladat [5].** Írjuk fel a $\wp\Big(\wp\big(\wp(\emptyset)\big)\Big)$ halmazt.

1.2.21. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B halmazokra
(1) ha $A \subset B$, akkor $\wp(A) \subset \wp(B)$;
(2) $A = B$ pontosan akkor, ha $\wp(A) = \wp(B)$;
(3) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$;
(4) $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$.
Mikor teljesül egyenlőség (4)-ben?

1.2.22. További feladatok. Részletes megoldással: [6], 1–23; [3]: I.1–I.13; [31]: 1.6, 1.8, 1.11, 1.14–1.34; [48]: 1.0-1.– 2.0-30; [51]: I.1.1–I.1.18, I.1.20, I.1.24-I.1.28, I.1.30–I.1.33; [73]: II.8.2–II.8.5; [74]: 1.1.–1.12, 1.14–1.16, 1.27, 1.28, 1.30.

1.3. Relációk

→ **1.3.1. Feladat [1].** Mutassuk meg, hogy $X \times Y = \emptyset$ pontosan akkor, ha $X = \emptyset$ vagy $Y = \emptyset$.

→ **1.3.2. Feladat [2].** Milyen X, Y halmazokra igaz, hogy $X \times Y = Y \times X$?

1.3.3. Feladat [3]. A $\wp\Big(\wp\big(\{1,2\}\big)\Big)$ halmaz elemeiből melyek a rendezett párok?

1.3.4. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy ha X és Y halmazok, $x \in X$, $y \in Y$, akkor $(x, y) \in \wp\big(\wp(X \cup Y)\big)$.

1.3.5. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy ha $X' \times Y' \neq \emptyset$, akkor $X' \times Y' \subset X \times Y$ pontosan akkor teljesül, ha $X' \subset X$ és $Y' \subset Y$.

1.3.6. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy $(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y$ és $(X \times Y) \cup (X \times Y') = X \times (Y \cup Y')$.

$\rightarrow$ **1.3.7. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy egy R relációra $R = \emptyset$, $\operatorname{dmn}(R) = \emptyset$ és $\operatorname{rng}(R) = \emptyset$ ekvivalensek.

$\rightarrow$ **1.3.8. Feladat [0].** Ha R binér reláció, mi lesz $R(\emptyset)$, $R^{-1}(\emptyset)$, $R\big(\operatorname{dmn}(R)\big)$ és $R^{-1}\big(\operatorname{rng}(R)\big)$?

$\circ$ **1.3.9. Feladat [3].** Határozzuk meg az $R \cap S$ relációt, ha R az m osztója n-nek reláció $\mathbb{N}^+$-on, S pedig az $n = m + 6$ reláció Z-n.

$\rightarrow\circ$ **1.3.10. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, döntsük el, hogy függvény-e, és hogy az inverze függvény-e.

(1) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, x < y < 2x\big\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ adott számok;

(1) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y(1-x^2) = x - 1\big\}$;

(2) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x-1)/(1-x^2)\big\}$;

(3) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\big\}$;

(4) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1 + y^2, y > 0\big\}$;

(5) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y < 0\big\}$;

(6) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\big\}$;

(7) $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y\big(\lfloor x \rfloor - 2\big) = 1\Big\}$;

(8) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - \lfloor x \rfloor\big\}$;

(9) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lfloor x \rfloor^2\big\}$;

(10) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\big\}$;

(11) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^4, 0 < x < 2\big\}$;

(12) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2,\ \text{ha } x \in \mathbb{N}\big\}$;

(13) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \text{ egyébként } y = 1 - x\big\}$.

$\circ$ **1.3.11. Feladat [10].** Ábrázoljuk azon (x, y) valós számpárok síkbeli halmazát, amelyek eleget tesznek a megadott összefüggésnek:

(1) $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4$;

(2) $y^m = x$, $m = 2, 3, 4, 5$;

(3) $y^m = x^n$, $(m, n) = (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3)$;

(4) $xy = 1 + x^2$ (hiperbola);

(5) $xy = 1 + x^3$ (Newton-féle háromágú szigony);

(6) $yx^2 = 1 + x^3$;

(7) $y(1 + x^2) = 1$ (Agnesi-görbe);

(8) $y(1 + x^2) = 2x$ (Newton-féle szerpentin);

(9) $y(1-x^2)=1$;
(10) $y(1-x^2)=x$;
(11) $y^2=-x-2$ (parabola);
(12) $y^2=x^3$ (Neil-féle parabola);
(13) $4y^2+x^2=100$ (ellipszis);
(14) $y^2=x^2-1$ (hiperbola);
(15) $y^2(1+x)=1-x$;
(16) $y^2=x^2(100-x^2)$;
(17) $y^2(10-x)=x^3$ (cisszois);
(18) $|x|^n+|y|^n=1$, $n=1,2,3,4,5,1/2,1/3,1/4$;
(19) $\max\{|x|,|y|\}=1$;
(20) $xy=\lfloor x\rfloor$.

° **1.3.12. Feladat** [**9**]. Ábrázoljuk a megadott valós számpárok síkbeli halmazát:
(1) $\{(1-t,1-t^2):t\in\mathbb{R}\}$;
(2) $\{(t+1/t,t+1/t^2):t\in\mathbb{R}\}$;
(3) $\{(10\cos t,\sin t):t\in\mathbb{R}\}$ (ellipszis);
(4) $\{(5\cos^2 t,3\sin^2 t):t\in\mathbb{R}\}$;
(5) $\Big\{\big(2(t-sint),2(1-\cos t)\big):t\in\mathbb{R}\Big\}$ (ciklois);

° **1.3.13. Feladat** [**9**]. Paraméterezést bevezetve, ábrázoljuk azon (x,y) valós számpárok síkbeli halmazát, amelyek eleget tesznek a megadott összefüggésnek:
(1) $x^3+y^3=3xy$ (Descartes-féle levél);
(2) $x^2+y^2=x^4+y^4$;
(3) $x^2y^2=x^3-y^3$;
(4) $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ (astroid);
(5) $x^y=y^x$, $x,y>0$.

° **1.3.14. Feladat** [**8**]. Polár koordinátára áttérve, ábrázoljuk azon (x,y) valós számpárok síkbeli halmazát, amelyek eleget tesznek a megadott összefüggésnek:
(1) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ (Bernoulli lemniszkátája);
(2) $x^4+y^4=2xy$;
(3) $(x^2+y^2-6x)^2=x^2+y^2$;
(4) $(x^2+y^2-4x)^2=16(x^2+y^2)$;
(5) $x^4+y^4=8xy^2$;
(6) $x^4+y^4=x^2+y^2$;
(7) $(x^2+y^2)^2=27x^2y^2$;
(8) $(x^2+y^2)^2=xy$.

° **1.3.15. Feladat** [8]. Ábrázoljuk az alábbi, (r, φ) polárkoordinátákban megadott síkbeli halmazokat:

(1) $r = \varphi$ (arkhimédészi spirális);

(2) $r = \pi/\varphi$ (hiperbolikus spirális);

(3) $r = \varphi/(1+\varphi)$;

(4) $r = 2^{\varphi/(2\pi)}$ (logaritmikus spirális);

(5) $r = 2(1+\cos\varphi)$ (kardioid);

(6) $r = \sin 3\varphi$ (háromlevelű rozetta);

(7) $r^2 = \cos 2\varphi$ (Bernoulli lemniszkátája).

→° **1.3.16. Feladat** [5]. Az $R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y^2 = 2-x-x^2\big\}$ relációra határozzuk meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$ illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

→° **1.3.17. Feladat** [3]. Írjuk fel intervallumokkal az $x \mapsto |x|$ leképezésnél az alábbi halmazok teljes inverz képét: $[-1,2]$, $]1,4[$, $[-1,2[$.

→ **1.3.18. Feladat** [2]. Mutassuk meg, hogy bármely R relációra és A halmazra $A \subset R^{-1}\big(R(A)\big)$ pontosan akkor, ha $A \subset \operatorname{dmn}(R)$.

→° **1.3.19. Feladat** [7]. Határozzuk meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ szorzatot, ha

(1) $R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y^2 = x\big\}$ és $S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = 2x\big\}$;

(2) $R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} : y^3 = x\big\}$ és $S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = \tan x\big\}$;

(3) $R = \big\{(x,y) \in [-\pi,\pi]\times\mathbb{R} : y = \sin x\big\}$ és $S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y + 1/y = x\big\}$;

(4) $R = S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x < y\big\}$;

(5) $R = S = \big\{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x < y\big\}$;

(6) $R = S = \big\{(x,y) \in \mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+ : x \text{ osztója } y, \text{ de } x \neq y\big\}$;

(7) A tetszőleges halmaz, $R = \big\{(x,y) \in \wp(A)\times\wp(A) : x \cap y = \emptyset\big\}$ és $S = \big\{(x,y) \in \wp(A)\times\wp(A) : x \subset y\big\}$;

(8) K és L két körlap az S síkban és $R = \big\{(x,y) \in S\times S : x = y \text{ vagy } x,y \in K\big\}$ és $S = \big\{(x,y) \in S\times S : x = y \text{ vagy } x,y \in L\big\}$.

→ **1.3.20. Feladat** [5]. Legyen X kételemű halmaz. Határozzuk meg az összes X-beli binér relációt. Keressünk példát a tanult relációtulajdonságok (tranzitív, stb.) mindegyikének teljesülésére és nem teljesülésére is.

° **1.3.21. Feladat** [4]. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a sík egyenesei közötti párhuzamosság illetve merőlegesség?

→ **1.3.22. Feladat** [6]. Az emberek halmazán tekintve, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az apja, szülője, anyja, testvére, féltestvére, egyenesági leszármazottja, egyenesági rokona, gyermeke, nagyszülője, unokája, nagyapja, nagyanyja, anyai nagyszülője relációk?

1.3.23. Feladat [6]. Az emberek halmazán fejezzük ki az előző feladatban szereplő összes relációt az apja és a szülője relációk segítségével.

1.3.24. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy egy X-beli R binér relációra

(1) R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subset R$;

(2) R pontosan akkor intranzitív, ha $(R \circ R) \cap R = \emptyset$;

(3) R pontosan akkor szimmetrikus, ha $R^{-1} = R$;

(4) R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap R^{-1} \subset \mathbb{I}_X$;

(5) R pontosan akkor szigorúan antiszimmetrikus, ha $R \cap R^{-1} = \emptyset$;

(6) R pontosan akkor reflexív, ha $\mathbb{I}_X \subset R$;

(7) R pontosan akkor irreflexív, ha $\mathbb{I}_X \cap R = \emptyset$;

(8) R pontosan akkor trichotom, ha R, R^{-1} és $\mathbb{I}_X$ páronként diszjunktak és egyesítésük $X \times X$;

(9) R pontosan akkor dichotom, ha $R \cup R^{-1} = X$.

→ **1.3.25. Feladat [0].** Mi a hiba a következő okoskodásban? Szimmetrikus és tranzitív R reláció reflexív is, mert ha xRy akkor yRx is, és a tranzitivitás miatt ebből xRx.

→ **1.3.26. Feladat [].** Adjunk példát olyan binér relációra, amely

(1) reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív;

(2) reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus;

(3) tranzitív és szimmetrikus, de nem reflexív.

→ **1.3.27. Feladat [6].** Hány különböző osztályozása van egy 0, 1, 2, 3, illetve 4 elemű halmaznak?

→ **1.3.28. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{P}$ egy osztályozás, akkor a megfelelő ekvivalencia-reláció $\cup\{C \times C : C \in \mathcal{P}\}$.

→ **1.3.29. Feladat [1].** Lehet-e $\emptyset$ ekvivalencia reláció, parciális rendezés, rendezés, szigorú parciális rendezés, illetve szigorú rendezés?

→ **1.3.30. Feladat [2].** Bizonyítsuk be, hogy egy részben rendezett halmaz bármely nem üres részhalmazának bármely alsó korlátja kisebb vagy egyenlő bármely felső korlátjánál.

→ **1.3.31. Feladat [2].** Mutassuk meg, hogy egy részben rendezés inverze is részben rendezés. Mi a kapcsolat a két Hasse-diagramm között?

→° **1.3.32. Feladat [5].** Tekintsük az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazon az osztója részbenrendezést. A megfelelő szigorú relációt írjuk fel párok halmazaként. Keressünk intervallumokat, részhalmazokra alsó és felső korlátokat, infimumot és szuprémumot.

° **1.3.33. Feladat [5].** Mely $n \in \mathbb{N}^+$ számokra alkotnak az n-nek az $\mathbb{N}^+$-beli osztói rendezett halmazt?

$\to^\circ$ **1.3.34. Feladat** [**5**]. Legyen $H \subset \mathbb{R}$. A H halmaz milyen tulajdonságát fejezik ki az alábbi formulák? A kvantorok, x és y valamint $\mathbb{R}$ és H cserélgetésével keresünk további formulákat és fejtsük meg jelentésüket.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in H\ (x < y)$;

(2) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in H\ (x < y)$;

(3) $\forall x \in H\ \exists y \in R\ (x < y)$;

(4) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (x < y)$.

1.3.35. Feladat [**6**]. Mutassuk meg, hogy ha egy rendezett halmaz minden nem üres és felülről korlátos halmazának van pontos felső korlátja, akkor minden nem üres alulról korlátos részhalmazának van pontos alsó korlátja.

$\to^\circ$ **1.3.36. Feladat** [**5**]. Határozzuk meg az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon az „osztója” reláció egy olyan kiterjesztését, amely rendezés.

$\to$ **1.3.37. Feladat** [**13**]. Az alábbiakban egy, az IBM Cell processzorra írt assembly programrészlet van megadva. Minden utasítás az eredményt az elsőként megadott célregiszterbe teszi, az operandusokat pedig a többi regiszterből veszi, kivéve az `x`-re végződő `bgx` és `sfx` utasításokat, ezeknél a célregiszter is operandus. Minden utasításnál megadtuk, hogy `e` vagy `o` típusú, és hogy a végrehajtása hány órajelig tart. A processzor két utasítást bír elkezdeni minden órajelben, de csak ha az első `e`, a második pedig `o` típusú, egyébként csak egyet, és csak akkor, ha az operandusai elkészültek. (A programrészlet elején minden operandus amit megváltoztatás előtt használunk, kész van és nem „szemét”.) Optimalizáljuk a programrészletet: adjuk meg a sorok egy olyan részbenrendezését, amelynek rendezéssé történő kiterjesztései között csupa olyan sorrend szerepel, amelyre igaz, hogy ugyanezt az eredményt adja minden regiszterben, és programmal keressük meg a minimális futásidejű sorrendet. Az utolsó, ugró utasításnak utolsónak kell maradnia!

```
bg      $65,$43,$55     #e2
bg      $64,$42,$54     #e2
bg      $63,$41,$53     #e2
bg      $62,$40,$52     #e2
sf      $43,$43,$55     #e2
sf      $42,$42,$54     #e2
sf      $41,$41,$53     #e2
sf      $40,$40,$52     #e2
shlqbyi $60,$56,0       #e2
shufb   $56,$18,$65,$24 #o4
shufb   $66,$18,$65,$24 #o4
shufb   $55,$65,$64,$24 #o4
shufb   $65,$65,$64,$24 #o4
shufb   $54,$64,$63,$24 #o4
shufb   $64,$64,$63,$24 #o4
shufb   $53,$63,$62,$24 #o4
```

```
shufb   $63,$63,$62,$24 #o4
shufb   $52,$62,$18,$24 #o4
shufb   $62,$62,$18,$24 #o4
bgx     $66,$20,$60     #e2
bgx     $65,$20,$43     #e2
bgx     $64,$20,$42     #e2
bgx     $63,$20,$41     #e2
bgx     $62,$20,$40     #e2
sfx     $56,$20,$60     #e2
sfx     $55,$20,$43     #e2
sfx     $54,$20,$42     #e2
sfx     $53,$20,$41     #e2
sfx     $52,$20,$40     #e2
and     $61,$66,$65     #e2
and     $61,$61,$64     #e2
and     $61,$61,$63     #e2
and     $61,$61,$62     #e2
xor     $60,$61,$18     #e2
gb      $60,$60         #o4
brnz    $60,subkarasqrb #o
```

→ **1.3.38. Feladat** [1]. Jólrendezett-e $\mathbb{N}$ a szokásos rendezés inverzével?

→ **1.3.39. Feladat** [1]. Jólrendezett-e a $\{1-1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz a szokásos rendezéssel?

→ **1.3.40. Feladat** [1]. Ki lehet-e választani jólrendezett halmazban elemek végtelen szigorúan csökkenő sorozatát?

→ **1.3.41. Feladat** [0]. Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz bármely részhalmaza is jólrendezett.

→ **1.3.42. Feladat** [2]. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.1.3.25.

1.3.43. Feladat [5]. Tanulmányozzuk $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-en a lexikografikus rendezést. Adjunk példát olyan végtelen jólrendezett halmazra, amelyben van legnagyobb elem.

→ **1.3.44. Feladat** [4]. Bizonyítsuk be, hogy egy jólrendezett halmazban (kivéve esetleg a legnagyobb elemet, ha van olyan) minden elemnek van közvetlen rákövetkezője.

° **1.3.45. Feladat** [6]. Tanulmányozzuk $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-en a jegyzet 1.3.25. példájában megadott két rendezést. Van-e minden felülről korlátos halmaznak pontos felső korlátja a lexikografikus rendezésnél?

° **1.3.46. Feladat** [6]. Ha A részben rendezett halmaz, definiáljuk a lexikografikus rendezést az A^* halmazon. Ha A rendezett, illetve jólrendezett volt, rendezett, illetve jólrendezett lesz-e A^*?

→ **1.3.47. Feladat [12].** Tervezzünk egy Mini Tanulmányi Rendszert. A szükséges relációkat próbáljuk meg binér relációkra felbontani. Egy oktatónk megbetegedett, egy adott napon nem tud órákat tartani. Küldjünk e-mail-t mindenkinek, akit ez érint. Milyen relációműveletek segítségével tudjuk a szükséges adatokat kinyerni?

1.3.48. További feladatok. Részletes megoldással: [5], 1–19; [3]: I.17–I.24; [48], 2.0-1.– 2.0-9; [51]: I.2.1–I.2.3, I.2.5, I.2.7–I.2.11, I.2.13, I.2.18, I.3.1–I.3.24, I.3.26–I.3.44, I.3.46–I.3.72; [31]: 2.1–2.12, 3.1, 3.2, 3.7, 3.8, 3.11–3.15, 3.17, 3.21, 3.23, 3.26–3.35, 9.1–9.8, 9.10–9.13, 11.1, 11.4, 11.5, 11.7; [73]: II.8.7–II.8.9, III.5.1–III.5.15, III.5.17; [74]: 4.1–4.3, 4.6, 4.7, 4.42–4.44, 4.53, 4.54, 4.77, 4.91, 4.92, 4.95.

1.4. Függvények

→ **1.4.1. Feladat [1].** Milyen X és Y halmazok esetén lesz $X \times Y$ függvény?

→ **1.4.2. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy $Y^X = \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha $Y = \emptyset$ és $X \neq \emptyset$.

→ **1.4.3. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy ha X, Y halmazok, $c \in Y$, akkor az $X \times \{c\}$ *konstans leképezés* függvény.

→ **1.4.4. Feladat [5].** Határozzuk meg az X^Y összes elemét, ha X-nek illetve Y-nak nulla, egy, két illetve három eleme van. Melyek lesznek invertálhatóak?

→° **1.4.5. Feladat [4].** Adjunk példát olyan függvényre, amely

(1) $\mathbb{N}$-et $\mathbb{N}$ valódi részére képezi le, de nem injektív;

(2) $\mathbb{N}$-et $\mathbb{N}$ valódi részére képezi le és injektív;

(3) $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{Z}$ valódi részére képezi le, de nem injektív;

(4) $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{Z}$ valódi részére képezi le és injektív;

(5) $\mathbb{R}$-et $\mathbb{N}$-be képezi le;

(6) $\mathbb{R}$-et $\mathbb{N}$-be képezi le, de egyetlen elem képe sem saját maga.

→ **1.4.6. Feladat [7].** Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Vizsgáljuk meg, hogy tetszőleges $A, B \subset X$ esetén milyen kapcsolat áll fenn az alábbi halmazpárok között (egyenlőség, egyik vagy másik irányú tartalmazás). Ha találtunk összefüggést, bizonyítsuk be, egyébként adjunk ellenpéldát. Mi a helyzet, ha $R : X \to Y$ függvény? Mi a helyzet, ha R egy $f : Y \to X$ függvény inverze?

(1) $R(A \cup B)$ és $R(A) \cup R(B)$;

(2) $R(A \cap B)$ és $R(A) \cap R(B)$;

(3) $\mathrm{dmn}(R) \setminus A$ és $\mathrm{rng}(R) \setminus R(A)$;

(4) $R(A \setminus B)$ és $R(A) \setminus R(B)$;

(5) $R(A \triangle B)$ és $R(A) \triangle R(B)$.

1.4.7. Feladat [5]. Abból, hogy az $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$ függvényekre $g \circ f$ inverze függvény, következik-e, hogy f és g inverze is függvény?

$\to$ **1.4.8. Feladat** [6]. Két részben rendezett halmazt *hasonló*nak nevezünk, ha létezik közöttük bijekció, amely monoton növekedő és az inverze is monoton növekedő. Mi a kapcsolat hasonló halmazok Hasse-diagrammja között?

$\to$ **1.4.9. Feladat** [6]. Hány olyan részbenrendezés van egy 0, 1, 2, 3, 4, illetve 5 elemű halmaznak, amelyek nem hasonlóak? Hány van ezek között, amely rendezés? Minden esetben keressük meg a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemeket és a láncokat.

$\to$ **1.4.10. Feladat** [3]. Ha $f, g \in X \to Y$ függvények, függvény lesz-e $f \cup g$, $f \cap g$, $f \setminus g$, illetve $f \bigtriangleup g$?

1.4.11. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha R reláció az X és Y halmazok között, akkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) R függvény;

(2) bármely $B \subset Y$-ra $R\big(R^{-1}(B)\big) \subset B$;

(3) bármely $A, B \subset Y$-ra $R^{-1}(A \cap B) = R^{-1}(A) \cap R^{-1}(B)$;

(4) ha $A, B \subset Y$ diszjunktak, akkor $R^{-1}(A) \cap R^{-1}(B) = \emptyset$.

1.4.12. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha R reláció az X és Y halmazok között, S pedig reláció az Y és X halmazok között, továbbá $S \circ R = \mathbb{I}_X$ és $R \circ S = \mathbb{I}_Y$, akkor R és S bijektív leképezések és $S = R^{-1}$.

1.4.13. Feladat [5]. Legyenek A, B, C és D halmazok, $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to D$ leképezések. Mutassuk meg, hogy ha $g \circ f$ és $h \circ g$ bijektívek, akkor f, g és h bijektív.

1.4.14. Feladat [6]. Legyenek A, B, és C halmazok, $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to A$ leképezések. Mutassuk meg, hogy ha a $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ és $f \circ h \circ g$ leképezések közül kettő szurjektív, a harmadik pedig injektív, vagy kettő injektív, a harmadik pedig szürjektív, akkor bijektívek, akkor f, g és h bijektív.

1.4.15. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy bármely f függvényre és B halmazra $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap \operatorname{rng}(f)$. Mutassuk meg, hogy az állítás nem marad érvényben, ha f csak reláció.

1.4.16. Feladat [5]. Legyen $f : X \to Y$ függvény. Mutassuk meg, hogy az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) f injektív;

(2) minden $A \subset X$ halmazra $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;

(3) bármely $A, B \subset X$ halmazokra $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(4) bármely diszjunkt $A, B \subset X$ halmazokra $f(A) \cap f(B) = \emptyset$;

(5) ha $A \subset B \subset X$, akkor $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

1.4.17. Feladat [4]. Bizonyítsuk be, hogy bármely R relációra és A_i, $i \in I$ halmazcsaládra $R(\cup_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}R(A_i)$.

$\rightarrow$ **1.4.18. Feladat** [5]. Legyen $X_0 = \{A\}$, $X_1 = \{a,b\}$, $X_2 = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, és $I = \{0,1,2\}$, $J = \{1,2\}$. Adjuk meg $\cup_{i\in I}X_i$-t és $\times_{i\in I}X_i$-t. Adjuk meg $X_1 \times X_2$-t és $\times_{i\in J}X_i$-t. Adjunk meg $\times_{i\in I}X_i$ projekcióját $\times_{i\in J}X_i$-be. Mi a helyzet, ha $X_0 = \emptyset$?

$\rightarrow^\circ$ **1.4.19. Feladat** [5]. Ha $r \in \mathbb{R}$, legyen $K_r = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$. Mi lesz $\cup_{i\in I}K_i$ és $\cap_{i\in I}K_i$, ha $I = \mathbb{R}^+$?

$^\circ$ **1.4.20. Feladat** [6]. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, és

$$H_r = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) < r\}, \quad \text{ha} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Mutassuk meg, hogy $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}}H_r$.

1.4.21. Feladat [6]. Legyenek A_i, B_i, $i \in I$ nem üres halmazcsaládok. Mutassuk meg, hogy

$$(\cup_{i\in I}A_i) \triangle (\cup_{i\in I}A_i) \subset \cup_{i\in I}(A_i \triangle B_i).$$

Mutassuk meg, hogy a tartalmazás lehet valódi. Mi a helyzet, ha unió helyett metszet van?

1.4.22. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy ha $X^Y = Y^X$, akkor $X = Y$.

$\rightarrow$ **1.4.23. Feladat** [5]. Egy személyi törzsadattárból, amely a vállalat dolgozónak adatait tartalmazza, és minden rekordja 7 mezőt tartalmaz, egy listát készítünk, amely az összes dolgozóra a nevét és a beosztását tartalmazza. Mi köze ennek a Descartes-szorzatok projekciójához?

$^\circ*$ **1.4.24. Feladat** [8]. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény és $a, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$. Milyen tulajdonságát fejezik ki a függvénynek az alábbi formulák? Adjunk meg olyan függvény, amely rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

(1) $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \forall x\ \Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)$;

(2) $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \forall x\ \Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)$;

(3) $\exists\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)$;

(4) $\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall x\ \Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)$;

(5) $\exists\delta > 0\ \forall\varepsilon > 0\ \forall x\ \Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)$;

(6) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)$.

$\rightarrow^\circ$ **1.4.25. Feladat** [0]. Művelet-e a valós számokon a kivonás, illetve az osztás?

$\rightarrow$ **1.4.26. Feladat** [3]. Hány nullér, unér illetve binér művelet definiálható egy 0, 1, 2, illetve 3 elemű halmazon?

→ **1.4.27. Feladat** [7]. Keressük meg az összes binér logikai műveletet (azaz az összes műveletet az $\{\uparrow, \downarrow\}$ halmazon). Fejezzük ki mindet a tanult logikai műveletekkel, minél kevesebbel. Keressünk olyan binér műveletet, amellyel minden más binér logikai művelet kifejezhető.

° **1.4.28. Feladat** [7]. Milyen logikai műveletek találhatók például az MMIX vagy az IBM Cell processzor utasításkészletében? Vajon miért pontosan ezek?

→° **1.4.29. Feladat** [5]. Mi köze a kilences, illetve a tizenegyes-próbának a művelettartó leképezésekhez?

1.4.30. További feladatok. [3]: I.25–I.52, I.54–I.90; [31]: 4.2–4.6, 4.10, 4.12–4.14, 4.18–4.20, 4.22–4.30, 5.2–5.6, 5.9–5.11; 6.1–6.9, 9.9, 12.3–12.22; [48]: 2.0-10.– 2.0-19; [51]: I.1.22, I.1.29, I.1.36–39, I.2.4, I.2.6, I.2.12, I.2.15, I.2.16, I.2.19, I.2.20, I.2.21, I.2.25, I.2.28, I.2.30-I.2.43, I.2.46–49, I.2.51; [73]: II.8.10–II.8.25, II.8.33; [tota]: 1.13, 1.17, 1.32–1.36.

2. TERMÉSZETES SZÁMOK

2.1. Peano-axiómák

→° **2.1.1. Feladat [5].** Teljes indukcióval bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

(1)
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

(2)
$$1^2+2^2+3^2\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(3)
$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

(4)
$$1\cdot 2\cdots m+2\cdot 3\cdots(m+1)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+m-1)=\frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1};$$

(5)
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2;$$

(6)
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n};$$

(7)
$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1.$$

2.1.2. Feladat [8]. Bizonyítsuk be Nikomakhosz tételét: $1^3=1$, $2^3=3+5$, $3^3=7+9+11$, $4^3=13+15+17+19$, stb. Vezessük le ebből az előző feladat (5) összefüggését.

→° **2.1.3. Feladat [1].** Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Azt látjuk be, hogy bármely egész szám megegyezik a rákövetkezőjével, azaz $n=n+1$. Tegyük fel, hogy ez igaz n-re. Ekkor $n+1$-re is, mert $n=n+1$-ből $n+1=(n+1)+1$.

→° **2.1.4. Feladat** [4]. Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy a sík összes pontja egy egyenesen van. Megmutatjuk, hogy akárhogy veszünk véges sok pontot, azok egy egyenesen vannak. Egy es' két pontra ez igaz. Tegyük fel, hogy bármely n pont egy egyenesen van. Vegyünk $n+1$ pontot. Az első n pont egy egyenesen van. Vegyünk el ezek közül egyet, és adjuk hozzá az $n+1$-edik pontot. Ez az n pont egy egyenesen van, tehát az $n+1$ pont egy egyenesen van.

→° **2.1.5. Feladat** [4]. Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy adott a pozitív valós számra és bármely $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra $a^{n-1} = 1$. Az állítás igaz, ha $n = 1$. Ha igaz bármely $n+1$-nél kisebb számra, akkor

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{(n-1)-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

→° **2.1.6. Feladat** [4]. Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Ha $n = 1$, akkor $3/2 - 1/n = 1/(1 \cdot 2)$, és ha n-re igaz, akkor

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

° **2.1.7. Feladat** [5]. Teljes indukcióval bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

(1)
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n};$$

(2)
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

(3)
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

(4)
$$0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12};$$

(5)
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

→° **2.1.8. Feladat** [6]. Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket:

(1)
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1);$$

(2)
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2);$$

(3)
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2.$$

$\circ$ **2.1.9. Feladat** [**9**]**.** Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket:

(1)
$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)};$$

(2)
$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

(3)
$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4.$$

$\circ$ **2.1.10. Feladat** [**11**]**.** Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket:

(1)
$$\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} + \cdots + \frac{(-1)^n (2n+1)^3}{(2n+1)^4+4};$$

(2)
$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n 2^n;$$

(3)
$$1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

$\circ$ **2.1.11. Feladat** [**5**]**.** Bizonyítsuk be a *Bernoulli-egyenlőtlenség*et:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

ahol $x_1, \ldots x_n$ azonos előjelű és -1-nél nagyobb valós számok.

$\circ$ **2.1.12. Feladat** [**5**]**.** Igazoljuk, hogy $x > -1$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén fennáll az $(1+x)^n \geq 1 + nx$ egyenlőtlenség és egyenlőség csak $n = 1$ vagy $x = 0$ esetén teljesül.

$\to\circ$ **2.1.13. Feladat** [**6**]**.** Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra

(1)
$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n};$$

(2)
$$\frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

$\circ$ **2.1.14. Feladat** [**6**]**.** Igazoljuk, hogy

(1)
$$\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \le 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(2)
$$\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(3)
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} > 2, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(4)
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(5)
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(6)
$$n^{6/7} \le \frac{1}{\sqrt[7]{1}} + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}} \le \frac{7}{6} n^{6/7}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(7)
$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(8)
$$2^n > n^2, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 4;$$

(9)
$$3^n > n^3, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 3;$$

(10)
$$2^n > n^3, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 9;$$

(11)
$$3^n > 2^n + 7n, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 3;$$

(12)
$$n^{n+1} > (n+1)^n, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 2;$$

° **2.1.15. Feladat [7].** Hány részre osztja a síkot n egyenes, ha közülük semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három nem megy át egy ponton?

° **2.1.16. Feladat [9].** Bizonyítandó, hogy véges sok egyenes (vagy kör) a síkot olyan tartományokra bontja, amelyek kiszínezhetők két színnel úgy, hogy azonos színű tartományoknak nincs közös határvonaluk.

$^{\circ *}$ **2.1.17. Feladat[9].** Írjunk a $\dots \varepsilon > 0\ \dots N\ \dots n \geq N\ \big(|a_n - A| < \varepsilon\big)$ kifejezésbe, amelyben $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat, $A, \varepsilon \in \mathbb{R}$ és $n, N \in \mathbb{N}$, a kipontozott részek helyére kvantorokat az összes lehetséges módon. Milyen tulajdonságát fejezik ki a sorozatnak a kapott formulák? Adjunk meg olyan sorozatot, amely rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

$^{\circ *}$ **2.1.18. Feladat[8].** Az előző feladat jelöléseivel, milyen tulajdonságát fejezik ki az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozatnak az alábbi formulák? Adjunk meg olyan sorozatot, amely rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

(1) $\exists N\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N\ \big(|a_n - A| < \varepsilon\big)$;

(2) $\exists N\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq N\ \big(|a_n - A| < \varepsilon\big)$;

(3) $\forall N\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \geq N\ \big(|a_n - A| < \varepsilon\big)$;

(4) $\forall N\ \exists \varepsilon > 0\ \exists n \geq N\ \big(|a_n - A| < \varepsilon\big)$.

$^{\circ *}$ **2.1.19. Feladat [10].** Írjunk a $\dots A\ \dots N\ \dots n \geq N\ (a_n > A)$ kifejezésbe, amelyben $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat, $A \in \mathbb{R}$ és $n, N \in \mathbb{N}$, írjunk a kipontozott részek helyére kvantorokat az összes lehetséges módon, illetve permutáljuk a kvantoros részeket. Milyen tulajdonságát fejezik ki a sorozatnak a kapott formulák? Adjunk meg olyan sorozatot, amely rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

$\to^{\circ}$ **2.1.20. Feladat [3].** Ha Y és Z az X alaphalmaz részhalmazai, fejezzük ki az $X \setminus Y$, $Y \cap Z$, $Y \cup Z$, $Y \setminus Z$ és $Y \triangle Z$ halmazok karakterisztikus függvényeit χ_Y és χ_Z segítségével.

$\to^{\circ}$ **2.1.21. Feladat [3].** Az informatikában elterjedt az *Iverson-konvenció*: ha

$$Y = \big\{x \in X : \mathcal{F}(x)\big\}$$

az X részhalmaza, akkor karakterisztikus függvényét $\big[\mathcal{F}(x)\big]$ jelöli. Adjuk meg másként az $x \mapsto [x \neq 0]/\big(x + [x = 0]\big)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt.

2.1.22. További feladatok. [51]: I.2.44, I.2.45; [74]: 1.37.

2.2. Műveletek természetes számokkal

$\rightarrow$ **2.2.1. Feladat** [**3**]. Bizonyítsuk be, hogy természetes számokra

(1) $m + n = 0$ esetén $m = 0$ és $n = 0$;

(2) $mn = 0$ esetén $m = 0$ vagy $n = 0$;

(3) $m + n = 1$ esetén $m = 1$ vagy $n = 1$;

(4) $mn = 1$ esetén $m = 1$ és $n = 1$.

$\rightarrow^{\circ}$ **2.2.2. Feladat** [**6**]. Az alábbi, képlettel megadott sorozatokat definiáljuk rekurzióval. (Hasonló rekurziókat használt Babbage első számítógépe polinomok értékeinek kiszámítására, és ezáltal trigonometrikus függvények értékeinek közelítésére.)

(1) $a_n = (-1)^n$;

(2) $a_n = n^2$;

(3) $a_n = (2n + 3)^2$;

(4) $a_n = n^3$;

(5) $a_n = n^3 - n^2 - 2n + 3$;

(6) $a_n = n$, ha n páros, és $a_n = 1$, ha n páratlan.

$\rightarrow$ **2.2.3. Feladat** [**3**]. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.2.2.8

$\rightarrow$ **2.2.4. Feladat** [**3**]. Definiáljuk a természetes számok hatványozását természetes szám kitevőre. Vizsgáljuk meg a tulajdonságait.

$\rightarrow$ **2.2.5. Feladat** [**3**]. Hány kommutatív binér művelet definiálható egy 0, 1, 2, illetve 3 elemű halmazon?

$\rightarrow$ **2.2.6. Feladat** [**5**]. Adjunk példát semleges elemes grupoidra, amelyben egy elemnek több inverze is van.

$\rightarrow$ **2.2.7. Feladat** [**5**]. Hány olyan binér művelet van a $\{uparrow, \downarrow\}$ halmazon, amellyel semleges elemes félcsoport?

$\rightarrow$ **2.2.8. Feladat** [**5**]. Hány olyan binér művelet van a $\{uparrow, \downarrow\}$ halmazon, amellyel félcsoport, amelyben nincs semleges elem, de van jobb illetve bal oldali semleges elem?

$\rightarrow$ **2.2.9. Feladat** [**6**]. Hány olyan binér művelet van a $\{uparrow, \downarrow\}$ halmazon, amellyel félcsoport? A műveleteket fejezzük ki $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ és $\iff$ segítségével.

$\rightarrow$ **2.2.10. Feladat** [**8**]. Hányféleképpen tudunk műveletet definiálni egy háromelemű halmazon úgy, hogy azzal egységelemes félcsoport legyen?

$\rightarrow$ **2.2.11. Feladat** [**8**]. Hányféleképpen tudunk műveletet definiálni egy 0, 1, 2, 3 illetve 4 elemű halmazon úgy, hogy azzal Abel-csoport legyen?

$\rightarrow$ **2.2.12. Feladat** [**9**]. Hányféleképpen tudunk műveletet definiálni egy 0, 1, 2, 3 illetve 4 elemű halmazon úgy, hogy azzal csoport legyen?

° **2.2.13. Feladat [6].** Vizsgáljuk meg, teljesül-e az asszociativitás, kommmutativitás, egységelem létezése, illetve inverz elem létezése az alábbi esetekben:

(1) $(\mathbb{N}^+, \star)$, ahol $x \star y = xy - x + y$;

(2) $(\mathbb{N}^+, \star)$, ahol $x \star y = xy + x + y$;

(3) $(\mathbb{N}, \star)$, ahol $x \star y = xy + x + y$;

(4) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $x \star y = x$;

(5) $(\mathbb{R}, \star)$, ahol $x \star y = ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített;

(6) $(A \times B, \star)$, ahol $(x, x') \star (y, y') = (x, y')$, A, B nem üres halmazok.

2.2.14. Feladat [6]. Az alábbi állítások mikor igazak minden csoportban, minden a, b, x, y elemre? Az érvényeseket bizonyítsuk be, a többire adjunk ellenpéldát:

(1) ha $axb = ayb$, akkor $x = y$;

(2) ha $x^{-1} = y^{-1}$, akkor $x = y$;

(3) ha $xa = ay$, akkor $x = y$;

(4) ha $xy = 1$, akkor $y = x^-1$;

(5) ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$;

(6) ha $(xy)^2 = x^2y^2$, akkor $xy = yx$.

2.2.15. Feladat [8]. Legyen G kommutatív félcsoport, amelyben $x^2 = x$ minden $x \in G$-re. Mutassuk meg, hogy $\big\{(x, y) \in G \times G : xy = x\big\}$ olyan részben rendezés, amelyre minden $\{x, y\} \subset G$ halmaznak van szuprémuma. Megfordítva, mutassuk meg, hogy ha adott egy olyan részben rendezés a G halmazon, amelyre minden $\{x, y\} \subset G$ halmaznak van szuprémuma, akkor az $(x, y) \mapsto \sup\{x, y\}$ művelettel G kommutatív félcsoport, amelyben $x^2 = x$ minden $x \in G$-re.

2.2.16. Feladat [10]. Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.2.2.7

2.3. A természetes számok rendezése

→ **2.3.1. Feladat [5].** Adott $A_0, A_1, \ldots$ halmazsorozathoz adjunk meg olyan, páronként diszjunkt halmazokból álló $B_0, B_1, \ldots$ halmazsorozatot, amelyre $\cup_{i=0}^{n} A_i = \cup_{i=0}^{n} B_i$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mutassuk meg, hogy $\cup_{i=0}^{\infty} A_i = \cup_{i=0}^{\infty} B_i$.

→ **2.3.2. Feladat [3].** Mikor lesz a jegyzet 2.3.6. példájában szereplő félcsoport kommutatív? Hogy hívják az elemeit a programozási nyelvekben? Hogy hívják a műveletet a programozási nyelvekben?

→° **2.3.3. Feladat [5].** Az alábbi, általános rekurzióval megadott sorozatokat hozzuk zárt alakra:

(1) $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$;

(2) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

° **2.3.4. Feladat** [**9**]. Az alábbi sorozatokat adjuk meg általános rekurzióval:

(1) a_n az n-edik prímszám;

(2) a_n a $\sqrt{2}$ tizedes kifejtésének n-edik jegye.

→° **2.3.5. Feladat** [**7**]. Bizonyítsuk be, hogy az n-edik Fibonacci-számra

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

° **2.3.6. Feladat** [**2**]. Határozzuk meg az F_{1000} Fibonacci-szám közelítő értékét.

° **2.3.7. Feladat** [**4**]. Mennyi $\cos 36°$? Szerkesszünk szabályos ötszöget.

° **2.3.8. Feladat** [**5**]. Fejezzük ki az alábbi, rekurzióval adott sorozatokat a Fibonacci-számok segítségével, ($r, s, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges):

(1) $a_0 = r$, $a_1 = s$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ha $n \in \mathbb{N}$;

(2) $b_0 = r$, $b_1 = s$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + c$, ha $n \in \mathbb{N}$.

2.3.9. Feladat [**5**]. Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat:

(1) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, ha $n \in \mathbb{N}^+$;

(2) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$, ha $n \in \mathbb{N}$.

° **2.3.10. Feladat** [**7**]. Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot. Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket:

(1) $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}$;

(2) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n+1}$;

(3) $F_0 + F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n}$;

(4) $F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \cdots F_{2n-1}F_{2n}$.

° **2.3.11. Feladat** [**6**]. Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat:

(1) $F_mF_{n-1} + F_{m-1}F_n = F_{n+m}$, ha $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^+$;

(2) $F_{n+k}F_{m-k} - F_nF_m = (-1)^nF_{m-n-k}F_k$, ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n + k$.

° **2.3.12. Feladat** [**2**]. Keressük meg az összes olyan F_n Fibonacci-számot, amelyre $F_n = n$, illetve $F_n = n^2$.

° **2.3.13. Feladat** [**9**]. Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot. Fejezzük ki a Fibonacci-számok segítségével az alábbi összegeket:

(1)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}, \quad k, n \in \mathbb{N};$$

(2)
$$\sum_{k=0}^{n} F_k;$$

(3)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k}, \quad k, m, n \in \mathbb{N};$$

(4)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{r+1}^{k} F_r^{n-k} F_{m+k}, \quad k, m, n, r \in \mathbb{N}.$$

→° **2.3.14. Feladat** [5]. Legyen $p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$, tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gyökei a p polinomnak, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ pedig tetszőleges számok. Mutassuk meg, hogy az $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots \alpha_m \lambda_m^n$ sorozat eleget tesz az $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{n-k}$ rekurziónak minden $n \geq k$-ra.

→° **2.3.15. Feladat** [5]. Adjunk zárt formulát az alábbi, általános rekurzióval definiált sorozatok n-edik tagjára:

(1) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n > 1$;

(2) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, ha $n > 1$;

(3) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n > 1$;

(4) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, ha $n > 2$.

°* **2.3.16. Feladat** [6]. Legyen $p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$, tegyük fel, hogy λ a p polinomnak kétszeres gyöke, azaz p felírható $p(x) = (x - \lambda)^2 q(x)$ alakban valamely q polinommal. Mutassuk meg, hogy az $a_n = n\lambda^n$ sorozat eleget tesz az $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{n-k}$ rekurziónak minden $n \geq k$-ra.

° **2.3.17. Feladat** [5]. Adjunk zárt formulát az $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, ha $n \geq 3$ általános rekurzióval definiált sorozat n-edik tagjára.

° **2.3.18. Feladat** [5]. Adjunk zárt formulát az $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$, ha $n > 2$ általános rekurzióval definiált sorozat n-edik tagjára.

° **2.3.19. Feladat** [5]. Adjunk zárt formulát az $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_n = -(2u_{n-1} + u_{n-2})$, ha $n > 2$ általános rekurzióval definiált sorozat n-edik tagjára. Külön vizsgáljuk meg az $a = 1$, $b = -1$ és $a = 1$, $b = -2$ speciális eseteket.

° **2.3.20. Feladat** [5]. Adjunk zárt formulát az $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2})$, ha $n > 2$ általános rekurzióval definiált sorozat n-edik tagjára.

2.3.21. Feladat: Catalan-számok [11]. Egy kártyacsomag n különböző lapot tartalmaz. Minden időpontban két dolog között választhatunk: vagy leveszünk a csomagból egy lapot (ha még van), és egy „veremre” tesszük, vagy a verem tetején levő lapot kiadjuk (ha a verem nem üres). Jelölje a lehetséges lépéssorozatok számát C_n. Mutassuk meg, hogy

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0.$$

(A C_n *Catalan-számok* sok helyen előkerülnek, például irányított fák leszámlálásánál.)

°* **2.3.22. Feladat: Catalan-számok [12].** Az előző feladat jelöléseivel bizonyítsuk be, hogy

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

* **2.3.23. Feladat [13].** Adjunk használható algoritmust tetszőleges pontosságú természetes számok maradékos osztására bináris számítógépen.

→ **2.3.24. Feladat [4].** Adjunk használható algoritmust tetszőleges pontosságú természetes számok decimális ábrázolásról binárisra való konverziójára bináris számítógépen.

→ **2.3.25. Feladat [4].** Adjunk használható algoritmust tetszőleges pontosságú természetes számok bináris ábrázolásról decimálisra való konverziójára bináris számítógépen.

2.3.26. Feladat [8]. Adjunk gyors algoritmust tetszőleges pontosságú természetes számok decimális ábrázolásról binárisra való konverziójára bináris számítógépen, ha a szorzásra van olyan algoritmusunk, amelynek futásideje „majdnem arányos” a szám hosszával.

2.3.27. Feladat [8]. Adjunk gyors algoritmust tetszőleges pontosságú természetes számok bináris ábrázolásról decimálisra való konverziójára bináris számítógépen, ha a szorzásra és a maradékos osztásra van olyan algoritmusunk, amelynek futásideje „majdnem arányos” a szám hosszával.

° **2.3.28. Feladat [9].** Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot. Mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^+$ egyértelműen felírható $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m}$ alakban, ahol $m \in \mathbb{N}^+$ és a $0, k_1, k_2, \ldots, k_m$ sorozat szigorúan monoton növekedő és nem tartalmaz egymás melletti számokat.

2.3.29. További feladatok. [31]: 8.9, 8.11–8.15, 12.1, 12.2; [51]: I.1.34, I.1.35, I.1.40, I.1.41; [59]: 4.5.1–4.1.13; [74]: 1.38–1.44.

3. A SZÁMFOGALOM BŐVÍTÉSE

3.1. Egész számok

$\rightarrow$ **3.1.1. Feladat** [4]**.** Soroljuk egy osztályba $\mathbb{N}^+$ azon elemeit, amelyekre az a legnagyobb $n \in \mathbb{N}^+$ kitevő, amelyre 5^n osztja a számot, ugyanannyi. Mutassuk meg, hogy ez az osztályozás kompatibilis a szorzással. Mi a helyzet, ha 5 helyett 6-ot veszünk?

$\rightarrow$ **3.1.2. Feladat** [6]**.** Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.3.1.7.

$\rightarrow^\circ$ **3.1.3. Feladat** [6]**.** A jegyzet 3.1.8. pontjában megadott gyűrűk között keresünk olyat, amelyik egységelemes, amelyik nem egységelemes, amelyik kommutatív, amelyik nem kommutatív, amelyik nullosztómentes, és amelyikben vannak nullosztók.

$\rightarrow$ **3.1.4. Feladat** [6]**.** Hányféleképpen értelmezhetünk olyan összeadást és szorzást a $\{0, a, b\}$ halmazon, amelyekkel gyűrű? Minden esetben határozzuk meg az elemek többszöröseit és hatványait.

$\rightarrow$ **3.1.5. Feladat** [6]**.** Hányféleképpen értelmezhetünk olyan összeadást és szorzást a $\{0, 1, a, b\}$ halmazon, amelyekkel egységelemes gyűrű? Minden esetben határozzuk meg az elemek többszöröseit és hatványait.

$\rightarrow$ **3.1.6. Feladat** [0]**.** Mutassuk meg, hogy egy rendezett integritási tartományban ha $x < y$ és $y \leq z$, akkor $x < z$.

$\rightarrow$ **3.1.7. Feladat** [3]**.** Mutassuk meg, hogy a $\{m + n\sqrt{5} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz rendezett integritási tartomány a szokásos összeadással, szorzással és rendezéssel.

$\rightarrow$ **3.1.8. Feladat** [4]**.** Mutassuk meg, hogy a $\{m/3^n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz rendezett integritási tartomány a szokásos összeadással, szorzással és rendezéssel. Mely elemeknek van (multiplikatív) inverze?

3.2. Racionális számok

→ **3.2.1. Feladat** [6]. Adjunk meg olyan összeadást és szorzást a $\{0, 1, a, b\}$ halmazon, amelyekkel test.

→ **3.2.2. Feladat** [6]. Bizonyítsuk be, hogy véges test nem tehető rendezett testté.

→ **3.2.3. Feladat** [7]. Ellenőrizzük, hogy a racionális számok halmaza Abel-csoport az $(a, b) \to a+b+1$ művelettel. Mi lesz a nullelem? Adjunk meg olyan szorzást, amellyel testet kapunk. Igaz-e hasonló állítás minden testre, illetve egységelemes gyűrűre?

3.2.4. Feladat [9]. Legyen K a racionális számok egy olyan részhalmaza amelynek legalább három eleme van és tartalmazza az 1-et. Tegyük fel, hogy ha $a, b \in K$ és $a \neq 0$, akkor $(1/a) - b \in K$. Mutassuk meg, hogy K test.

3.3. Valós számok

→ **3.3.1. Feladat** [4]. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbb{R}$ racionális, $y \in \mathbb{R}$ pedig irracionális, akkor $x + y$ irracionális. Igaz-e, hogy irracionálisok összege irracionális?

→ **3.3.2. Feladat** [4]. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$ racionális, $y \in \mathbb{R}$ pedig irracionális, akkor xy irracionális. Igaz-e, hogy irracionálisok szorzata irracionális?

3.3.3. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\sqrt{n}$ vagy egész, vagy irracionális.

3.3.4. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális.

3.3.5. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy ha $n, k \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[k]{n}$ vagy egész, vagy irracionális.

3.3.6. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy $\{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$ test a valós számok szokásos műveleteivel.

3.3.7. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[3]{2} \notin \{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$.

3.3.8. Feladat [8]. Bizonyítsuk be, hogy $\{p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6} : p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$ test a valós számok szokásos műveleteivel.

3.3.9. Feladat [8]. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b pozitív racionális számok, akkor $\{p + q\sqrt{a} + r\sqrt{b} + s\sqrt{ab} : p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$ test a valós számok szokásos műveleteivel. Általánosítsuk az állítást akárhány pozitív racionális számra.

→ **3.3.10. Feladat** [3]. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\max\{a, b\} = \frac{|a-b| + a + b}{2}, \qquad \min\{a, b\} = \frac{-|a-b| + a + b}{2}.$$

→ **3.3.11. Feladat** [0]. Határozzuk meg az alábbi maradékok értékét:

(1) $100 \bmod 3$;

(2) $100 \bmod 7$;

(3) $-100 \bmod 7$;

(4) $-100 \bmod 0$;

(5) $5 \bmod -3$;

(6) $18 \bmod -3$;

(7) $-2 \bmod -3$;

(8) $1{,}1 \bmod 1$;

(9) $0{,}11 \bmod 0{,}1$;

(10) $0{,}11 \bmod -0{,}1$.

→ **3.3.12. Feladat [1].** Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor

(1) $\lfloor x \rfloor < n$ pontosan akkor, ha $x < n$;

(2) $n \le \lfloor x \rfloor$ pontosan akkor, ha $n \le x$;

(3) $\lceil x \rceil \le n$ pontosan akkor, ha $x \le n$;

(4) $n < \lceil x \rceil$ pontosan akkor, ha $n < x$;

(5) $\lfloor x \rfloor = n$ pontosan akkor, ha $x - 1 < n \le x$;

(6) $\lfloor x \rfloor = n$ pontosan akkor, ha $n \le x < n + 1$;

(7) $\lceil x \rceil = n$ pontosan akkor, ha $x \le n < x + 1$;

(8) $\lceil x \rceil = n$ pontosan akkor, ha $n - 1 < x \le n$.

→ **3.3.13. Feladat [3].** A modern processzorokban négyféle egészre kerekítési mód állítható be (az IEEE 754 szabvány szerint): $+\infty$ felé, $-\infty$ felé, 0 felé, és a legközelebbi egészre, ha két ilyen van, akkor a párosra. Írjuk fel mindegyiknek az eredményét a tanult jelölésekkel.

→ **3.3.14. Feladat [4].** Mely összefüggések teljesülnek az alábbiak közül bármely $x \in \mathbb{R}^+$-ra:

(1) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$;

(2) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$;

(3) $\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$.

3.3.15. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$-re $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x \bmod 1 + y \bmod 1 < 1$. Teljesül-e hasonló összefüggés a felső egész részre?

3.3.16. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy ha az $m \in \mathbb{N}^+$ számot q alapú számrendszerben írjuk fel, ahol $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, akkor q^j együtthatója $\lfloor m/q^j \rfloor - q\lfloor m/q^{j+1} \rfloor$, ha $j \in \mathbb{N}$.

3.3.17. Feladat [9]. Mutassuk meg, hogy

(1) minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+2} \rfloor$;

(2) van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre $\lfloor \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} \rfloor \neq= \lfloor \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2} \rfloor$.

3.3.18. Feladat: öröknaptár [8]. Mutassuk meg, hogy ha d, m és y rendre a nap, hónap és év, akkor az 1582. évet követő időpontokra (azóta használatos a Gergely-naptár)

(1) $h = [y mod 4 = 0] - [y mod 100 = 0] + [y mod 400 = 0]$ szökőév esetén 1, egyébként nulla;

(2) $x = \big(d + \lfloor 2{,}6n - 0{,}2 \rfloor + r + \lfloor r/4 \rfloor + \lfloor h/4 \rfloor - 2h - (1+s)\lfloor n/11 \rfloor\big) \bmod 7$ vasárnap 0, hétfőn 1, stb., szombaton 6; itt $h = \lfloor y/100 \rfloor$ az év „évszázad-része, $r = y \bmod 100$ pedig a maradék része, $n = 1 + \big((m-3) \bmod 12\big)$ pedig a hónap „módosított sorszáma”, márciust véve elsőnek (mert február a szökőhónap).

→ **3.3.19. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy $\{r + s\sqrt{2} : r, s \in \mathbb{Q}\}$ test a szokásos összeadással és szorzással.

3.3.20. Feladat [4]. Határozzuk meg az alábbi feltételt kielégítő valós számok halmazát:

(1) $|x+1| < 1/4$;

(2) $|x-2| > 5$;

(3) $|x| > |x-1|$;

(4) $|2x-1| < |x-1|$;

(5) $|x+2| + |x-2| \leq 12$;

(6) $|x+2| - |x| > 1$;

(7) $\big||x+1| - |x-1|\big| < 1$;

(8) $\big|x(1-x)\big| < 3$.

→ **3.3.21. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi valós számhalmazok felső és alsó határát, minimumát és maximumát, ha létezik:

(1) $\{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$;

(2) $\{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$;

(3) $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$;

(4) $\{(-1)^n/n : n \in \mathbb{N}^+\}$;

(5) $\{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$;

(6) $\{1/2^n + 1/2^m : n, m \in \mathbb{N}^+\}$.

→ **3.3.22. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett test pontosan akkor felső határ tulajdonságú, ha *alsó határ tulajdonságú*, azaz ha minden nem üres alulról korlátos részhalmazának van legnagyobb eleme, továbbá A pontosan akkor felülről korlátos, ha $-A$ alulról korlátos, és ekkor $\inf(-A) = -\sup A$.

3.3.23. Feladat [4]. Legyen X nem üres halmaz, $f, g : X \to \mathbb{R}$ függvények. Mutassuk meg, hogy ha $f(X)$ és $g(X)$ felülről korlátosak, akkor $f+g$ értékkészlete is felülről korlátos, és $\sup f(X) + \sup g(X) = \sup(f+g)(X)$, valamint ha $g(X)$ még alulról is korlátos, akkor és $g(X)$ felülről korlátosak, akkor $f+g$ értékkészlete is felülről korlátos, és $\sup f(X) + \sup g(X) = \sup(f+g)(X)$.

3.3.24. Feladat [4]. Legyen X nem üres halmaz, $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ függvények. Mutassuk meg, hogy $\inf f(X) \inf g(X) = \inf(fg)(X)$, valamint ha $f(X)$ és $g(X)$ felülről korlátosak, akkor fg értékkészlete is felülről korlátos, és $\sup f(X) \sup g(X) = \sup(fg)(X)$.

3.3.25. Feladat [6]. Legyen X nem üres halmaz, $f, g : X \to \mathbb{R}$ függvények. Mit tudunk mondani $\inf f(X)$, $\inf g(X)$, $\sup f(X)$ és $\sup g(X)$ valamint $\inf(fg)(X)$, $\sup(fg)(X)$, $\inf(1/g)(X)$ és $\sup(1/g)(X)$ kapcsolatáról?

3.3.26. Feladat [4]. Legyen A_i, $i \in I$ az $\mathbb{R}$ felülről korlátos, nem üres részhalmazainak egy nem üres családja. Mutassuk meg, hogy $\cup_{i \in I} A_i$ pontosan akkor felülről korlátos, ha a $B = \{\sup A_i : i \in I$ halmaz felülről korlátos, és ekkor $\sup A = \sup B$.

3.3.27. Feladat [7]. Ellenőrizzük, hogy a pozitív valós számok halmaza Abel-csoport az $(a, b) \to a \cdot b$ művelettel. Mi lesz a semleges elem? Adjunk meg ehhez az „összeadáshoz” olyan szorzást, amellyel testet kapunk.

3.3.28. Feladat [9]. Ellenőrizzük, hogy a pozitív racionális számok halmaza Abel-csoport az $(a, b) \to a \cdot b$ művelettel. Mi lesz a semleges elem? Bizonyítsuk be, hogy ehhez az „összeadáshoz” nincs olyan szorzás, amellyel testet kapunk.

3.3.29. Feladat [6]. Bizonyítsuk be az intervallumskatulyázási axiómát.

3.3.30. Feladat [6]. Az intervallumskatulyázási axiómában megköveteljük, hogy az egymásba skatulyázott intervallumok zártak, korlátosák és nem üresek. Ellenőrizzük, hogy az állítás nem marad igaz, ha bármelyik feltétel elhagyjuk.

$\circ *$ **3.3.31. Feladat** [12]. Tekintsük $\mathbb{Q}(x)$-et azzal a rendezéssel, amelyben $r > s$, ha $r - s$ számlálója és nevezője azonos előjelű. Ellenőrizzük, hogy $\mathbb{Q}(x)$ rendezett test. Mutassuk meg, hogy nem archimédeszien rendezett. Mutassuk meg, hogy nem teljesül az intervallumskatulyázási tulajdonság.

3.3.32. További feladatok. [59]: 4.1.3, 4.1.4, 4.1.6–4.1.8, 4.1.10, 4.1.15, 4.1.16, 4.1.18, 4.1.22, 4.1.24;

3.4. Komplex számok

→ **3.4.1. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $z_1, z_2, \dots, z_n$ komplex számokra $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots |z_n|$.

→ **3.4.2. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges z, w komplex számokra fennáll a *paralelogramma-azonosság*: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

→ **3.4.3. Feladat [6].** Legyen $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ha

$$x = \sqrt{\frac{|w| + u}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{|w| - u}{2}},$$

akkor $z = x + iy$-ra $v \ge 0$ esetén $z^2 = w$, ha pedig $v \le 0$, akkor $\overline{z}^2 = w$.

→ **3.4.4. Feladat [6].** Hozzuk algebrai alakra:

$$\frac{2}{(1-i)(3+i)}, \quad \frac{1}{(3+4i)^2}, \quad \frac{2+i}{i(-3+4i)},$$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}, \quad \frac{1}{i(3-2i)(1+i)}, \quad \frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}.$$

→ **3.4.5. Feladat [6].** Ha $z = 1 - 5i$ és $w = 3 + 4i$, akkor mennyi z/w, $\overline{z}/w$, $z/\overline{w}$, $\overline{z/w}$, $z/|w|$, $|z/w|$?

3.4.6. Feladat [6]. Ha $z = 1 + i$ és $w = 1 - 2i$, akkor mennyi $z - z/w$, $(z-1)/w$, $z^2 - iz/w$, $z/(iw)$, $z/|w|$?

3.4.7. Feladat [6]. Legyen $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ és $z_3 = -1/2 + \sqrt{3}i/2$. Mennyi $|3z_1 - 4z_2| + z_3\overline{z_3}$, $z_1^3 = 3z_1^2 + 4z_1 - 8$, $\left|(2z_2 + z_1 - 5 - i)/(2z_1 - z_2 + 3 - i)\right|$?

→ **3.4.8. Feladat [2].** Állítsuk elő trigonometrikus alakban az $1+i$, $1+i\sqrt{3}$ és $\sqrt{3}-i$ komplex számokat.

→ **3.4.9. Feladat.** Határozzzuk meg i és $-1+i$ összes harmadik gyökét, valamint 64 és -64 összes hatodik gyökét.

3.4.10. Feladat. Számítsuk ki az $\sqrt{i}$, $\sqrt{3+4i}$ és $\sqrt{-7+24i}$ komplex számokat.

3.4.11. Feladat. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy két komplex szám szorzata valós legyen?

3.4.12. Feladat. Adjuk meg az alábbi komplex számokat algebrai alakban:

(1)
$$\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2};$$

(2)
$$\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1};$$

(3)
$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7};$$

(4)
$$(1+i)^{52};$$

(5)
$$\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^{20}.$$

3.4.13. Feladat. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$:

(1) $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$;

(2) $(a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$;

(3) $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$.

$\rightarrow$ **3.4.14. Feladat [4].** Határozzuk meg azokat a komplex számokat, amelyekre

(1) $\overline{z} = z^2$;

(2) $\overline{z} = z^3$.

$\rightarrow$ **3.4.15. Feladat [4].** Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi feltétel kielégítő komplex számok halmazát:

(1) $|z - i| < 1$;

(2) $2 < |z| \leq 3$;

(3) $|z - 2 - i| < |z| < |z|$;

(4) $|z - 1| < 1$ és $\Re(z) > 0$;

(5) $|z + i| > 2$ és $\Im(z) < 2$;

(6) $|z - 1| = 2|z - 2 + i|$.

$\rightarrow$ **3.4.16. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, döntsük el, hogy függvény-e, és hogy az inverze függvény-e.

(1) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z - 1| = |w|\big\}$;

(2) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 = w\big\}$;

(3) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = w^2\big\}$;

(4) $\big\{(z, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \Re(z) = y\big\}$;

(5) $\big\{(z, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z| + y = 0\big\}$;

(6) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) = \Im(w)\big\}$;

(7) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w(z^2 - 1) = z\big\}$;

(8) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = |z|\big\}$;

(9) $\big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w(z - 1) = z\big\}$.

→ **3.4.17. Feladat [5].** Határozzuk meg az $f \circ g$ függvényt, ha

(1) $g(z) = \operatorname{sgn}(z)$, ha $z \in \mathbb{C}$ és $f(x) = 1/(x^2 - 1)$, ha $x \in \mathbb{R}$;

(2) $g(z) = z^2$, ha $z \in \mathbb{C}$ és $f(x) = 1/(x + 1)$, ha $x \in \mathbb{R}$;

(3) $g(z) = \Re(z)$, ha $z \in \mathbb{C}$ és $f(x) = x/(x^2 - 1)$, ha $x \in \mathbb{R}$;

(4) $g(x) = |x|$, ha $x \in \mathbb{R}$ és $f(z) = iz$, ha $z \in \mathbb{C}$.

3.4.18. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a koordinátánkénti o"sszeadással és szorzással kommutatív egységelemes gyűrű, de nem test.

→ **3.4.19. Feladat [4].** Ha $p = 1 + i + j + k$ és $q = k$ kvaterniók, határozzuk meg a $\overline{p}$, p^2, $1/p$, $q(1/p)$ és $(1/p)q$ kvaterniókat.

→ **3.4.20. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha q tetszőleges kvaternió, akkor $q - iqi - jqj - kqk = 4\Re(q)$.

3.4.21. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha az $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezések mindegyike forgatás (valamely pont körül) vagy eltolás, akkor az összetételük is forgatás vagy eltolás.

3.4.22. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy ha az $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezések forgatások metsző egyenesek körül, akkor az összetételük is forgatás.

3.4.23. További feladatok. Megoldásokkal: [45]; [15]: 1–72, 81–126; [17]: 1–48; [73]: VI.4.1–VI.4.25.

4. VÉGES HALMAZOK

4.1. Véges halmazok alaptulajdonságai

→ **4.1.1. Feladat [6].** Egészítsük ki az előző pont bizonyítását.4.1.3.

→ **4.1.2. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy ha $A \setminus B \sim B \setminus A$, akkor $A \sim B$.

→ **4.1.3. Feladat [1].** Adjunk meg kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a $0, 1$ számokból és a $0, 1, 2, 3$ számokból képezhető sorozatok között.

→ **4.1.4. Feladat [2].** Adjunk meg kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az alábbi halmazok között:

(1) $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{N}$;

(2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$;

(3) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ és $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.

→ **4.1.5. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha A, B, C halmazok, akkor

(1) $A \times B \sim B \times A$;

(2) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$;

(3) $(A \cup B) \times C \sim (A \times C) \cup (B \times C)$, ha $A \cap B = \emptyset$;

(4) $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$, ha $B \cap C = \emptyset$;

(5) $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$;

(6) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

4.1.6. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy egy X halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $f : X \to X$ leképezéshez van olyan Y valódi részhalmaza X-nek, hogy $f(Y) \subset Y$.

4.1.7. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ végtelen halmazok.

→° **4.1.8. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy a $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, 100\pi$ számok között van olyan, amelyik nincs messzebb a legközelebbi egésztől, mint $1/101$.

→ **4.1.9. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy bármely $m \in \mathbb{N}^+$-hoz van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy tízes számrendszerben mn minden jegye 1 vagy 0.

$\to^\circ$ **4.1.10. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan n-hez van olyan m egész, amelyre n osztója $2^m - 1$-nek.

$\to^\circ$ **4.1.11. Feladat [6].** Legyen $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ egész számok egy sorozata. Bizonyítsuk be, hogy egy alkalmas részsorozatra $a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots a_{j_n}$ osztható 100-zal.

$\to^\circ$ **4.1.12. Feladat [3].** Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ egész számok az $[1, 100]$ intervallumból. Bizonyítsuk be, hogy van kettő közöttük, amely relatív prím.

$\to^\circ$ **4.1.13. Feladat [8].** Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ egész számok az $[1, 100]$ intervallumból. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas $i \neq j$-re a_i osztója a_j-nek.

4.1.14. Feladat [10]. Pozitív természetes számok egy szigorúan monoton növekedő $k_1, k_2, \dots, k_m$ sorozatát *Sidon-sorozat*nak nevezzük n-ig, ha a $k_i + k_j$, $1 \le i \le j \le m$ számok mind különbözőek, és $k_m \le n$. Melyik a leghosszabb Sidon-sorozat 100-ig? Megkaphatjuk-e ezt a mohó algoritmussal, azaz úgy, hogy mindig az első olyan számot, amely érvényben hagyja a Sidon-tulajdonságot, hozzávesszük a sorozathoz? Adjunk felső korlátot a Sidon-sorozatok hosszára n-ig.

$^\circ *$ **4.1.15. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy egy α irracionális számhoz végtelen sok olyan m/n racionális szám van, amelyre $|\alpha - m/n| < 1/n^2$.

$^\circ *$ **4.1.16. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy ha $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ irracionális számok, akkor végtelen sok olyan racionális számokból álló $(p_1/q, p_2/q, \dots, p_n/q)$ sorozat létezik, amelyre $|\alpha_i - p_i/q| < 1/q^{1+1/n}$, ha $1 \le i \le n$.

$^\circ$ **4.1.17. Feladat [12].** Bizonyítsuk be, hogy valamely $n > 0$-ra az F_n Fibonacci-szám osztható 1000-rel.

4.1.18. További feladatok. [31]: 4.7, 4.21, 5.7, 5.8, 5.12.

4.2. Kombinatorika

$\to$ **4.2.1. Feladat [4].** Az $\binom{n}{m}$ értékei $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le n$ esetén alkotják a *Pascal-háromszög*et. Foglaljuk táblázatba az $n \le 8$-hoz tartozó részt.

$\to$ **4.2.2. Feladat [0].** Hány szótárra van szükségünk az EU-ban, hogy bármely hivatalos nyelvről bármely hivatalos nyelvre közvetlenül fordíthassunk?

$\to$ **4.2.3. Feladat [0].** Hány rendezése van egy n elemű halmaznak?

$\to$ **4.2.4. Feladat [0].** Egy n változós, m értékű *Boole-függvény*en egy $f : \{\uparrow, dto\}^n \to \{\uparrow, dto\}^m$ függvényt értünk. Hány ilyen függvémy van?

$\to$ **4.2.5. Feladat [1].** Hányféleképpen ültethetünk le n embert egy kerek asztal mellé? Két ültetést megegyezőnek tekintünk, ha forgatással átvihetők egymásba.

$\to$ **4.2.6. Feladat [1].** Egy postahivatalban 10 különböző képeslapot árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk 12 képeslapot?

$\rightarrow$ **4.2.7. Feladat [1].** Hányféleképpen helyezkedhet el 12 ember három szobában, ha az elsőben 2, a másodikban 6, a harmadikban pedig 4 fér el?

$\rightarrow$ **4.2.8. Feladat [5].** Tizennyolc százforintos osztunk szét öt gyerek között. Hányféleképpen lehetséges ez? Mi a helyzet, ha mindenki legalább száz forintot kap? Mi a helyzet, ha mindenki legalább kétszáz forintot kap?

$\rightarrow$ **4.2.9. Feladat [0].** Egy esemény *esélyé*n a bekövetkezést eredményező esetek számának és az összes esetek számának hányadosát fogjuk érteni. Lottóban mennyi az 5, 4, 3, 2, 1 illetve 0 találat esélye?

$\rightarrow$ **4.2.10. Feladat [0].** Egy n elemű halmazon hány binér reláció van? Ezekből hány reflexív, hány szimmetrikus és hány reflexív és szimmetrikus?

$\rightarrow$ **4.2.11. Feladat [0].** Hányféleképpen választhatunk ki három különböző számot az $\{1, 2, \dots , 100\}$ halmazból úgy, hogy az összegük páros legyen?

$\circ$ **4.2.12. Feladat [0].** Hány k hosszú infixe van egy n hosszú szónak? Azonos, de különböző helyen lévő infixeket különbözőnek tekintünk.

$\rightarrow$ **4.2.13. Feladat [5].** Bridzsben hány leosztás van? Mennyi az esélye, hogy mindenkinél van ász? Hány lehetséges kéz van? Mennyi az esélye, hogy egy adott kézben van minden ász? Mennyi az esélye, hogy egy adott kézben egy színből nyolc lap van? Mennyi az esélye, hogy egy adott kéz 4-4-4-1 elosztású?

$\rightarrow$ **4.2.14. Feladat [5].** Mennyi az esélye hogy pókerben osztás után a kezünkben royalflös, póker, full, flös, sor, drill, két pár, egy pár, illetve üres lap van? Mi a helyzet, ha magyar kártyával játszunk?

$\rightarrow$ **4.2.15. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, akkor

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Mutassuk meg, hogy akkor kapunk maximumot, ha $m = \lfloor n/2 \rfloor$ vagy $m = \lceil n/2 \rceil$.

$\rightarrow$ **4.2.16. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy ha $z, w, v \in \mathbb{C}$ és $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor

(1)

$$(z+1)\binom{z}{k} = (k+1)\binom{z+1}{k+1};$$

(2)

$$z\binom{z-1}{k} = (z-k)\binom{z}{k};$$

(3)

$$\binom{-z}{k} = (-1)^k\binom{z+k-1}{k};$$

(4)
$$\binom{z}{m+k}\binom{m+k}{k} = \binom{z}{k}\binom{z-k}{m};$$

(5)
$$\binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} = \binom{z+1}{k+1};$$

(6)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{z-k}{m} = \binom{z+1}{m+1} + \binom{z-n}{m+1};$$

(7)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{z+k}{k} = \binom{z+n+1}{n};$$

(8)
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{z}{k} = (-1)^n\binom{z-1}{n};$$

(9)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{z}{k}\binom{w}{n-k} = \binom{z+w}{n} \quad \text{(összegzési tétel)};$$

(10)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{z+n-k-1}{k}\binom{w+k-1}{n-k} = \binom{z+w+n-1}{n};$$

(11)
$$\sum_{0\le k+m\le n}^{n}\binom{z}{k}\binom{w}{m}\binom{v}{n-k-m} = \binom{z+w+v}{n}.$$

$\to^\circ$ **4.2.17. Feladat** [**3**]**.** Az analízisben bebizonyítják a *Stirling-formulát*: ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor
$$n! = \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2}}{e^n}e^{\frac{1}{12n}-c_n}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le c_n \le \frac{1}{180n^3}.$$

Itt
$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\ldots$$

és
$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\ldots$$

Használjuk fel a formulát $n!$ becslésére $c_n = 0$ választással, ha $n = 1, 2, \ldots, 10$, és minden esetben számoljuk ki (közelítőleg) a *relatív hibát*, azaz a közelítés és a pontos érték eltérésének és a pontos értéknek a hányadosát. Megjegyezzük, hogy nagy n esetén a túlcsordulás elkerülésére $n!$ helyett célszerűbb lehet annak e alapú logaritmusát számolni, amelyet *természetes alapú logaritmus*nak (logaritmus naturalis) neveznek, és ln-nel jelölnek. (A következő feladat szerint ha $n > 8$, akkor a relatív hiba kisebb, mint 0,0008%.) Megjegyezzük, hogy mivel a faktoriálisok nagyok, néha kényelmesebb az e alapú, úgynevezett *természetes logaritmus*ukkal számolni, amelyet ln-el szokás jelölni.

°* **4.2.18. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő Stirling-formulát használva $n!$ becslésére $c_n = 0$ választással, ha $n > 8$, akkor a relatív hiba kisebb, mint 0,0008%.)

°* **4.2.19. Feladat [7].** Meg tudjuk-e a Stirling-formula segítségével pontosan határozni, hogy 1000! hány jegyű? Mi az első néhány jegy? Mi az utolsó jegy?

4.2.20. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy

$$\binom{2n}{n} < 4^{n-1}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 4.$$

°* **4.2.21. Feladat [4].** Adjunk becslést $\binom{2n}{n}$ értékére a Stirling-formulával.

4.2.22. Feladat [5]. Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, amelyre teljesül hogy ha $j \in H$, akkor $j + 1 \notin H$?

4.2.23. Feladat [6]. Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, amelyre teljesül hogy ha $j, j + 1 \in H$, akkor $j + 2 \in H$?

4.2.24. Feladat [11]. Tervezzünk programot, amely valamilyen sorrendben megadja az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációját, k-ad osztályú varációját, k-ad osztályú kombinációját, k-ad osztályú ismétléses variációját, k-ad osztályú ismétléses kombinációját, illetve $i_1, i_2, \dots, i_n$ ismétlődésű ismétléses permutációját.

4.2.25. Feladat [6]. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \le n$, akkor az *elsőfajú Stirling-szám*okat a

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{0<k_1<k_2<\ldots<k_{n-m}<n} k_1 k_2 \cdots k_{n-m}$$

formulával, a *másodfajú Stirling-szám*okat pedig a

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{1\le k_1\le k_2\le\ldots\le k_{n-m}\le m} k_1 k_2 \cdots k_{n-m}$$

formulával definiáljuk. Mutassuk meg, hogy ha $m > 0$, akkor

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{Bmatrix} n+1 \\ m \end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ m-1 \end{Bmatrix}.$$

Ezen összefüggések alapján foglaljuk táblázatba $\left[{n \atop m}\right]$ illetve $\left\{{n \atop m}\right\}$ értékeit, ha $0 \le m \le n \le 8$.

4.2.26. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$-re és $n \in \mathbb{N}$-re

$$n!\binom{z}{n} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} z^m.$$

4.2.27. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$-re és $n \in \mathbb{N}$-re

$$z^n = \sum_{m=0}^{n} m! \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} \binom{z}{m}.$$

4.2.28. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmaz m elemű osztályozásainak száma $\left\{ {n \atop m} \right\}$.

4.2.29. Feladat [7]. Legyen X egy n elemű halmaz. Ha f az X egy permutációja, egy $x \in X$ elem *pályá*ját az $x, f(x), f\big(f(x)\big), \ldots$ elemek alkotják. Mutassuk meg, hogy a pályák X egy osztályozását adják. Mutassuk meg, hogy olyan permutációja X-nek, amelyre a pályák m elemű osztályozást adnak, $\left[{n \atop m} \right]$ van.

4.2.30. További feladatok. Feladatok megoldásokkal: [48], 1.3-4–1.3-16, 1.3-18–1.4-25, 1.4-27–1.5-36; [22]: VIII.1.2–VIII.1.7, VIII.1.9–VIII.1.12, VIII.1.14–VIII.1.18, VIII.1.20–VIII.1.23, VIII.1.25; [38]: 1.2.6.1–1.2.6.2, 1.2.6.4, 1.2.6.6–1.2.6.9, 1.2.6.12, 1.2.6.18, 1.2.6.19–1.2.6.24, 1.2.6.31–1.2.6.32, 1.2.6.38–1.2.6.39, 1.2.6.47–1.2.6.48, 1.2.6.50–1.2.6.56, 1.2.6.59, 1.2.6.61–1.2.6.63, 1.2.6.66–1.2.6.68; [51]: I.3.25, I.3.45; [55]: 1.§1–1.§8, 1.§16–1.§18, 1.§26–1.§27, 1.§30–1.§33, 1.§35–1.§38, 1.§42–1.§43; [72]: IV.5.2–IV.5.4, IV.5.7, IV.5.9–IV.5.11, IV.5.13–IV.5.15, IV.5.17, IV.5.22, IV.5.24–IV.5.30, IV.5.32; [74]: 1.24–1.26.

4.3. Polinomiális tétel, szita formula

→ **4.3.1. Feladat [0].** Mi köze a Pascal-háromszögnek ahhoz, hogy $11^4 = 14641$?

→ **4.3.2. Feladat [3].** Hány nullára végződik a $11^{100} - 1$ szám?

→ **4.3.3. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha $k, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

→ **4.3.4. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha $k, m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

$\rightarrow^\circ$ **4.3.5. Feladat [6].** Bizonyítsuk be a *Moivre-tételt*: ha $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, akkor

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi$$

és

$$\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi.$$

$\rightarrow$ **4.3.6. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

$\rightarrow$ **4.3.7. Feladat [5].** Hányféleképpen választhatunk ki n tárgy közül páratlan számú tárgyat?

4.3.8. Feladat [6]. Legyen $k, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy

(1)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1};$$

(2)
$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2};$$

(3)
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k} = (n+1)2^{n};$$

(4)
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1);$$

(5)
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1};$$

(6)
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2\big((n-k)!\big)^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

4.3.9. Feladat [7]. Figyelembe véve, hogy

$$k^4 = 24\binom{k}{4} + 36\binom{k}{3} + 14\binom{k}{2} + \binom{k}{1},$$

számoljuk ki a $\sum_{k=0}^{n} k^4$ összeget.

→ **4.3.10. Feladat** [3]. Az `a` és `b` betűkből hány olyan n tagú sorozat készíthető, amelyben legfeljebb m számú `a` szerepel? (Nincs jó zárt formula az összegre: lásd [38], 1.2.6.)

4.3.11. Feladat [3]. Egy m elemű véges ábécé betűiből hány olyan n hosszúságú szó készíthető, amelyben

(1) egy rögzí'tett betű legalább kétszer előfordul;

(2) egy rögzí'tett betű legalább háromszor előfordul;

(3) két rögzí'tett betű legalább egyszer előfordul.

→ **4.3.12. Feladat** [2]. Egy társasutazás résztvevői mindannyian beszélnek angolul, németül vagy franciául. Hatan tudnak németül, ugyanennyien angolul, heten franciául. négyen beszélnek angolul és németül, hárman németül és franciául, ketten franciául és angolul. Egyvalaki mindhárom nyelven beszél. Hány résztvevője van a társasutazásnak? Hányan beszélnek csak angolul, illetve csak franciául?

→ **4.3.13. Feladat** [6]. Írjuk fel a 120-nál nem nagyobb prímek számát az $\lfloor\ \rfloor$ függvény segítségével.

→ **4.3.14. Feladat** [3]. A logikai szita formulánál használt jelölésekkel, mutassuk meg, hogy ha $X = \cup_{i=1}^{k} X_i$, akkor $S = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{k-1} S_k$.

4.3.15. Feladat [7]. Egy n házaspárból álló társaság táncol. Hány olyan eset van, amikor senki sem táncol a saját feleségével?

4.3.16. Feladat [7]. A szita-formulával határozzuk meg, hogy hány szürjektív leképezése van egy n elemű halmaznak egy k elemű halmazra. Mi köze ennek a Stirling-számokhoz?

4.3.17. Feladat [7]. Hányféleképpen ültethető le n házaspár egy kerek asztal köré úgy, hogy nők ne kerüljenek egymás mellé, hogy házaspárok ne kerüljenek egymás mellé, illetve hogy mindkét feltétel teljesüljön?

4.3.18. Feladat [9]. Legyen X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ egy halmazcsalád. Ha

$$H \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

legyen $P_H = \cup_{i \in H} X_i$ és $Q_H = \cap_{i \in H} X_i$. Jelölje $\mathcal{F}_k$ az $\{1, 2, , \ldots, n\}$ halmaz összes k elemű részhalmazainak rendszerét. Mutassuk meg, hogy

$$\cup_{H \in \mathcal{F}_k} Q_H \supset \cap_{H \in \mathcal{F}_k} P_H, \quad \text{ha} \quad 2k \leq n + 1$$

és

$$\cup_{H \in \mathcal{F}_k} Q_H \subset \cap_{H \in \mathcal{F}_k} P_H, \quad \text{ha} \quad 2k \geq n + 1.$$

4.3.19. További feladatok. [48]: 4.6-37–4.6-39, 4.6-42, 4.8-44–4.8-47; az előző feladatok megoldásokkal: [49], 1.6-37–1.6-39, 1.6-42, 1.8-44–1.8-47; [55]: 2.§1–2.§4; [22]: VIII.2.1–VIII.2.7; [3]: I.13–I.16; [72]: IV.5.8, IV.5.18–IV.5.21; [74]: 1.21, 1.23.

5. VÉGTELEN HALMAZOK

5.1. Kiválasztási axióma

5.1.1. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy nem üres páronként diszjunkt halmazok bármely családjához létezik kiválasztási függvény.

5.1.2. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma ekvivalens a *Zermelo-axiómá*val, mely szerint nem üres páronként diszjunkt halmazok bármely rendszeréhez van olyan halmaz, amely a halmazrendszer minden halmazával pontosan egy közös elemet tartalmaz.

5.1.3. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden $f : X \to Y$ szürjektív leképezésnek van olyan megszorítása, amely bijektív.

$\to$ **5.1.4. Feladat [1].** Mutassuk meg, hogy ha $C \subset A$ és $B \subset D$, de $C \cup D \sim C$, akkor $A \cup B \sim A$.

5.1.5. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha A_i, $i \in I$ tetszőleges halmazcsalád, akkor létezik olyan, páronként diszjunkt halmazokból álló B_i, $i \in I$ halmazcsalád, amelyre $\cup_{i\in I} A_i = \cup_{i\in I} B_i$.

5.1.6. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha létezik A-t B-re képező függvény, akkor $B \precsim A$.

5.1.7. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha létezik A-t B-re képező függvény és létezik B-t A-ra képező függvény, akkor $A \sim B$.

5.1.8. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

(1) ha $A \precsim B$, akkor $A \times C \precsim B \times C$;

(2) ha $A \precsim B$, akkor $A^C \precsim B^C$;

(3) ha $A \precsim B$, akkor $C^A \precsim C^B$.

5.1.9. Feladat [8]. Legyen A egy négyzet, B pedig egy körlap. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $A = A_1 \cup A_2$ és $B = B_1 \cup B_2$ diszjunkt felbontások, hogy A_1 hasonló B_1-hez és A_2 hasonló B_2-höz.

* **5.1.10. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ egy korlátos részhalmaza nem lehet egybevágó egy valódi részhalmazával.

* **5.1.11. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazhoz legfeljebb egy olyan $x \in H$ létezik, amelyre H egybevágó $H \setminus \{x\}$-el.

* **5.1.12. Feladat [12].** Adjunk meg $\mathbb{C}$-ben olyan korlátos halmazt, amely egybevágó egy valódi részhalmazával.

* **5.1.13. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{C}$ egy korlátos részhalmaza egybevágó egy valódi részhalmazával, akkor az egybevágóság forgatás.

5.1.14. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy minden részben rendezés kiterjeszthető rendezéssé.

° **5.1.15. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy A az F test feletti X vektortér egy lineárisan független részhalmaza, S pedig a vektortér egy olyan részhalmaza, hogy X minden eleme előáll S-beli elemek véges lineáris kombinációjaként, és $A \subset S$, akkor a vektortérnek létezik olyan B maximális lineárisan független részhalmaza (bázisa), amelyre $A \subset B \subset S$; speciálisan minden vektortérnek létezik bázisa. Mutassuk meg, hogy egy adott bázis esetén a vektortér minden eleme egyértelműen állítható elő a báziselemek lineáris kombinációjaként.

° **5.1.16. Feladat [10].** Az előző feladat folytatásaként, mutassuk meg, hogy az X tér bármely két bázisa, mint halmaz, ekvivalens.

5.1.17. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy minden X rendezett halmaznak van olyan jólrendezett W részhalmaza, hogy minden $x \in X$-hez van olyan $y \in W$, hogy $x \leq y$,

5.1.18. További feladatok. [31]: 10.1–10.7; [74]: 1.18, 2.2, 2.5–2.9, 2.11–2.14, 16, 8.1–8.20.

5.2. Megszámlálható halmazok

→ **5.2.1. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy az egész számokból képezhető véges sorozatok halmaza megszámlálható.

→ **5.2.2. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy a véges hosszúságú magyar nyelvű szövegek halmaza megszámlálható.

→ **5.2.3. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy a matematikai tételek halmaza megszámlálható.

5.2.4. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ nem üres nyílt intervallumainak bármely páronként diszjunkt rendszere megszámlálható.

5.2.5. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy a síkbeli nem üres nyílt körlapok bármely páronként diszjunkt rendszere megszámlálható.

° **5.2.6. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy az *algebrai számok* halmaza, azaz azon $z \in \mathbb{C}$ komplex számok halmaza, amelyekhez van olyan egész együtthatós nem azonosan nulla polinom, amelynek z gyöke, megszámlálható.

5.2.7. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy egy halmaz pontosan akkor véges, ha részhalmazai bármely nem üres rendszerében van maximális elem.

* **5.2.8. Feladat [8].** Legyen $X \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmaz a következő tulajdonsággal: ha $x, y \in X$, $x < y$, akkor léteznek olyan $u, v, w \in X$, hogy $u < x < v < y < w$. Bizonyítsuk be, hogy X és $\mathbb{Q}$ rendezése hasonló.

°* **5.2.9. Feladat [11].** A síkon mászik egy hangya, minden egész másodpercben egy rácspontban van, a következő másodpercben pedig egy szomszédos rácspontban; irányt nem változtat. A síkon ugrál egy vak bolha, minden egész másodpercben egy rácspontból átugrik egy tetszőleges másik rácspontba. Nem tudja, a hangya honnan indult és merre tart. Adjunk számára stratégiát, amellyel előbb-utóbb letapossa a hangyát. Mi a helyzet, ha a hangyát egy véges automata vezérli, és minden másodpercben az az által megadott szomszédos rácspontba mászik tovább, a bolhát pedig egy Turing-gép?

°* **5.2.10. Feladat [13].** Bizonyítsuk be, hogy a síkon elhelyezett, páronként diszjunkt `T` betűk halmaza megszámlálható.

5.2.11. További feladatok. [51]: I.4.1–I.4.23; [74]: 3.14, 3.16–3.18, 3.24–3.29, 3.32, 3.46.

5.3. Nem megszámlálható halmazok

→ **5.3.1. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy minden félegyenes kontinuum számosságú.

→ **5.3.2. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy egy kör kerülete kontinuum számosságú.

→ **5.3.3. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha A és B kontinuum számosságú halmazok, akkor $A \cup B$ is kontinuum számosságú.

→ **5.3.4. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbb{C}$ egy részhalmaza tartalmaz egy pozitív hosszúságú szakaszt, akkor kontinuum számosságú.

5.3.5. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ és $\mathbb{N}$ összes permutációinak halmaza kontinuum számosságú.

5.3.6. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy megszámlálható sok legalább kételemű megszámlálható halmaz Descartes-szorzata kontinuum számosságú.

5.3.7. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy $\wp(\mathbb{R}) \sim \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

5.3.8. Feladat [10]. Adjunk meg olyan függvény, amely $]0,1]$-et kölcsönösen egyértelműen ráképezi a pozitív természetes számokból álló sorozatok halmazára.

→ **5.3.9. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy az irracionális valós számok halmaza kontinuum számosságú.

$\rightarrow^\circ$ **5.3.10. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy a nem algebrai valós számok halmaza kontinuum számosságú.

$^\circ$ **5.3.11. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ véges részhalmazainak halmaza kontinuum számosságú.

$^\circ$ **5.3.12. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ felbontható kontinuum sok kontinuum számosságú halmazra.

$^\circ$ **5.3.13. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ folyonos függvényeinek halmaza kontinuum számosságú.

$^\circ$ **5.3.14. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy van olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden egyváltozós $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomfüggvényhez van olyan $y \in \mathbb{R}$, hogy $p(x) = f(x, y)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Választható-e f polinomfüggvénynek?

$^\circ$ **5.3.15. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy van olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden egyváltozós $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $y \in \mathbb{R}$, hogy $g(x) = f(x, y)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Választható-e f folytonos függvénynek?

$^\circ$ **5.3.16. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ monoton függvényeinek halmaza kontinuum számosságú.

$^\circ*$ **5.3.17. Feladat [13].** Állítsuk elő $\mathbb{R}^3$-at páronkent diszjunkt, pozitív sugarú körvonalak egyesítéseként. Lehetnek-e a körvonalak egyenlő sugarúak?

5.3.18. Feladat [11]. Mutassuk meg, hogy ha A végtelen halmaz, akkor $A \times \{0, 1\} \sim A$.

5.3.19. Feladat [5]. Az előző feladatot felhasználva, mutassuk meg, hogy ha A végtelen halmaz és $B \precsim A$, akkor $A \cup B \sim A$.

5.3.20. Feladat [11]. Mutassuk meg, hogy ha A végtelen halmaz, akkor $A \times A \sim A$.

5.3.21. Feladat [5]. Az előző feladatot felhasználva, mutassuk meg, hogy ha A végtelen halmaz és $\emptyset \neq B \precsim A$, akkor $A \times B \sim A$.

5.3.22. Feladat [7]. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ legalább kételemű. Mutassuk meg, hogy $A^\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ és $A^\mathbb{R} \sim \wp(R)$.

5.3.23. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy bármely A végtelen halmaz véges részhalmazainak rendszere hasonló A-hoz.

5.3.24. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy bármely $A \subset \mathbb{R}$ végtelen halmaz megszámlálható részhalmazainak rendszere hasonló $\mathbb{R}$-hez.

5.3.25. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha egy halmaz az R és az R^{-1} relációval is jólrendezett, akkor véges.

5.3.26. Feladat [12]. Bizonyítsuk be a Kőnig-egyenlőtlenséget: Ha I nem üres indexhalmaz, és $A_i \prec B_i$ minden $i \in I$-re, akkor $\cup_{i \in I} A_i \prec \prod_{i \in I} B_i$.

5.3.27. Feladat [7]. Legyen A olyan végtelen rendezett halmaz, amely egyetlen végtelen részhalmazának sincs legnagyobb eleme. Mutassuk meg, A hasonlóan rendezett $\mathbb{N}$-hez.

5.3.28. Feladat [7]. Legyen A olyan végtelen halmaz. Mutassuk meg, hogy A-nak van olyan jólrendezése, amelyre nincs legnagyobb elem, és olyan is, amelyre van legnagyobb elem.

5.3.29. Feladat [9]. Legyen X legalább kételemű.

(1) Mutassuk meg, hogy X-nek van olyan p permutációja, amelyre $p(x) \neq x$ minden $x \in X$-re.

(2) Mikor van olyan p permutációja X-nek, amelyre $p \circ p = \mathbb{I}_X$?

(3) Mutassuk meg, hogy van X-nek van olyan p permutációja, amelyre $p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p = \mathbb{I}_X$.

5.3.30. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha X végtelen halmaz, akkor X permutácioinak halmaza ekvivalens $wp(X)$-el.

° **5.3.31. Feladat [13].** Mutassuk meg, hogy egy vektortér bármely két bázisa ekvivalens, mint halmaz.

° **5.3.32. Feladat [7].** Legyen X vektortér az F test felett, B pedig egy bázisa X-nek. Mutassuk meg, hogy ha B végtelen, akkor X ekvivalens F és B közül a nagyobbikkal.

° **5.3.33. Feladat [5].** Legyen B bázisa $\mathbb{R}$-nek, mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérnek. Mutassuk meg, hogy B kontinuum számosságú.

5.3.34. Feladat [9]. Legyen X legalább kételemű.

(1) Mutassuk meg, hogy X-nek van olyan p permutációja, amelyre $p(x) \neq x$ minden $x \in X$-re.

(2) Mikor van olyan p permutációja X-nek, amelyre $p \circ p = \mathbb{I}_X$?

(3) Mutassuk meg, hogy van X-nek van olyan p permutációja, amelyre $p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p = \mathbb{I}_X$.

* **5.3.35. Feladat [4].** A ZF axiómarendszerhez hozzá szokás venni a *regularitási axiómát*: minden nem üres halmaznak van tőle diszjunkt eleme. Ennek az axiómának a segítségével bizonyítsuk be:

(1) nincs olyan x halmaz, amelyre $x \in x$;

(2) bármely x, y halmazokra $x \notin y$ vagy $y \notin x$.

5.3.36. További feladatok. [31]: 8.26–8.28, 14.31; [51]: I.4.24–I.4.46; [74]: 3.37, 3.38, 3.43, 3.47, 3.48, 3.52, 3.53.

6. SZÁMELMÉLET

6.1. Oszthatóság

→ **6.1.1. Feladat [0].** Játszunk osztó játékot! Egy megadott $n > 1$ természetes számnak két játékos felváltva nevezi meg az osztóit. Már megnevezett osztót vagy annak többszörösét nem lehet megnevezni. Az veszít, aki az 1-et mondja.

* **6.1.2. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy az osztó játékban minden lépésben valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája. Mutassuk meg, hogy az első lépésben az első játékosnak van nyerő stratégiája.

6.1.3. Feladat [0]. Néha szükségünk van arra, hogy egy tizes számrendszerben felírt hosszabb számról megállapítsuk, hogy osztható-e valamely rövidebb számmal, amely relatív prím 10-hez, például 31-gyel. A számból levonva (vagy hozzáadva) 31 valamely többszörösét, olyan számot kaphatunk, amelynek utolsó jegye 0. Ezxt elhagyhatjuk, így a szám rövidebb lesz. Állapítsuk meg ezzel a módszerrel, hogy igaz-e, hogy

(1) $31|23754$;

(2) $19|20513$;

(3) $7|8638$.

→ **6.1.4. Feladat [2].** Mutassuk meg, hogy bármely 3-nál nagyobb páratlan prím két szomszédjának a szorzata osztható 24-el.

6.1.5. Feladat [2]. Bizonyítsuk be, hogy öt egymás melletti természetes szám szorzata mindig osztható 120-szal.

6.1.6. Feladat [2]. Mutassuk meg, hogy ha öt egymás melletti természetes számból a középső néggyel nem osztható páros szám, akkor a szorzatuk osztható 960-al.

→ **6.1.7. Feladat [2].** Bizonyítsuk be, hogy ha a tízes számrendszerben ábrázolt bármelyik háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írjuk, akkor a kapott hatjegyű szám osztható 7-el, 11-el és 13-mal.

6.1.8. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy az $n > 1$ páratlan szám akkor és csak akkor prím, ha nem állítható elő három vagy háromnál több egymást ko'vető pozitív egész összegeként.

6.1.9. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy az $n > 1$ természetes szám akkor és csak akkor prím, ha az

$$\binom{n}{k}$$

binomiális együtthatók az első és az utolsó kivételével mind oszthatók n-el.

6.1.10. Feladat [5]. Adjuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre $n^2 + 1$ osztható $n + 1$-el.

6.1.11. Feladat [5]. Adjuk meg mindazokat az n egész számokat, amelyekre $n^3 - 3$ osztható $n - 3$-mal.

6.1.12. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy az 5^n, $n \in \mathbb{N}^+$ számok utolsó négy számjegyéből képzett sorozat tagjai szakaszosan ismétlődnek, adjuk meg a szakaszt, és állapítsuk meg, hogy honnan kezdődik az ismétlődés.

6.1.13. Feladat [3]. Bizonyítsuk be, hogy bármely $s \in \mathbb{N}^+$-hoz és előre megadott s jegyű tizes számrendszerbeli számhoz van olyan négyzetszám, amelynek első s jegye az előre megadott szám.

6.1.14. Feladat [4]. Adjuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre $(n-1)! + 1 = n^2$.

6.1.15. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy $13 | 2^{70} + 3^{70}$.

→ **6.1.16. Feladat** [6]. Írjunk szita-programot, határozzuk meg az x-nél nem nagyobb prímek számát, ha $x = 10^n$, $n = 1, 2, \ldots$ ameddig tudjuk, és vessük össze $x/\ln(x)$ értékével.

6.1.17. Feladat [12]. Írjunk olyan programot próbaosztásra, amely minden 2^{64}-nél kisebb pozitív természetes számra működik. A 2-vel és 3-mal való próbaosztás után válasszuk a próbaosztók sorozatát a $d_0 = 5$, $d_k = d_{k-1} + 3 + (-1)^k$, ha $k > 0$ sorozatnak. Mérjük a futásidőt.

→ **6.1.18. Feladat** [5]. Osztható-e 1599-el $\binom{3400}{1700}$?

→ **6.1.19. Feladat** [2]. Mutassuk meg, hogy minden $4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú számnak van ugyanilyen alakú osztója.

→ **6.1.20. Feladat** [4]. Mutassuk meg, hogy végtelen sok $4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú prímszám van.

6.1.21. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy végtelen sok $6k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú prímszám van.

6.1.22. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy az $M_n = 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^+$ úgynevezett *Mersenne-szám*okra $\mathrm{lnko}(M_m, M_n) = M_{\mathrm{lnko}(m,n)}$. Keressünk közöttük prímeket és összetetteket.

6.1.23. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy az $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$ úgynevezett *Fermat-szám*ok páronként relatív prímek. Keressük meg az első olyat, amely nem prím.

6.1.24. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy ha $n > 1$, akkor az $F_n = 2^{2^n} + 1$ Fermat-szám nem állítható elő két prímszám összegeként.

6.1.25. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy ha $n > 1$, akkor az $F_n = 2^{2^n} + 1$ Fermat-szám utolsó tizedesjegye 7.

6.1.26. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha egy Fermat-szám prímhatvány, akkor a kitevő 1.

6.1.27. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy a $2^{2^n} + 3$, $n \in \mathbb{N}$ számok között végtelen sok összetett van.

6.1.28. Feladat [7]. Határozzuk meg azokat a 10^{12}-nél kisebb prímeket, amelyek $n^n + 1$ alakúak, ahol $n \in \mathbb{N}$.

6.1.29. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy $2^j + 1$ összetett, ha $j > 1$ és j nem kettőhatvány.

→ **6.1.30. Feladat** [4]. Alkalmazzuk a bővített euklidészi algoritmust az alábbi számpárokra:

(1) 368, 161;

(2) 12661, 1279;

(3) 367651, 36802.

6.1.31. Feladat: Lamé tétele [9]. Bizonyítsuk be, hogy ha $a > b \geq 0$ bemenettel az euklidészi algoritmus n osztást végez, akkor $a \geq F_{n+1}$ és $b \geq F_n$, ahol az F_n számok a Fibonacci-számok.

6.1.32. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy $a = F_{n+1}$ és $b = F_n$ bemenettel, ahol az F_n számok a Fibonacci-számok, az euklidészi algoritmus n osztást végez.

6.1.33. Feladat: bináris lnko [8]. Az $\operatorname{lnko}(a, b) = \operatorname{lnko}(|a|, |b|)$, $\operatorname{lnko}(2a, 2b) = \operatorname{lnko}(a, b)$, $\operatorname{lnko}(a, b) = \operatorname{lnko}(a - b, b)$, ha $a, b \in \mathbb{Z}$ továbbá az $\operatorname{lnko}(2a, b) = \operatorname{lnko}(a, b)$, ha $a, b \in \mathbb{Z}$ és b páratlan észrevételek felhasználva adjunk bináris számítógépre alkalmas hatékony algoritmust a legnagyobb közös osztó kiszámítására.

6.1.34. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy a

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

úgynevezett *harmonikus szám*ok $n > 1$ esetén nem egészek.

6.1.35. Feladat [8]. Bizonyítsuk be, hogy ha $n, k \in \mathbb{N}^+$, akkor a $\sum_{j=n}^{n+k} 1/j$ összeg sohasem egész.

6.1.36. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy az $\binom{n}{k}$, $0 < k < n$ binomiális együtthatók legnagyobb közös osztója p, ha n a p prímszám hatványa, minden más $n > 1$-re pedig 1.

6.1.37. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy ha $n, k \in \mathbb{N}^+$ és n, k relatív prímek, akkor n osztója az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatónak.

6.1.38. Feladat [**7**]. Bizonyítsuk be, hogy bármely tíz egymás utáni pozitív természetes szám között van olyan, amelyik relatív prím a többi kilenc szorzatához. Keressük meg a legkisebb olyan n-et, amelyre ez nem igaz tíz helyett n számra.

→ **6.1.39. Feladat** [**3**]. Mutassuk meg, hogy egy integritási tartományban $a|b$ pontosan akkor teljesül, ha a-nak és b-nek létezik d legnagyobb közös osztója és d az a asszociáltja.

→ **6.1.40. Feladat** [**3**]. Mutassuk meg, hogy egy integritási tartományban ha az a és b elemeknek létezik d legnagyobb közös osztója és $a = da'$, $b = db'$, akkor a' és b' relatív prímek.

→ **6.1.41. Feladat** [**6**]. Határozzuk meg $R = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b\}$-ben az egységeket és az irreducibilis elemeket.

→ **6.1.42. Feladat** [**6**]. Adjunk meg $R = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$-ben 1-től és -1-től különböző egységeket.

6.1.43. Feladat [**6**]. Bizonyítsuk be, hogy ha egy integritási tartomány bármely két elemének van legnagyobb közös osztója, akkor benne minden irreducibilis elem prímelem.

6.1.44. További feladatok. [48]: 5.1-4–5.1-9, 5.3-4–5.3-5, 5.4-1–5.4-6; [46]: (megoldásokkal az előző feladatok és még) 3.1-1–3.1-2, 3.1-4, 3.1-6–3.1-27, 3.3-1–3.3-8, 3.4-1–3.4-14; [22]: VIII.1.8; [38]: 1.2.5.11–12, 1.2.5.14, 1.2.6.11; [59]: 1.2.1–1.2.36, 1.3.1–1.3.48, 2.6.1–2.6.3, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.5, 4.1.9, 4.1.11–4.1.14, 4.1.17, 4.1.19, 4.1.21, 4.1.25–4.1.27; [70]: 3–5, 7–116, 159–168, 173–175, 199–200.

6.2. Kongruenciák

→ **6.2.1. Feladat** [**1**]. Állapítsuk meg, milyen maradékot adnak a természetes számok négyzetei 3-mal, 5-tel illetve 7-tel osztva.

→ **6.2.2. Feladat** [**2**]. Számoljuk ki $\mathbb{Z}_{17}$-ben: $\tilde{5}^{-1}$, $\tilde{9}\cdot\widetilde{11}$, $(\widetilde{15}+\widetilde{10})(\tilde{3}+\tilde{5})^{-1}$, $\tilde{1}\cdot\tilde{2}\cdot\tilde{3}\cdots\widetilde{16}$.

6.2.3. Feladat [**5**]. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Legalább hány elemet tartalmaz egy olyan maradékrendszer modulo n, amely nem üres részhalmazainak összegeként minden maradékosztályt megkapunk.

→ **6.2.4. Feladat** [**5**]. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

(1) $3x \equiv 5 \pmod 7$;

(2) $14x \equiv 84 \pmod{21}$;

(3) $104x \equiv 74 \pmod{60}$;

(4) $26x \equiv 16 \pmod{34}$;

(5) $30x \equiv 48 \pmod{58}$;

(6) $40x \equiv 28 \pmod{62}$;

(7) $202x \equiv 157 \pmod{203}$;

(8) $309x \equiv 451 \pmod{617}$.

→ **6.2.5. Feladat** [5]**.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében:

(1) $47x + 72y = 4$;

(2) $21x + 56y = 72$;

(3) $117x - 63y = 36$;

(4) $182524x + 4567y = 1092$;

(5) $18x + 28y = 10$;

(6) $17x + 11y = 22$.

6.2.6. Feladat [5]**.** Egy n egész számra $n^{100} \bmod 73 = 57$ és $n^{101} \bmod 73 = 11$. Mennyi $n \bmod 73$?

→ **6.2.7. Feladat** [7]**.** Oldjuk meg az alábbi kongruencia-rendszereket:

(1) $3x \equiv 2 \pmod 4$, $2x \equiv 3 \pmod 5$;

(2) $5x \equiv 3 \pmod 7$, $4x \equiv 5 \pmod{10}$;

(3) $5x \equiv 1 \pmod 6$, $7x \equiv 9 \pmod{10}$;

(4) $3x \equiv 1 \pmod 4$, $5x \equiv 2 \pmod 7$, $7x \equiv 8 \pmod 9$;

(5) $3x \equiv 1 \pmod 4$, $2x \equiv 3 \pmod 5$, $5x \equiv 2 \pmod 7$, $7x \equiv 8 \pmod 9$;

(6) $5x \equiv 6 \pmod 7$, $7x \equiv 8 \pmod 9$, $9x \equiv 10 \pmod{11}$, $11x \equiv 12 \pmod{13}$;

(7) $3x \equiv 12 \pmod 5$, $10x \equiv -2 \pmod{14}$, $5x \equiv 5 \pmod{15}$, $6x \equiv 6 \pmod{22}$.

6.2.8. Feladat [5]**.** Bizonyítsuk be, hogy minden természetes számokból álló m, n számpárhoz van olyan $ax + by = c$ lineáris egyenlet (ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$), amelynek csak $x = m$, $y = n$ a természetes számok körében az egyetlen megoldása.

6.2.9. Feladat [5]**.** Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz van olyan $ax + by = c$ lineáris egyenlet (ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$), amelynek pontosan n megoldása van a természetes számok körében.

6.2.10. Feladat [7]**.** Egész együtthatós lineáris egyenletekből álló diophantikus egyenletrendszer megoldására, azaz az egyenletremdszer egész megoldásainak megkeresésére használható az alábbi algoritmus:

(1) Ha valamelyik egyenletben nincs ismeretlen, azaz az egyik oldal nulla, akkor ha a másik oldal is nulla, az egyenletet törölhetjük, egyébként nincs megoldás.

(2) Ha valamelyik egyenletben egy ismeretlen van, azt megoldhatjuk. Ha a megoldás egész, visszahelyettesítjük a többibe, egyébként nincs megoldás.

(3) Ha valamelyik egyenletben valamelyik ismeretlen együtthatója ± 1, fejezzük ki az egyenletből, és helyettesítsük be a többibe. Minden ilyen lépéssel az egyenletek és az ismeretlenek száma legalább eggyel csökken. Ha elfogytak az egyenletek (egy sem maradt), a maradék változók „szabad változók”: ezeknek tetszőleges egész értéket adva, megkapjuk a megoldásokat.

(4) Ha az előző lepésekkel nem tudunk már változókat illetve egyenleteket kiküszöbölni, akkor válasszuk ki azt az egyenletet és azt a változót, amely együtthatójának legkisebb az abszolút értéke. Ha ez mondjuk

$$cx + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k = d$$

alakú, ahol c abszolút értéke a legkisebb, akkor vezessünk be egy új t változót a

$$t = x + \lfloor c_1/c \rfloor x_1 + \lfloor c_2/c \rfloor x_2 + \cdots + \lfloor c_k/c \rfloor x_k$$

új egyenlettel. Levonva az új egyenlet c-szeresét az eredeti egyenletből, a

$$ct + (c_1 \bmod c)x_1 + (c_2 \bmod c)x_2 + \cdots + (c_k \bmod c)x_k = d$$

egyenletet kapjuk, amelyben — egyet kivéve — minden együttható kisebb abszolút értékű, mint c. A többi egyenletből is küszöböljük ki x-et, majd ismételjük a fenti lépéseket.

Ennek a módszernek a segítségével oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$3x + 3y + 8z + 10w = 1, \quad -7x - 5z + 6w = 2.$$

* **6.2.11. Feladat [9].** Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban leírt algoritmus helyes, azaz mindig megadja az összes megoldást.

6.2.12. Feladat [2]. Határozzuk meg azt a legkisebb természetes számot, amelyet a 2,3,4,5,6 számokkal osztva a maradék rendre 1,2,3,4,5.

→ **6.2.13. Feladat [5].** Mennyi $42^{600} \bmod 13$?

→ **6.2.14. Feladat [3].** Melyek azok az n pozitív természetes számok, amelyekre $\varphi(n) = 1$, illetve $\varphi(n)$ páratlan?

→ **6.2.15. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ páratlan, akkor $2^{\varphi(n)-1} \bmod n = (n+1)/2$.

→ **6.2.16. Feladat [5].** Hogyan számolhatjuk ki hatékonyan $n^{p-2} \bmod p$ értékét, ha $n \in \mathbb{Z}$ és p prímszám?

6.2.17. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p \pmod{p}.$$

6.2.18. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy az $n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}^+$ alakú számok minden prímosztója $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ alakú.

6.2.19. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy végtelen sok $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ alakú prím van.

6.2.20. Feladat: álprímek [8]. Azokat az $n \in \mathbb{N}$ összetett számokat, amelyekre $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ egy adott $a \in \mathbb{Z}$ alapra, a alapú *álprím*eknek nevezzük. Keressünk számítógéppel 2 alapú álprímeket.

6.2.21. Feladat: Carmichel-számok [9]. Azokat az $n \in \mathbb{N}$ összetett számokat, amelyek álprímek minden olyan a alapra, amely relatív prím n-hez, *Carmichel-szám*oknak nevezzük. Keressünk számítógéppel Carmichel-számokat. (Ismeretes, hogy végtelen sok van; a legkisebb 561.)

6.2.22. Feladat: pitagoraszi számhármasok [10]. Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet egész megoldásait keressük:

(1) mutassuk meg, hogy a megoldásokat megkaphatjuk, ha ismerjük a pozitív egészekből álló megoldásokat;

(2) mutassuk meg, hogy ha $r, s \in \mathbb{N}^+$ és $r > s$, akkor $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$ és $z = r^2 + s^2$ pozitív egészekből álló megoldás;

(3) mutassuk meg, hogy nem minden pozitív egészekből álló megoldás áll elő ilyen alakban, még azok se mind, amelyekre y páros;

(4) mutassuk meg, hogy minden pozitív egészekből álló megoldás megkapható az úgynevezett *primitív megoldás*okból: ezek olyan pozitív egészekből álló megoldások, amelyekre $\mathrm{lnko}(x, y, z) = 1$;

(5) mutassuk meg, hogy egy primiúiv megoldásra x, y és z páronként relatív prímek, és x, y közül az egyik páros, a másik páratlan;

(6) mutassuk meg, hogy egy primiúiv megoldásra, ha x páratlan y pedig páros, akkor $(z-x)/2$ és $(z+x)/2$ relatív prímek, szorzatuk $(y/2)^2$, így mindegyik négyzetszám;

(7) mutassuk meg, hogy minden primiúiv megoldás, amelyre x páratlan y pedig páros, előáll $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + s^2$ alakban, ahol $r, s \in \mathbb{N}^+$, $r > s$, és az egyik páros, a másik páratlan.

6.2.23. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az

$$x^2 + y^2 + 2xy - nx - ny + x + y - n + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan n megoldása van a természetes számok körében.

6.2.24. Feladat [4]. Adjuk meg $2x^3 + xy - 7 = 0$ egyenlet összes egész megoldását és mutassuk meg, hogy végtelen sok racionális megoldása van.

6.2.25. Feladat [9]. Bizonyítsuk be, hogy ha a k pozitív egész szám felírható $k = x^2 - 2y^2$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{N}^+$, akkor ebben az alakban végtelen sokféleképpen írható fel.

6.2.26. Feladat [4]. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen $8k + 3$ vagy $8k + 5$ alakú egész szám sem írható fel $k = x^2 - 2y^2$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$.

6.2.27. További feladatok. [48]: 5.5-1–5.5-4, 5.7-8, 5.7-13–5.7-14, 5.7-16, 8-1–5.8-13, 5.9-1–5.9-8; [46]: (megoldásokkal az előző feladatok és még) 3.5-1–3.5-6, 3.7-3–3.7-9, 3.7-12–3.7-15, 3.8-1–3.8-15, 3.9-1–3.9-9; [38]: 1.2.6.10; [59]: 2.1.1–2.1.50, 2.3.1.–2.3.16, 2.4.23, 5.2.1–5.2.10, 5.3.1–5.3.10, 5.4.1; [70]: 117–121, 123–154, 158, 178–189, 191; [73]: VIII.3.4, VIII.3.12.

6.3. Számelméleti függvények

→ **6.3.1. Feladat [2].** Adjuk meg az összes, harmincnál nem nagyobb n pozitív természetes számot, amelyre $\varphi(n) = \tau(n)$.

→ **6.3.2. Feladat [6].** Mennyi

(1) $109^{355} \bmod 14$;

(2) $439^{291} \bmod 60$;

(3) $1993^{1993^{192}} \bmod 1456$.

→ **6.3.3. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi számok utolsó két számjegyét tizes számrendszerben:

(1) $39^{39^{390}}$;

(2) $63^{493^{640}}$;

(3) $19^{93^{92}}$;

(4) $39^{39^{39}}$.

→ **6.3.4. Feladat [6].** Mennyi

(1) $18^{39} \bmod 91$;

(2) $26^{143} \bmod 73$;

(3) $5^{193} \bmod 84$;

(4) $14285^{203} \bmod 84$.

6.3.5. Feladat [3]. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $\varphi(n) + \sigma(n) \geq n$.

6.3.6. Feladat [6]. Bizonyítsuk be a $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ egyenlőtlenséget.

6.3.7. Feladat [7]. Adjuk meg az összes olyan $n \in \mathbb{N}^+$ számot, amelyre $\varphi(n) | n$.

6.3.8. Feladat [3]. Legyen $k, n \in \mathbb{N}^+$, legyen $\tau_k(n)$ az $n = x_1 x_2 \cdots x_k$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}^+$ egyenlet megoldásainak száma (sorrend is számít). Mutassuk meg, hogy $\tau_1(n) = 1$ minden n-re és $\tau_2 = \tau$. Mutassuk meg, hogy a τ_k függvények multiplikatívak, és τ_{k+1} a τ_k összegzési függvénye, ha $k \in \mathbb{N}^+$.

* **6.3.9. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\tau^2 * \mu = \tau * \mu^2$, ahol a négyzetreemelés a sorozatok tagonkénti négyzetreemelése.

6.3.10. További feladatok. [48]: 5.2-1–5.2-5, 5.6-1, 5.6-4–5.6-6, 5.7-10, 5.7-12; [46]: (megoldásokkal az előző feladatok és még) 3.2-1–3.2-6, 3.7-10–3.7-11, 3.6-1–3.6-18; [59]: 2.4.1–2.4.22, 4.2.1–4.2.23, 4.3.1–4.3.15, 4.4.1–4.4.10; [70]: 196; [73]: VIII.3.9–VIII.3.11, VIII.3.13–VIII.3.15.

6.4. Lánctörtek

→ **6.4.1. Feladat [1].** Határozzuk meg 139/102, 17/3, 3/17 és 8/1 lánctört közelítéseit.

→ **6.4.2. Feladat [3].** Alakítsuk át a $//2,1,4//$, $//-3,2,12//$ és $//0,1,1,100//$ lánctörteket törtekké.

→ **6.4.3. Feladat [2].** Határozzuk meg $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}$ és $1/sqrt3$ lánctört közelítéseit.

→ **6.4.4. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy az $//1,1,\dots,1,\sqrt{2}//$ számok mind irracionálisak.

° **6.4.5. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi végtelen lánctörtek értékét:

(1) $//1,1,1,\dots//$;

(2) $//2,1,1,1,\dots//$;

(3) $//2,3,1,1,1\dots//$;

(4) $//2,2,2,\dots//$;

(5) $//1,2,1,2,1,2,\dots//$;

(6) $//2,1,2,1,2,1,\dots//$;

(6) $//1,3,1,2,1,2,1,2,\dots//$.

→ **6.4.6. Feladat [3].** Legyenek $a_0,a_1,\dots,a_n$ és c pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy $//a_0,a_1,\dots,a_n// > //a_0,a_1,\dots,a_n+c//$ teljesül, ha n páratlan, de nem teljesül, ha n páros.

→ **6.4.7. Feladat [6].** Legyenek $a_0,a_1,\dots,a_n$ és $b_0,b_1,\dots b_{n+1}$ pozitív egész számok. Mi a feltétele annak, hogy $//a_0,a_1,\dots,a_n// > //b_0,b_1,\dots,b_{n+1}//$ fennálljon?

6.4.8. Feladat [6]. Keressünk két olyan p/q racionális számot, amely kielégíti a $|sqrt2-p/q| < 1/(\sqrt{5}q^2)$ egyenlőtlenséget.

6.4.9. Feladat [6]. Keressünk két olyan p/q racionális számot, amely kielégíti a $|\pi-p/q| < 1/(\sqrt{5}q^2)$ egyenlőtlenséget.

6.4.10. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítás tetszőleges $c > 2$ konstansra hamis: tetszőleges ξ irracionális számhoz végtelen sok olyan p/q racionális szám létezik, amelyre $|\xi-p/q| < 1/q^c$.

° **6.4.11. Feladat** [**7**]**.** Legyen c tetszőleges konstans. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan ξ irracionális szám, amelyre végtelen sok olyan p/q racionális számra $|\xi - p/q| < 1/q^c$.

6.4.12. Feladat [**10**]**.** Bizonyítsuk be, hogy bármely ξ irracionális szám két egymás utáni P_n/Q_n lánctört közelítése közül legalább az egyik kielégíti a $|\xi - P_n/Q_n| < 1/(2Q_n^2)$ egyenlőtlenséget.

6.4.13. Feladat [**11**]**.** Adjuk meg a $\sqrt{D}$ szám lánctörtbe fejtését, ha

$$D = \big((4m^2+1)n+m\big)^2 + 4mn + 1,$$

ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$.

° **6.4.14. Feladat** [**6**]**.** Adjunk módszert numerikusan adott alapra és számra a szám logaritmusa bináris alakja alsó és felső közelítésének meghatározására csak négyzetreemeléssel és osztással. Határozzuk meg $\ln(2)$ alsó és felső közelítését.

6.4.15. Feladat [**4**]**.** Bizonyítsuk be, hogy a 3!!! szám tizes számrendszerben több, mint 1000 jegyű, és állapítsuk meg, hogy hány nullára végződik.

° **6.4.16. Feladat** [**4**]**.** Bizonyítsuk be, hogy az $F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ Fermat-szám több, mint 10^{582} számjegyből áll tizes számrendszerben, és határozzuk meg, hány jegyű az $5 \cdot 2^{1947} + 1$ szám, amely az F_{1945} szám legkisebb prímosztója.

° **6.4.17. Feladat** [**4**]**.** Határozzuk meg, hogy a jelenleg ismert legnagyobb prímszám, $2^{32582657} - 1$ tizes számrendszerben hány jegyű.

° **6.4.18. Feladat** [**4**]**.** Határozzuk meg, hogy a jelenleg ismert legnagyobb tökéletes szám (azaz olyan n természetes szám, amelyre $d(n) = 2n$), a $2^{32582657}(2^{32582657} - 1)$ szám tizes számrendszerben hány jegyű.

6.4.19. További feladatok. [48]: 5.10-4; [46]: (megoldásokkal az előző feladatok és még) 3.10-1–3.10-12; [59]: 7.1.2, 7.1.4, 7.4.2–7.4.6, 7.5.1–7.5.6, 7.7.1, 7.8.1–7.8.4.

7. GRÁFELMÉLET

7.1. Irányítatlan gráfok

→ **7.1.1. Feladat [5].** Határozzuk meg öt csúcsig az összes páronként nem izomorf egyszerű gráfot. hány összefüggő, illetve reguláris van köztük?

→ **7.1.2. Feladat [4].** Hány olyan, páronként nem izomorf gráf van, amelyben

(1) két-két másod-, harmad- és negyedfokú csúcs van, más fokszám nem fordul elő;

(2) három-három másod-, harmad- és negyedfokú csúcs van, más fokszám nem fordul elő.

→ **7.1.3. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy tetszőleges, legalább két csúcsot tartalmazó gráfban van két egyenlő fokú csúcs.

→ **7.1.4. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy egy véges (φ, E, V', V'') páros gráfra $\sum_{v \in V'} d(v) = \sum_{v \in V''} d(v) = \natural(E)$.

→ **7.1.5. Feladat [4].** Mely C_n gráfok részgráfjai a Petersen-gráfnak?

7.1.6. Feladat [5]. Adott E és V véges halmazokra hány (φ, E, V) egyszerű gráf van?

7.1.7. Feladat [5]. Adott E és V véges halmazokra hány (φ, E, V) gráf van?

7.1.8. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha a $k_0, k_1, \ldots, k_n$ természetes számok összege $2m$, $m \in \mathbb{N}$, akkor van olyan m élű gráf, amelyben pontosan k_i darab i-ed fokú csúcs van, $i = 0, 1, \ldots, n$.

→ **7.1.9. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy tetszőleges páratlan hosszúságú zárt séta tartalmaz kört. Igaz-e ez páros hosszúságúra?

→ **7.1.10. Feladat [0].** Ha egy összefüggő gráfból elhagyunk egy d fokú csúcsot, legfeljebb hány komponensre esik szét?

→ **7.1.11. Feladat [2].** Igazoljuk, hogy egy véges gráfban a komponensek számának és az élek számának összege nem kisebb, mint a csúcsok száma.

7.1.12. Feladat [7]. Hány paraffin van 8 szénatommal?

7.1.13. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy ha az n csúcsú egyszerű gráfban a minimális fokszám nem kisebb, mint $(n-1)/2$, akkor összefüggő. Írhatjuk-e $(n-1)/2$ helyett az alsó egész részét?

→ **7.1.14. Feladat** [0]. Adott n pont. Ketten felváltva húznak be éleket. Az veszít, aki olyan élt rajzol be, amely után lesz kör. Kinek van nyerő stratégiája?

→ **7.1.15. Feladat** [0]. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van zárt Euler-vonal, páros számú pontja és páratlan számú éle van?

→ **7.1.16. Feladat** [1]. Igazoljuk, hogy bármely összefüggő gráfban van olyan séta, amely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza.

→ **7.1.17. Feladat** [2]. Igazoljuk, hogy bármely legalább két csúcsú fában legalább két elvágó csúcs van.

→ **7.1.18. Feladat** [0]. Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a gráf két pontosztálya egyforma elemszámú.

→ **7.1.19. Feladat** [1]. Bejárható-e egy 9×9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?

7.1.20. Feladat [8]. Írjunk programot, amely megmutatja, hogy a 8×8-as sakktábla lóugrással bejárható úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza.

→ **7.1.21. Feladat** [5]. Mutassuk meg, hogy egy dominócsomagból kirakható kör.

→ **7.1.22. Feladat** [3]. Mutassuk meg, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, de a belőle egyetlen csúcs elhagyásával kapott gráfban már van Hamilton-kör.

→ **7.1.23. Feladat** [3]. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor akárhogy hagyunk el belőle egy élt vagy egy csúcsot, a maradék gráf összefüggő.

→ **7.1.24. Feladat** [3]. Mutassuk meg, hogy minden 6 szögpontú egyszerű gráfra vagy ő vagy a komplementere tartalmaz 3 szögpontú teljes részgráfot.

→ **7.1.25. Feladat** [6]. Hány olyan 5 szögpontú egyszerű gráf van, amely izomorf a komplementerével?

→ **7.1.26. Feladat** [4]. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű gráf nem összefüggő, akkor a komplementere összefüggő.

7.1.27. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban található $n \in \mathbb{N}^+$ csúcs úgy, hogy ezek elhagyásával a gráf $n+1$ komponensre esik szét, akkor nincs Hamilton-köre.

7.1.28. Feladat [5]. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Írhatunk-e 0-kat és 1-eket egy kör mellé úgy, hogy adott irányban körbemenve minden lehetséges módon leolvasva az n egymás utáni számjegyet, minden n hosszú 0–1-sorozatot pontosan egyszer kapjunk meg? Ezekkel a sorozatokkal kódolva a $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ számokat, a kapott kódot *Gray-kód*nak nevezzük.

7.1.29. Feladat: minimális feszítőfa fanövesztéssel [10]. Mutassuk meg, hogy egy véges összefüggő élsúlyozott gráfban az egyik minimális súlyú éllel, mint egyélű fával indulva, ehhez minden lépésben a fa csúcsainak S halmazából kivezető $E(S)$ élek közül az egyik minimális súlyút hozzávéve, egy minimális súlyú feszítőfát kapunk. (Az algoritmust Prim algoritmusa néven szokás emlegetni, bár Jarník már jóval korábban közölte.)

7.1.30. Feladat: piros-kék algoritmus [10]. Mutassuk meg, hogy egy véges összefüggő élsúlyozott gráfban, amelynek kezdetben minden éle szintelen, az alábbi két lépés tetszőleges sorrendben való ismétlése kékre szinezi egy minimális feszítő fa éleit, a többi élt pedig pirosra:

(1) [Kék lépés.] Egy $\emptyset \neq S \subsetneq V$ halmazra, amelyben $E(S)$ nem tartalmaz kék élt, az egyik minimális súlyú $E(S)$-beli élt fessük be kékre.

(2) [Piros lépes lépés.] Egy körben, amiben nincs piros él, az egyik maximális súlyú élt fessük be pirosra.

7.1.31. Feladat [10]. Írjunk programot az összes n-csúcsú páronként nem izomorf gráf meghatározására. Ezek között hány lesz összefüggő, körmentes, fa, reguláris, hányban lesz Euler-vonal, zárt Euler-vonal, Hamilton-út, Hamilton-kör?

* **7.1.32. Feladat: Dirac tétele [13].** Mutassuk meg, hogy ha egy n szögpontú ($n > 2$) egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$, akkor van Hamilton-köre.

* **7.1.33. Feladat [13].** Egy táncmulatságon azonos számú férfi és nő van jelen. Mutassuk meg, hogy ha minden nő ismeri a férfiak több, mint felét, és minden férfi ismeri a nők több, mint felét (az ismeretség szimmetrikus), akkor az egész társaság körtáncot járhat úgy, hogy férfiak és nők felváltva vannak a körben, és mindenki ismeri mindkét szomszédját. Fogalmazzuk meg az állításnak megfelelő gráfelméleti tételt.

* **7.1.34. Feladat: Cayley tétele [15].** Igazoljuk, hogy $n > 1$ csúccsal n^{n-2} fa van, ha az élek elnevezésétől eltekintünk.

* **7.1.35. Feladat: a kínai postás-probléma [12].** Írjunk programot véges, összefüggő, pozitív valós súlyokkal élsúlyozott gráfban minimális összsúlyú, minden élt legalább egyszer tartalmazó zárt séta megtalálására.

* **7.1.36. Feladat: az utazó ügynök problémája [12].** Írjunk programot az utazó ügynök problémájának megoldására.

7.1.37. További feladatok. [22]: IV.1.7–IV.1.28, IV.1.33–IV.1.44, IV.4.3–IV.4.13; [29]: 1.2.6–1.2.8, 1.3.14–1.3.28, 1.5.9–1.5.18, 1.6.8–1.6.15, 1.8.6, 1.10.8, 1.10.9, 1.10.11-1.10.24, 2.1.8–2.1.11, 2.3.20–2.3.29, 8.1.1–8.1.3; [55]: 5¶1, 5¶2, 5¶7, 5¶12, 5¶13; [73]: XV.7.5–XV.7.6, XV.7.9, XV.7.11–XV.7.12, XV.7.14, XV.7.18.

7.2. Irányított gráfok

→ **7.2.1. Feladat [0].** Igazoljuk, hogy minden olyan gráf, amelyben van zárt Euler-vonal, irányítható úgy, hogy minden pont befoka egyenlő a kifokával.

→ **7.2.2. Feladat [0].** Igazoljuk, hogy ha az öt szögpontú teljes gráfból elhagyunk egy élt, a maradék gráf síkba rajzolható.

→ **7.2.3. Feladat [0].** Igazoljuk, hogy ha a „három ház, három kút” gráfból elhagyunk egy élt, a maradék gráf síkba rajzolható.

7.2.4. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy egy gráf csúcsai pontosan akkor oszthatók fel úgy V', V'' diszjunkt részhalmazokra, hogy páros gráfot kapjunk, ha két szinnel jólszinezhető.

7.2.5. Feladat [9]. Mutassuk meg, hogy egy gráf pontosan akkor jólszinezhető két szinnel, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört, és ekkor a komponensek két szinnel való jólszinezése lényegében egyértelmű.

7.2.6. Feladat [5]. Legalább hány élt kell elhagyni a négydimenziós kockából, hogy a maradék gráf síkba rajzolható legyen? Legalább hány csúcsot kell elhagyni a négydimenziós kockából, hogy a maradék gráf síkba rajzolható legyen?

→ **7.2.7. Feladat [4].** Jellemezzük véges halmazokon az ekvivalencia-relációk gráfjait.

→ **7.2.8. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy bármely véges, hurokélmentes gráf irányítható úgy, hogy a kapott gráf nem tartalmaz irányított kört.

7.2.9. Feladat [5]. Adott E és V véges halmazokra hány (φ, E, V) egyszerű irányított gráf van?

7.2.10. Feladat [5]. Adott E és V véges halmazokra hány (φ, E, V) irányított gráf van?

→ **7.2.11. Feladat [2].** Mennyi egy legalább kétcsúcsú fa kromatikus száma?

7.2.12. Feladat [4]. Mennyi a kromatikus száma

(1) a Petersen-gráfnak;
(2) az öt szögpontú teljes gráfnak;
(3) a „három ház, három kút” gráfnak;
(4) a 4-dimenziós kockának?

7.2.13. Feladat [5]. Mennyi a kromatikus száma

(1) a K_n gráfnak;
(2) a $K_{n,n}$ gráfnak;
(3) az n-dimenziós kockának?

7.2.14. Feladat [6]. Bizonyítsuk be, hogy egy teljes gráf tetszőleges irányításánál van olyan csúcs, ahonnan minden más csúcsba vezet irányított út.

° **7.2.15. Feladat [7].** Igazoljuk, hogy öt szabályos konvex test van.

* **7.2.16. Feladat: Warshall–Floyd-algoritmus [10].** Igazoljuk, hogy egy (ψ, E, V, w) véges élsúlyozott gráfra, amelynek csúcsai $\{1, 2, \ldots, n\}$, és nem tartalmaz negatív összsúlyú irányított kört, a $(c_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ mátrixszal indulva, amelyben $c_{i,j}$ értéke az i kezdőpontú, j végpontú élek súlyának minimuma, és $+\infty$, ha nincs ilyen él, az összes $(i, j, k) \in \{1, \ldots, n\}^3$ hármasra lexikografikus sorrendben végrehajtva a $c_{i,j} \leftarrow \min\{c_{i,j}, c_{i,k} + c_{k,j}\}$ értékadást, $c_{i,j}$ az i-ből j-be vezető minimális összsúlyú út súlya lesz.

* **7.2.17. Feladat [5].** Módosítsuk az előző algoritmust úgy, hogy a minimális összsúlyú utakat is feljegyezze.

* **7.2.18. Feladat [5].** Módosítsuk a PERT-nél tanult algoritmust úgy, hogy az az s-ből kiinduló minimális összsúlyú utakat találja meg tetszőleges irányított kört nem tartalmazó élsúlyozott gráfban.

* **7.2.19. Feladat: erős komponensek meghatározása [10].** Igazoljuk, hogy egy irányított gráfot bejárva mélységi bejárással, majd a megfordítását újra bejárva mélységi bejárással, de mindig az a csúcsot választva új gyökérnek, amelyik a legnagyobb befejezésé számot kapta az első bejárásnál, a kapott fák az erős komponensek.

7.2.20. Feladat [10]. Írjunk programot az összes n-csúcsú páronként nem izomorf irányított gráf meghatározására. Ezek között hány lesz erősen összefüggő, hány lesz irányított fa, hány tartalmaz irányított kört, hányban lesz irányított Euler-vonal, irányított zárt Euler-vonal, irányított Hamilton-út, irányított Hamilton-kör?

* **7.2.21. Feladat [8].** Tegyük fel, hogy a folyamproblémában a kapacitások egészek. Mutassuk meg, hogy létezik csak egész értékeket felvevő maximális folyam.

* **7.2.22. Feladat: általánosított folyamprobléma [9].** Általánosítsuk a folyamok elméletét arra az esetre amelyben minden csúcsnak is van (pozitív valós) kapacitása.

* **7.2.23. Feladat: Menger tétele elvágó élhalmazra [7].** Bizonyítsuk be, hogy egy G véges gráfban az $s \neq t$ csúcsokat elvágó élhalmazok elemszámának minimuma megegyezik az s-ből t-be vezető éldiszjunkt utak maximális számával.

* **7.2.24. Feladat: Menger tétele elvágó csúcshalmazra [7].** Bizonyítsuk be, hogy egy G véges gráfban az $s \neq t$ csúcsokat elvágó csúcshalmazok elemszámának minimuma megegyezik az s-ből t-be vezető csúcsdiszjunkt utak maximális számával.

* **7.2.25. Feladat: Kőnig tétele [9].** Egy gráf *lefogó csúcshalmaza* egy olyan csúcshalmaz, amelyben minden élnek van végpontja. Egy gráf egy *párosítása* egy páronként nem szomszédos élekből álló élhalmaz. Bizonyítsuk be, hogy egy véges páros gráfban a párosítások élhalmazainak maximális elemszáma megegyezik a lefogó csúcshalmazok elemszámának minimumával.

7.2.26. További feladatok. [22]: IV.1.29–IV.1.31, IV.2.1–IV.2.3, IV.2.5–IV.2.26, IV.2.28–IV.2.51, IV.3.1–IV.3.21, IV.3.29–IV.3.31, IV.4.15–IV.4.27; [29]: 1.7.14, 1.7.15, 1.10.10, 2.1.12; [73]: III.5.27, XV.7.1, XV.7.13, XV.7.22, XV.7.24–XV.7.25, XV.7.27.

8. ALGEBRA

8.1. Csoportok

→ **8.1.1. Feladat [4].** Melyik csoport az alábbiak közül:

(1) páros számok az összeadással;

(2) páratlan számok az összeadással;

(3) egészek a kivonással;

(4) páros számok az szorzással;

(5) 7 többszörösei az összeadással;

(6) racionális számok az összeadással;

(7) racionális számok a szorzással;

(8) nem nulla racionális számok a szorzással;

(9) $\{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \{1,2\}\}$ az összeadással;

(10) $\{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \{1,2,m\}\}$ az összeadással.

→ **8.1.2. Feladat [5].** Az alábbi leképezések közül melyik homomorfizmus, monomorfizmus, epimorfizmus, izomorfizmus, endomorfizmus illetve automorfizmus?

(1) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$, $n \mapsto -n$;

(2) $(\mathbb{Z},-) \to (\mathbb{R},+)$, $n \mapsto 3n$;

(3) $(\mathbb{N},\cdot) \to (\mathbb{Z},\cdot)$, $n \mapsto n^2$;

(4) $(\mathbb{Z},\cdot) \to (\mathbb{Z},\cdot)$, $n \mapsto \operatorname{sgn}(n)$;

(5) $(\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{R},+)$, $x \mapsto 1/x$, ha $x \neq 0$, egyébként 0;

(6) $(\mathbb{Z},\star) \to (\mathbb{Z},\star)$, $x \mapsto 1-x$, ahol $x \star y = 1-x-y+xy$.

→ **8.1.3. Feladat [5].** Írjuk le izomorfiától eltekintve az összes kételemű félcsoportot, illetve az összes egységelemes háromelemű félcsoportot.

→ **8.1.4. Feladat [2].** Mutassuk meg, hogy egy egységelemes félcsoportban azok az elemek, amelyeknek van jobbinverzük, részfélcsoportot alkotnak.

→ **8.1.5. Feladat** [2]. Bizonyítsuk be, hogy bármely S nem egységelemes félcsoport részfélcsoportja egy olyan T egységelemes félcsoportnak, amelynek csak az egységeleme nem tartozik bele S-be.

8.1.6. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy minden félcsoport izomorf valamely halmaz önmagába való leképezései félcsoportjának egy részfélcsoportjával.

→ **8.1.7. Feladat** [5]. Mutassuk meg, hogy az egész számok additív csoportja nem izomorf a racionális számok additív csoportjával.

→ **8.1.8. Feladat** [5]. Egész számok körében definiáljuk az $m \star n = m + n - mn$ műveletet. Mutassuk meg, hogy egységelemes félcsoportot kapunk. Mely elemeknek van inverze?

→ **8.1.9. Feladat** [2]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ nem nulla elemei szorzással vett félcsoportjának a pozitív racionális számok részcsoportját alkotják. Mennyi a részcsoport indexe az egyes esetekben?

→ **8.1.10. Feladat** [5]. A csoportokra adott példák közül azoknál, amelyek a nem nulla komplex számok multiplikatív csoportjának részcsoportjai, határozzuk meg, hogy melyik melyiknek részcsoportja, és mennyi az indexe a másikban.

→ **8.1.11. Feladat** [4]. A D_5 diédercsoport minden részhalmazára határozzuk meg az általa generált részcsoportot.

→ **8.1.12. Feladat** [4]. Mutassuk meg, hogy ha A és B egy csoport részcsoportjai, akkor AB pontosan akkor csoport, ha $AB = BA$.

→ **8.1.13. Feladat** [1]. Mik a $\mathbb{Z}$ additív csoport generátorai?

→ **8.1.14. Feladat** [1]. Bizonyítsuk be, hogy az m-edik egységgyökök multiplikatív csoportja izomorf $\mathbb{Z}_m$ additív csoportjával.

→ **8.1.15. Feladat** [2]. Bizonyítsuk be, hogy a Klein-féle csoport nem izomorf $\mathbb{Z}_4$-gyel, de izomorf $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett Descartes-szorzatával.

→ **8.1.16. Feladat** [2]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_5$ nem nulla elemei a szorzásra negyedrendű ciklikus csoportot alkotnak.

→ **8.1.17. Feladat** [2]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_8$ a szorzásra invertálható elemei a szorzással negyedrendű ciklikus csoportot alkotnak.

→ **8.1.18. Feladat** [4]. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyre $\mathbb{Z}_m$ a szorzásra invertálható elemei a szorzással nem ciklikus csoportot alkotnak?

→ **8.1.19. Feladat** [2]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_9$ a szorzásra invertálható elemei a szorzással hatodrendű ciklikus csoportot alkotnak.

→ **8.1.20. Feladat** [2]. Bizonyítsuk be, hogy két negyedrendű nem izomorf csoport van.

→ **8.1.21. Feladat** [1]. Mutassuk meg, hogy ha egy csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje 2, akkor a csoport kommutatív.

8.1.22. Feladat [2]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ végtelen csoport, de minden elem rendje véges.

8.1.23. Feladat [2]. Mutassuk meg, hogy ha egy csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje véges és ugyanaz, akkor prímszám.

8.1.24. Feladat [5]. Határozzuk meg a nem izomorf hatodrendű csoportokat.

* **8.1.25. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ additív csoportként izomorfak.

8.1.26. Feladat [9]. Mutassuk meg, hogy egy csoport bármely kommutatív részcsoportjához létezik a csoportnak azt tartalmazó maximális kommutatív részcsoportja.

→ **8.1.27. Feladat [2].** Legyen g a G csoport m-med rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) eleme. Bizonyítsuk be, hogy g^n pontosan akkor az egységelem, ha $m|n$.

8.1.28. Feladat [2]. Mutassuk meg, hogy ha A, B diszjunkt halmazok, akkor $\big(\wp(A \cup B), \triangle\big)$ izomorf $\big(\wp(A), \triangle\big)$ és $\big(\wp(B), \triangle\big)$ Descartes-szorzatával.

→ **8.1.29. Feladat [7].** Tekintsük a következő permutációkat:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Bontsuk fel őket idegen ciklusok szorzatára.
(2) Számítsuk ki az $\alpha\beta$, $\alpha^{-1}\beta$, $\alpha^2\beta$, $(\alpha\beta)^2$, $\alpha\beta\alpha^3$, $\varepsilon^{-1}\delta\gamma^{-1}$, $\gamma\delta^2\varepsilon$, ε^3, $\delta^3\varepsilon^3$, $(\delta\varepsilon)^3$ permutációkat.

→ **8.1.30. Feladat [5].** Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{1111}$$

permutációt.

8.1.31. Feladat [7]. Oldjuk meg σ-ra az alábbi egyenleteket:
(1) $(1\ 3\ 2)\sigma(3\ 4\ 1) = (2\ 3\ 4)$;
(2) $(5\ 1\ 3)^{10}(2\ 3\ 4\ 6)^{10}\sigma^{-1}\big((1\ 2\ 3)(3\ 6\ 7)\big) = ()$;
(3) $\sigma^2 = (1\ 2\ 3)$;
(4) $\sigma^3 = (1\ 2\ 3)$;
(5) $\sigma^4 = ()$ az S_4-ben.

→ **8.1.32. Feladat [0].** Soroljuk fel a $2, 3, 8, 6, 1$ sorozat öt inverzióját.

→ **8.1.33. Feladat [0].** Legkevesebb hány transzpozícióval kaphatjuk meg az `ALGORITMUS` szóból a `LOGARITMUS` szót?

→ **8.1.34. Feladat [2].** Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz mely permutációjára lesz az inverziók száma maximális? Mennyi ekkor az inverziók száma?

* **8.1.35. Feladat [12].** Adjunk algoritmust, amely a legrosszabb esetben is $O(n \lg n)$ összehasonlítással meghatározza az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációjában az inverziók számát.

→ **8.1.36. Feladat [4].** Adjunk meg a D_4 diédercsoporttal izomorf permutációcsoportot. Legalább hány eleműnek kell lennie a halmaznak, amelynek a permutációit tekintjük?

8.1.37. Feladat [6]. Adjunk meg a kvaterniócsoporttal izomorf permutációcsoportot. Igyekezzünk minél kevesebb elemű halmazt választani.

8.1.38. Feladat [3]. Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyik ciklikus:

(1) S_3;

(2) a modulo 7 nem nulla maradékosztályok multiplikatív csoportja;

(3) a komplex n-edik egységgyökök multiplikatív csoportja;

(4) $(\wp(X), \triangle)$, ahol X tetszőleges halmaz.

8.1.39. Feladat [3]. Mutassuk meg, hogy az S_n csoportban nem üres ciklusok rendje megegyezik a hosszukkal, és bármely permutáció rendje megegyezik a nem üres idegen ciklusokra való felbontásánál fellépő tényezők hosszának a legkisebb to'bbszöro'sével.

8.1.40. Feladat [3]. Igazoljuk, hogy bármely csoport tetszőleges x, y elemeire

(1) x rendje megegyezik $y^{-1}xy$ rendjével;

(2) xy rendje megegyezik yx rendjével;

(3) ha x és y felcserélhetőek, akkor xy rendje osztja x rendjének és y rendjének a legkisebb közös többszörösét.

8.1.41. Feladat [3]. Legyenek G és H csoportok, $g \in G$, $h \in H$. A g és h elemek rendjének ismeretében hogyan adhato meg a (g, h) elem $G \times H$-beli rendje?

8.1.42. Feladat [3]. Mutassuk meg hogy egy m rendű és egy n rendű ciklikus csoport direkt szorzata pontosan akkor ciklikus, ha m és n relatív prímek.

→ **8.1.43. Feladat [4].** Hány automorfizmusa van az egész számok additív csoportjának?

→ **8.1.44. Feladat [6].** Keresük meg egy 12 rendű ciklikus csoport illetve S_3 összes részcsoportját, az azok szerinti mellékosztályokat, összes normálosztóját, és az azok szerinti faktorcsoportokat.

8.1.45. Feladat [3]. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoport H és K véges részcsoportjainak rendje relatív prím, akkor a két részcsoport metszete csak az egységelemet tartalmazza.

8.1.46. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy ha a G csoport rendje n, az m relatív prím n-hez, akkor bármely $g \in G$-re az $x^m = g$ egyenletnek pontosan egy megoldása van G-ben.

8.1.47. Feladat [4]. Bizonyítsuk be, hogy

$$\{(), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), , (1\ 4)(2\ 3)\}$$

normálosztó S_4-ben és a szerinte vett faktorcsoport izomorf S_3-mal.

8.1.48. Feladat [4]. Igazoljuk, hogy a $(1, 1, 1)$ elem normálosztót generál az (additív) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ csoportban. Mivel lesz izomorf a faktorcsoport?

8.1.49. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy az alábbi leképezések csoporthomomorfizmust definiálnak, határozzuk meg mindegyiknek a magját és a mag szerinti faktorcsoportot:

(1) $(\mathbb{Z}, +) \to S_3$, $n \mapsto (1\ 2\ 3)^n$;

(2) $g^n \to h^{3n}$, ahol g egy 15 elemű, h pedig egy 9 elemű ciklikus csoport generátora;

(3) $G \times H \to H$, $(g, h) \mapsto h$, ahol G és H tetszőleges csoportok.

8.1.50. További feladatok. [3]: II.2–II.6, II.34, II.76, III.1–III.6, IV.1–IV.226; [15]: 129–137; [31]: 4.35–4.37; [73]: II.8.27–II.8.29, II.8.32, III.5.16, X.5.2, XII.6.1–XII.6.3, XII.6.7, XII.6.18–XII.6.21.

8.2. Gyűrűk és testek

→ **8.2.1. Feladat** [0]. Írjuk fel a modulo 5 maradékok testére vonatkozó összeadási és szorzási táblázatot.

→ **8.2.2. Feladat** [0]. legyenek I és J az R gyűrű ideáljai. Bizonyítsuk be, hogy $I + J$ az $I \cup J$ által generált ideál.

→ **8.2.3. Feladat** [0]. Bizonyítsuk be, hogy $2\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$-nek részgyűrűje. Ideál-e?

→ **8.2.4. Feladat** [0]. Bizonyítsuk be, hogy $4\mathbb{Z}$ a $2\mathbb{Z}$-nek részgyűrűje. Ideál-e?

→ **8.2.5. Feladat** [0]. Bizonyítsuk be, hogy $4\mathbb{Z}$ a $2\mathbb{Z}$-nek részgyűrűje. Ideál-e?

→ **8.2.6. Feladat** [2]. Döntsük el, hogy a Gauss-egészek gyűrűjében a megadott halmazok ideált alkotnak-e, és ha igen, határozzuk meg a faktorgyűrűt:

(1) $\mathbb{Z}$;

(2) $2\mathbb{Z} + i2\mathbb{Z}$;

(3) $4\mathbb{Z} + i6\mathbb{Z}$.

→ **8.2.7. Feladat** [2]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k \subset \mathbb{H}$ egységelemes nullosztómentes nem kommutatív gyűrű.

* **8.2.8. Feladat [2].** Legyen R a 30 természetes szám osztóinak halmaza, $x \triangle y := \operatorname{lkkt}(x,y)/\operatorname{lnko}(x,y)$ és $x \star y := \operatorname{lnko}(x,y)$.

(1) Mutassuk meg, hogy $\big(R,(\triangle,\star)\big)$ Boole-gyűrű. Határozzunk meg egy vele izomorf halmazgyűrűt.

(2) Általánosítsuk a feladatot 30 helyett teszőleges négyzetmentes pozitív természetes számra.

(3) Általánosítsuk a feladatot arra az esetre, amikor R az összes négyzetmentes pozitív természetes számok halmaza. Állhat-e az izomorf halmazgyűrű most valamely halmaz összes részhalmazaiból?

8.2.9. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy bármely R gyűrűre $R \times \mathbb{Z}$ egységelemes gyűrű az $(r,m)+(s,n) = (r+s, m+n)$ összeadással és az $(r,m)\cdot(s,n) = (rs+ms+nr, mn)$ szorzással, és $R \times \{0\}$ izomorf R-el. Mutassuk meg, hogy ha R egységelemes volt, akkor $R \times \mathbb{Z}$ nem lesz nullosztómentes.

8.2.10. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy minden gyűrű izomorf egy Abel-csoport endomorfizmusgyűrűjének valamely részgyűrűjével.

$\to$ **8.2.11. Feladat [0].** Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Ha igen, adjuk meg a magjukat:

(1) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $x + iy \mapsto x$;

(2) $R \times R' \to R \times R$, $(r, r') \mapsto (r, r)$, ahol R, R' tetszőleges gyűrűk;

(3) $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{2n}$, $\tilde{m} \mapsto \tilde{m}$, ha $0 \le m < n$;

(4) $\mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z}_n$, $\tilde{m} \mapsto \tilde{m}$, ha $0 \le m < n$ és $\tilde{m} \mapsto \widetilde{m-n}$, ha $n \le m < 2n$.

$\to$ **8.2.12. Feladat [2].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_{12}$-nek $0, 3, 6, 9$ osztályai egy részgyűrűjét alkotják. Ideál-e? Ha ideál, a faktorgyűrű test-e?

$\to$ **8.2.13. Feladat [5].** Adjunk meg a $\{m+n\sqrt{5} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ integritási tartományban a ± 1 elemektől különböző egységeket.

$\to$ **8.2.14. Feladat [7].** Az $R = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, 2 \nmid n\}$ integritási tartományra

(1) mutassuk meg, hogy Gauss-gyűrű;

(2) adjunk meg olyan függvényt, amellyel euklideszi gyűrű.

$\to$ **8.2.15. Feladat [5].** Legyen x és y egy Gauss-gyűrű két, egymáshoz relatív prím eleme. Mutassuk meg, hogy ha az xy szorzat egy elem négyzetének az asszociáltja, akkor x és y is.

8.2.16. Feladat [7]. Egy testet *prímtest*nek nevezünk, ha nincs valódi részteste. Mutassuk meg, hogy bármely test összes résztesteinek a metszete prímtest. Határozzuk meg az összes prímtestet.

8.2.17. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy a $\{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$ gyűrűnek két automorfizmusa van: az identitás és a $\varphi(p + q\sqrt{2}) = p - q\sqrt{2}$ leképezés.

8.2.18. Feladat [**7**]. Határozzuk meg a $\{p + q\sqrt[3]{2} + r\sqrt[3]{4} \ : \ p, q, r \in \mathbb{Q}\}$ gyűrű automorfizmusait.

$\rightarrow$ **8.2.19. Feladat** [**3**]. Határozzuk meg a $m\mathbb{Z}$ hányadostestét, ha $0 \neq m \in \mathbb{Z}$.

8.2.20. További feladatok. [3]: II.10, II.11, V.1–V.3, V.5–V.7, V.9–V.44, V.47, V.52, V.54–V.74, V.76–V.78, V.80–V.108, V.111-V.119, V.121-V.124, V.128–V.140, V.145, V.151–V.153, V.155-V.157, V.162, V.164, V.166–V.170, V.172–V.180, V.184–V.189, V.193–V.195, V.197–V.203, VI.1; [49]: 1.1-1.–1.1-4; [59]: 2.11.13–2.11.26; [73]: VII.5.5, VII.5.8, VII.5.18, XIII.3.3.

8.3. Polinomok

$\rightarrow$ **8.3.1. Feladat** [**0**]. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{72}$ fölött $8x^2 + 12$ és $18x + 36$ szorzatát.

$\rightarrow$ **8.3.2. Feladat** [**2**]. Határozzuk meg $\mathbb{H}$ felett az $f = (3+2i-j+5k)x^2-(2-3i+k)$ és $g = 2ix - (4 - 5k)$ polinomokra $fg - gf$-et.

$\rightarrow$ **8.3.3. Feladat** [**2**]. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}$ feletti $3x^8 + 5x^6 - 11x^3 + 7x^2 - 15x + 8$ és $16x^7 - 13x^6 + 6x^3 - 13x + 21$ polinomok szorzatában a 0-ad, 9-ed, 14-ed, 15-öd és 20-ad fokú tag együtthatóját!

$\rightarrow$ **8.3.4. Feladat** [**2**]. Oldjuk meg az előző feladatot $\mathbb{Z}_{24}$ felett. Mennyi a szorzatpolinom fokszáma?

$\rightarrow$ **8.3.5. Feladat** [**3**]. Ossza el az első polinomot maradékosan $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_7$ és Z_6 felett, ha lehet:

(1) $42x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 43x - 12$, $x^2 - x + 1$;

(2) $x^3 - 3x^2 - x - 1$, $3x^2 - 2x + 1$;

(3) $5x^4 + 2x - 3$, $2x^2 - 3x + 4$;

(4) x^3, $2x + 3$;

(5) $x^2 + 3x - 2$, $6x^4 + 5x^2 - 3x + 2$;

(6) $x^3 + x^2 + 3x + 2$, $2x^2 + 4$.

$\rightarrow$ **8.3.6. Feladat** [**4**]. Az $x-c$-vel való maradékos osztás segítségével határozzuk meg az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomok helyettesítési értékét a megadott helyen:

(1) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$;

(2) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$;

(3) $x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $c = 1 + 2i$.

$\rightarrow$ **8.3.7. Feladat** [**4**]. Az $x-c$-vel való ismételt maradékos osztás segítségével írjuk fel az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomokat $x - c$ hatványai segítségével:

(1) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $c = -1$;

(2) x^5, $c = 1$.

→ **8.3.8. Feladat [0].** Felbontható-e $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett a $6x + 10$ polinom?

→ **8.3.9. Feladat [4].** Adjuk meg azt az $\mathbb{R}[x]$-beli interpolációs polinomot, amely az adott helyeken az adott értékeket veszi fel:

(1) a $0, 1, 2, 3, 4$ helyen $1, 2, 3, 4, 6$;

(2) a $-1, 0, 1, 2, 3$ helyen $6, 5, 0, 3, 2$.

→ **8.3.10. Feladat [6].** Adjuk meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett:

(1) $x^6 - 27$;

(2) $x^6 + 27$;

(3) $x^8 - 16$;

(4) $x^8 + 16$;

(5) $x^{10} - x^5 + 1$;

(6) $x^{22} + x^{11} - 6$;

(7) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;

(8) $x^{2n} - 2x^n + 2$;

(9) $x^{2n} + x^n + 1$;

(10) $x^{2n} - 2x^n - 3$.

→ **8.3.11. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját:

(1) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ és $(x-1)^5(x+2)(x+5)$;

(2) $x^m - 1$ és $x^n - 1$;

(3) $x^m + 1$ és $x^n + 1$.

→ **8.3.12. Feladat [5].** Keressük meg az alábbi egész együtthatós polinomok racionális gyökeit:

(1) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

(2) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$;

(3) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

(4) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

→ **8.3.13. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Z}[x]$-ben:

(1) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

(2) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

(3) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

→ **8.3.14. Feladat [5].** Határozzuk meg a $6x^4 + 17x^3 + 13x^2 - 9x - 6$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Z}[x]$-ben.

→ **8.3.15. Feladat [2].** Hányszoros gyöke 2 az $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak?

$\rightarrow$ **8.3.16. Feladat** [3]. Adjunk meg minimális fokszámú olyan valós együtthatós polinomot, amelynek

(1) az 1 kétszeres, a 2, 3 és $1+i$ pedig egyszeres gyöke;

(2) az i háromszoros, a $-1-i$ egyszeres gyöke.

$\rightarrow$ **8.3.17. Feladat** [3]. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak.

$\rightarrow$ **8.3.18. Feladat** [3]. Határozzuk meg a $4x^6 - 8x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 18x^2 + 28x + 8$ polinom racionális többszörös gyökeit, és adjuk meg mindegyiknek a multiplicitását.

$\rightarrow$ **8.3.19. Feladat** [3]. Keressük meg az alábbi polinomok többszörös gyökeit:

(1) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;

(2) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

$\rightarrow$ **8.3.20. Feladat** [3]. Az alábbi polinomokat bontsuk fel irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ felett:

(1) $3x^5 + 2x^3 - 12x^2 - 10x + 14$;

(2) $20x^4 + 26x^3 + 65x^2 + 91$.

$\rightarrow$ **8.3.21. Feladat** [3]. Adjunk meg az alábbi polinomokhoz olyan polinomot, amelynek ugyanazok a gyökei, de mindegyik egyszeres:

(1) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

(2) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$.

$\rightarrow$ **8.3.22. Feladat** [3]. Konstruáljunk négyelemű testet, és írjuk fel a műveleti táblákat.

8.3.23. Feladat [3]. Konstruáljunk nyolcelemű testet az $x^3+x^2+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom segítségével.

8.3.24. Feladat [4]. Keressük meg $\mathbb{Z}_3$ felett az összes másodfokú irreducibilis főpolinomot. Mindegyikkel konstruáljunk véges testet.

8.3.25. Feladat [4]. Keressük meg $\mathbb{Z}_2$ felett az összes negyedfokú irreducibilis főpolinomot. Mindegyikkel konstruáljunk véges testet.

8.3.26. Feladat [4]. Hány k-adik hatvány, illetve egy k-adik hatványnak hány k-adik gyöke van egy q elemű testben, ha

(1) $q = 49$, $k = 15$;

(2) $q = 125$, $k = 24$;

(3) $q = 4096$, $k = 1024$.

8.3.27. Feladat [4]. Felbontható-e $\mathbb{Z}_3$ felett a $x^7 + 2x^4 + x^2 + 2x + 2$ polinom?

8.3.28. Feladat [4]. Bontsa fel az $x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára.

8.3.29. Feladat [4]. Hány másodfokú irreducibilis főpolinom van a q elemű test felett?

8.3.30. Feladat [4]. Hány másodfokú reducibilis főpolinom van a 7 elemű test felett?

→ **8.3.31. Feladat** [3]. Határozzuk meg a-t és b-t úgy, hogy x^4+3x^2+ax+b osztható legyen $x^2-2ax+2$-vel $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett.

→ **8.3.32. Feladat** [3]. A $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$ polinom egyik gyöke $1+i$. Határozzuk meg a többi gyökét.

→ **8.3.33. Feladat** [5]. A $\mathbb{Z}_2$ gyűrű felett

(1) állapítsuk meg, hogy irreducibilisek-e az x^4+1, x^3+x^2+1, illetve x^4+x+1 polinomok;

(2) adjuk meg az összes, legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomot;

(3) bontsuk irreducibilis polinomok szorzatára az x^7+1 polinomot.

→ **8.3.34. Feladat** [4]. Számítsuk ki az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_3$ felett. Van-e közös gyökük az egyes esetekben?

(1) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ és x^3+x^2-x-1;

(2) $x^5+x^4-x^3-2x-1$ és $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;

(3) $7x^4-28x^3+7$ és $11x^3-33x^2+11$;

(4) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ és x^5+x^2-x+1.

→ **8.3.35. Feladat** [5]. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra nézve $\mathbb{R}[x]$-ben az alábbi egyenleteket:

(1) $(3x^3-2x^2+x+2)u+(x^2-x+1)v=1$;

(2) $(x^4-x^3-4x^2+4x+1)u+(x^2-x-1)v=x$.

→ **8.3.36. Feladat** [5]. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra nézve $\mathbb{Z}_2[x]$-ben az alábbi egyenleteket:

(1) $(x^5+x^2+1)u+(x^4+x^2+x)v=1$;

(2) $(x^4+1)u+(x^3+x^2+x+1)v=x^3+x+1$.

→ **8.3.37. Feladat** [6]. Határozzuk meg a legalacsonyabb fokú olyan $h\in K[x]$ polinomot, amely az f-fel osztva u, a g-vel osztva pedig v maradékot ad, ha

(1) $f=x^3+1$, $g=x^3+x^2-2$, $u=-x^2$, $v=x^2-2x+2$, $K=\mathbb{Q}$;

(2) $f=x^2-2x+1$, $g=x^3-3x^2+2$, $u=x$, $v=x^2+x+1$, $K=\mathbb{R}$;

(3) $f=x^3+x^2+1$, $g=x^3+x+1$, $u=x+1$, $v=x^2+x+1$, $K=\mathbb{Z}_2$.

8.3.38. Feladat [6]. Bizonyítandók a következő azonosságok:

(1)
$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\big(x^2-2x\cos(k\pi/2)+1\big);$$

(2)
$$x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n}\Big(x^2-2x\cos\big(2k\pi/(2n+1)\big)+1\Big);$$

(3)
$$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\Big(x^2+2x\cos\big(2k\pi/(2n+1)\big)+1\Big);$$

(4)
$$x^{2n}+1=(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}\Big(x^2-2x\cos\big((2k+1)\pi/(2n)\big)+1\Big).$$

$\rightarrow$ **8.3.39. Feladat** [**6**]. Bontsuk parciális törtekre az alábbi racionális törtfüggvényeket $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

(1)
$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)},\quad \frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\quad \frac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1};$$

(2)
$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)},\quad \frac{4}{(x^2-1)^2}\quad \frac{x^6-x^2+1}{(x-1)^3};$$

(3)
$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1^2},\quad \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}\quad \frac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1};$$

(4)
$$\frac{8}{x^4+4},\quad \frac{2x^4}{x^4+x^2+1},\quad \frac{1-x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2};$$

(5)
$$\frac{3x^3+15x+6}{x^4+x^3+3x^2+2x+2},\quad \frac{2x^3+4x}{x^4+x^2+4},\quad \frac{3x^2-3}{x^3-3x+1}.$$

* **8.3.40. Feladat: testbővítések** [**11**]. Legyen K az F test bővítése.

(1) Mutassuk meg, hogy ha $[K:F]$ véges és V véges dimenziós vektortér K felett, akkor F felett is, és V dimenziója F felett a V tér K feletti dimenziójának és $[K:F]$-nek a szorzata.

(2) Mutassuk meg, hogy $\alpha\in K$ pontosan akkor algebrai F felett, ha F egy $L\subset K$ véges bővítésének az eleme és hogy α foka osztja L fokát.

(3) Mutassuk meg, hogy $\alpha\in K$-ra és $n\in\mathbb{N}^+$-ra α^n algebrai F felett, akkor α is.

(4) Mutassuk meg, hogy K-nak az F felett algebrai elemei testet alkotnak.

* **8.3.41. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ algebrai, és foka 4.

* **8.3.42. Feladat [0].** Mi a kapcsolat a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(1+\sqrt{2})$ és a $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ testek között?

$\rightarrow$ **8.3.43. Feladat [3].** Irreducibilis-e a z x^5+5 polinom $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_5$ felett?

* **8.3.44. Feladat [3].** Hány másodfokú irreducibilis polinom van egy q elemű véges test felett?

* **8.3.45. Feladat [3].** Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ a $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis x^3-6x^2+9x+3 polinom gyöke. Fejezzük ki a $\mathbb{Q}(\alpha)$ test $\mathbb{Q}$ feletti $1, \alpha, \alpha^2$ bázisában az alábbi elemeket:

(1) $3\alpha^5-2\alpha$;

(2) $1/(\alpha+1)$.

* **8.3.46. Feladat [5].** Határozzuk meg $\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett.

* **8.3.47. Feladat [6].** A következő testbővítések közül melyik algebrai (itt A az összes algebrai számok teste):

(1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;

(2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$;

(3) $\mathbb{Q} \subset A$;

(4) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset A$;

(5) $\mathbb{Q}(\pi) \subset \mathbb{R}$.

* **8.3.48. Feladat [6].** Határozzuk meg $\mathbb{Q}$ alábbi algebrai bővítéseinek fokát:

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$;

(2) $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$;

(3) $\mathbb{Q}(1+i\sqrt{3})$;

(4) $\mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$;

(5) $\mathbb{Q}(r+i\sqrt{s})$, ahol $r, s \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$.

8.3.49. Feladat [6]. Döntsük el, hogy az alábbi számhalmazok közül melyek alkotnak testet a valós számok szokásos műveleteivel:

(1) $\{p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3} : p, q, r \in \mathbb{Q}\}$;

(2) $\{p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{6} : p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$;

(3) $\{p+q\sqrt[3]{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$;

(4) $\{p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{4} : p, q, r \in \mathbb{Q}\}$.

* **8.3.50. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai és foka n, akkor $\sqrt{\alpha}$ is algebrai, és foka osztója $2n$-nek. Igaz-e, hogy $\sqrt{\alpha}$ foka mindig pontosan $2n$?

* **8.3.51. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai és foka n, akkor α^2 is algebrai, és foka osztója n-nek. Igaz-e, hogy α^2 foka mindig pontosan n?

* **8.3.52. Feladat: szerkeszthetőség [12].** (Laczkovich [41] könyve nyomán.) Legyen adott a síkban két különböző pont, A és B. Rögzítsünk egy koordinátarendszert, amelyben az A koordinátái $(0, 0)$, a B koordinátái pedig $(1, 0)$. Azt mondjuk, hogy a d valós szám *szerkeszthető*, ha az adott pontokat felhasználva, körzővel és vonalzóval meg tudunk szerkeszteni két olyan pontot, amelyek távolsága $|d|$.

(1) Mutassuk meg, hogy a racionális számok szerkeszthetők.

(2) Mutassuk meg, hogy egy pont pontosan akkor szerkeszthető, ha a koordinátái szerkeszthetők.

(3) Mutassuk meg, hogy ha $a > 0$ szerkeszthető, akkor $\sqrt{a}$ is szerkeszthető.

(4) Mutassuk meg, hogy egy valós szám pontosan akkor szerkeszthető, ha megkapható a racionális számokból az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és a négyzetgyökvonás véges sokszori alkalmazásával.

(5) Mutassuk meg, hogy a szerkeszthető valós számok foka $\mathbb{Q}$ felett kettőhatvány.

(6) Mutassuk meg, hogy $\cos 20^\circ$ nem szerkeszthető, így a szögharmadolás megoldhatatlan.

(7) Mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető, így a kockakettőzés megoldhatatlan.

(8) Legyenek t és ε olyan komplex számok, amelyekre $t = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$. Mutassuk meg, hogy ha t egy n-ed fokú algebrai szám, akkor ε szintén algebrai, és foka osztója $2n$-nek.

(9) Mutassuk meg, hogy ha p páratlan prím, és a szabályos p-szög szerkeszthető, akkor p Fermat-prím. (Használjuk az előző pontot $t = 2\cos(2\pi/p)$-re.)

(10) Mutassuk meg, hogy ha p páratlan prím, akkor a szabályos p^2-szög nem szerkeszthető.

(11) Mutassuk meg, hogy ha a szabályos n-szög szerkeszthető, akkor $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_m$ különböző Fermat-prímek. (Gauss az állítást és megfordítását is bebizonyította.)

* **8.3.53. Feladat [3].** Bizonyítandó, hogy $\cos\alpha$ pontosan akkor szerkeszthető, ha $\cos(\alpha/2)$ szerkeszthető.

* **8.3.54. Feladat [3].** Bizonyítandó, hogy ha $\cos\alpha$ és $\cos\beta$ szerkeszthetők, akkor $\cos(\alpha+\beta)$ és $\cos(\alpha-\beta)$ is.

* **8.3.55. Feladat [4].** Határozzuk meg azokat a k egészeket, amelyekre $\cos k^\circ = \cos(k\pi/180)$ szerkeszthető.

8.3.56. Feladat [7]. Fejezzük ki képlettel a

(1) $\cos 12^\circ = \cos(\pi/15)$ számot;

(2) $\cos 3^\circ = \cos(\pi/60)$ számot.

8.3.57. Feladat [10]. Fejezzük ki képlettel a $\cos 1^\circ = \cos(\pi/180)$ számot.

8.3.58. Feladat [2]. Mutassuk meg, hogy

(1) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ izomorf $\mathbb{C}$-vel;

(2) $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ izomorf a Gauss-egészekkel;

(3) $F[x]/(x+1)$ izomorf F-el tetszőleges testre.

8.3.59. Feladat [3]. Adjuk meg $\mathbb{Q}[x]/(x^6-3x-3)$ testben

(1) az $(x^3+1)(x^5-1)$ polinom osztályának legalacsonyabb fokú reprezentánsát;

(2) az (x^3+3x^2-5) polinom osztálya inverzének a legalacsonyabb fokú reprezentánsát.

→ **8.3.60. Feladat** [2]. Döntsük el, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben a megadott halmazok ideált alkotnak-e, és ha igen, határozzuk meg a faktorgyűrűt:

(1) polinomok, amelyek konstans tagja páros;

(2) polinomok, amelyek elsőfokú tagjának együtthatója páros.

→ **8.3.61. Feladat** [2]. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_n/(d)$ izomorf $\mathbb{Z}_{n/d}$-vel, ha $d|n$.

8.3.62. Feladat [4]. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

(1) $x^3+2x-3\equiv 0 \pmod{9}$;

(2) $x^3+2x-3\equiv 0 \pmod{5}$;

(3) $x^3+2x-3\equiv 0 \pmod{45}$;

(4) $x^3+4x+8\equiv 0 \pmod{15}$;

(5) $x^3-9x^2+23x-15\equiv 0 \pmod{503}$;

(6) $x^3-9x^2+23x-15\equiv 0 \pmod{143}$.

* **8.3.63. Feladat** [4]. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

(1) $x^5+x^4+1\equiv 0 \pmod{3^4}$;

(2) $x^3+x+57\equiv 0 \pmod{5^3}$;

(3) $x^2+5x+24\equiv 0 \pmod{36}$;

(4) $x^3+10x^2+x+3\equiv 0 \pmod{3^2}$;

(5) $x^3+x^2-4\equiv 0 \pmod{7^3}$;

(6) $x^3+x^2-5\equiv 0 \pmod{7^3}$.

8.3.64. Feladat [4]. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

(1) $x^{11}+x^8+5\equiv 0 \pmod{7}$;

(2) $x^{20}+x^{13}+x^7+x\equiv 0 \pmod{7}$;

(3) $x^{15}-x^{10}+4x-3\equiv 0 \pmod{7}$;

(4) $2x^3+5x^2+6x+1\equiv 0 \pmod{13}$;

(5) $x^{14}+12x^2\equiv 0 \pmod{13}$.

8.3.65. Feladat [4]. Oldjuk meg az

$$x^{79}+3x^{78}+2x^{77}+539x^7+537x^6+538x^5+x^2+447x\equiv 0 \pmod{540}$$

kongruenciát.

* **8.3.66. Feladat** [4]. Határozzuk meg a d paraméter értékét, ha $2x^3 - x^2 - 7x + d$ két gyökének összege 1.

* **8.3.67. Feladat** [4]. Számtani sorozatot alkotnak-e $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3$ gyökei?

→ **8.3.68. Feladat** [5]. Mutassuk meg, hogy minden $f : \{\uparrow, \downarrow\}^n \to \{\uparrow, \downarrow\}$ logikai függvény valamely, az $\big(\{\uparrow, \downarrow\}, (\oplus, \wedge)\big)$ gyűrű feletti n határozatlanú polinomhoz tartozó polinomfüggvény. (Ez a logikai függvény Zsegalkin-polinomja.)

* **8.3.69. Feladat** [4]. A Newton-formulák felhasználásával számítsuk ki az alábbi polinomok gyökeinek négyzetösszegét:

(1) $x^3 + 2x - 3$;

(2) $x^5 - 5x^3 + 5x - 2$.

* **8.3.70. Feladat** [5]. Határozzuk meg $(x-1)(x-3)(x+4)$ transzformáltját az $y = x^2 - x - 1$ helyettesítésnél.

* **8.3.71. Feladat** [7]. Transzformáljuk a megadott polinomokat a megadott helyettesítéssel:

(1) $x^3 - 3x - 4$, $y = x^2 + x + 1$;

(2) $x^3 + 2x^2 + 2$, $y = x^2 + 1$;

(3) $x^4 - x - 2$, $y = x^3 - 2$;

(4) $x^4 - x^3 - x^2 + 1$, $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

8.3.72. További feladatok. Feladatok [25] és megoldások [26]: 1.1–1.3, 1.6, 1.9–1.14, 1.16–1.27, 1.29–1.31, 1.33–1.37, 1.39–1.169, 2.6–2.15, 2.17–2.41, 2.38, 2.44–2.122, 3.1–3.16, 1.3.25–3.46, 3.62–3.64; [3]: V.4, V.8, V.45, V.48–V.51, V.53, 1.V.75, V.79, V.109, V.110, V.120, V.125–V.127, V.190–V.192, V.106, 1.VI.2–VI.4, VI.6–VI.26, VI.53–V.87; [15]: 75–80, 538–569, 1.582–660, 663–685, 755–817, 856–867; [49]: 1.2-5–1.6-29, 1.1.6-32–1.6-37, 2.0-1–2.0-2, 2.0-4–2.0-5, 2.0-10–2.0-15, 2.0-18, 1.2.0-28, 2.0-30, 2.0-32, 3.1-1–3.2-9; [59]: 2.2.1–2.2.4, 1.2.6.4–2.6.5, 2.8.1, 2.9.1–2.9.19, 9.1.1–9.1.4; [73]: 1.IX.4.6–IX.4.9, IX.4.16–IX.4.22, IX.4.26, XIII.3.8.

9. KÓDOLÁS

9.1. Kommunikáció és kódolás

→ **9.1.1. Feladat [1].** Az adott eloszlásnak határozzuk meg az entrópiáját, és hogy hanyad része az entrópia felső korlátjának:

(1) 0,34, 0,18, 0,17, 0,16, 0,15;

(2) 0,6, 0,1, 0,09, 0,08, 0,07, 0,06;

(3) 0,4, 0,4, 0,1, 0,03, 0,03, 0,02, 0,02;

(4) 0,3, 0,2, 0,2, 0,1, 0,1, 0,05, 0,05.

9.1.2. Feladat [1]. Az adott eloszlásra határozzuk meg a H_3 és H_4 entrópia értékét, és hogy hanyad része az entrópia felső korlátjának:

(1) 0,03, 0,12, 0,13, 0,02, 0,08, 0,3, 0,21, 0,01, 0,05, 0,01, 0,04;

(2) 0,11, 0,03, 0,21, 0,01, 0,08, 0,27, 0,14, 0,13, 0,02;

(3) 0,9, 0,1;

(4) 0,57, 0,43;

9.1.3. Feladat [1]. Határozzuk meg a H_4 entrópia értékét, és hogy hanyad része az entrópia felső korlátjának, ha a gyakoriságok 84, 118, 100, 31, 52, 213, 71, 60, 17, 84, 138, 32.

9.2. Forráskódolás

→ **9.2.1. Feladat [5].** Az adott kódokról döntsük el, hogy melyik felbontható, prefix, vesszős, illetve egyenletes. Rajzoljuk fel a kódfát is.

(1) $\{0, 10, 110, 1110, 1011, 1101\}$;

(2) $\{1, 011, 010, 001, 000, 110\}$;

(3) $\{0, 10, 110, 1110, 11110, 111110\}$;

(4) $\{111, 110, 101, 100, 011, 010\}$;

(5) $\{1, 01, 0011, 0010, 0001, 0000\}$;

(6) $\{1, 01, 011, 0111, 01111, 011111\}$.

→ **9.2.2. Feladat [5].** Az adott ternáris kódról mutassuk meg, hogy felbontható, és konstruáljunk olyan hozzá olyan ternáris prefix kódot, amelynek kódhosszai ugyanazok:

$$\{011, 0011, 110, 111, 2020, 20201, 220, 2212\}.$$

→ **9.2.3. Feladat [5].** Az adott kódokról döntsük el, hogy melyik felbontható.

(1) $\{1021, 121, 2021, 021, 221, 1121, 0121, 0221\}$;

(2) $\{01, 02, 10, 11, 12, 20\}, 21\}, 22\}$.

9.2.4. Feladat [4]. Az adott, egyértelműen dekódolható bináris kódhoz konstruáljunk olyan bináris prefix kódot, amelynek kódhosszai ugyanazok:

(1) $\{01, 10, 100, 111, 011\}$;

(2) $\{1, 10, 00, 0100\}$;

(3) $\{10, 101, 111, 1011\}$.

→ **9.2.5. Feladat [3].** Van-e ternáris illetve quadrális prefix kód, ha az egybetűs szavak száma 0, a kétbetűsöké 2, a három betűsöké 18, a négy betűsöké 100 és az öt betűsöké 75?

→ **9.2.6. Feladat [3].** Lehet-e felbontható egy ternáris kód, ha a 0, 1, 2, 3, 4 illetve 5 betűs szavak száma rendre 2, 3, 0, 0, 4, 1.

9.2.7. Feladat [3]. Adja meg a kódábécé minimális elemszámát, ha a 0, 1, 2, 3, 4 illetve 5 betűs szavak száma rendre

(1) 0, 0, 3, 0, 2, 2;

(2) 2, 3, 0, 0, 4, 1.

→ **9.2.8. Feladat [1].** Az adott eloszlásokhoz határozzuk meg a bináris illetve ternáris Huffman-kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat az entrópiával.

(1) 0,34, 0,18, 0,17, 0,16, 0,15;

(2) 0,6, 0,1, 0,09, 0,08, 0,07, 0,06;

(3) 0,4, 0,4, 0,1, 0,03, 0,03, 0,02, 0,02;

(4) 0,3, 0,2, 0,2, 0,1, 0,1, 0,05, 0,05.

* **9.2.9. Feladat [1].** Az előző feladat eloszlásaihoz határozzuk meg a bináris illetve ternáris Shannon–kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat a Huffman-kód átlagos kódhosszával és az entrópiával.

9.2.10. Feladat [1]. Az adott eloszlásokhoz határozzuk meg a ternáris illetve quadrális Huffman-kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat az entrópiával.

(1) 0,03, 0,12, 0,13, 0,02, 0,08, 0,3, 0,21, 0,01, 0,05, 0,01, 0,04;

(2) 0,11, 0,03, 0,21, 0,01, 0,08, 0,27, 0,14, 0,13, 0,02.

* **9.2.11. Feladat [1].** Az előző feladat eloszlásaihoz határozzuk meg a ternáris illetve quadrális Shannon–kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat a Huffman-kód átlagos kódhosszával és az entrópiával.

→ **9.2.12. Feladat [1].** Az adott eloszlásokhoz határozzuk meg a ternáris illetve quadrális Huffman-kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat az entrópiával. Ugyanezt végezzük el a kétszeres, háromszoros és négyszeres kiterjesztésre is, feltételezve, hogy az egyes ismétléses variációk relatív gyakorisága a megfelelő relatív gyakoriságok szorzata.

(1) 0,9, 0,1;

(2) 0,57, 0,43,

* **9.2.13. Feladat [1].** Az előző feladat eloszlásaihoz határozzuk meg a ternáris illetve quadrális Shannon–kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat a Huffman-kód átlagos kódhosszával és az entrópiával.

9.2.14. Feladat [1]. Határozzuk meg a quadrális Huffman-kódot, ha a gyakoriságok 84, 118, 100, 31, 52, 213, 71, 60, 17, 84, 138, 32.

* **9.2.15. Feladat [1].** Az előző feladat gyakoriságaival határozzuk meg a quadrális Shannon–kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat a Huffman-kód átlagos kódhosszával és az entrópiával.

9.2.16. Feladat [1]. Az adott eloszlásokhoz határozzuk meg a quadrális Huffman-kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat az entrópiával.

(1) 0,2, 0,2, 0,19, 0,12, 0,11, 0,09, 0,09;

(2) 0,4, 0,2, 0,2, 0,1, 0,1;

(3) 0,34, 0,18, 0,17, 0,16, 0,15;

(4) 0,6, 0,1, 0,09, 0,08, 0,07, 0,06.

* **9.2.17. Feladat [1].** Az előző feladat eloszlásaihoz határozzuk meg a quadrális Shannon–kódot. Hasonlítsuk össze az átlagos kódhosszat a Huffman-kód átlagos kódhosszával és az entrópiával.

9.2.18. Feladat [2]. Tetszőleges, r betűs kódábécét használó kód minden kódszavának elejére hozzáírjuk ugyanazt az $r+1$-edik szimbólumot. Felbontható-e az új kód? Prefix-e az új kód?

9.2.19. További feladatok. Feladatok [25] és megoldások [26]: 4.4–4.8, 4.10, 4.12–4.13, 4.34–4.42, 4.44–4.59; [22]: V.3.1–V.3.5, V.3.7–V.3.11, V.3.13–V.3.31.

9.3. Hibakorlátozó kódolás

→ **9.3.1. Feladat** [**1**]. Igaz-e, hogy egy t hibát javító kód

(1) legalább $2t+1$ hibát jelez;

(2) legalább $2t$ hibát jelez;

(3) legfeljebb $2t$ hibát jelez.

→ **9.3.2. Feladat** [**5**]. Tekintsük az alábbi bináris kódolást:

$$\texttt{00} \mapsto \texttt{00000}, \quad \texttt{01} \mapsto \texttt{01110}, \quad \texttt{10} \mapsto \texttt{10101}, \quad \texttt{11} \mapsto \texttt{11011}.$$

(1) Mekkora a `01110` és az `10101` kódszavak távolsága?

(2) Mekkora a kód távolsága?

(3) Mutassuk meg, hogy a kód csoportkód $\mathbb{Z}_2^5$-ben.

(4) Mennyi az `11011` kódszó súlya?

(5) Mennyi a kód súlya?

(6) Adjuk meg a `00000` kódszóhoz legfeljebb 1 távolságra lévő $\mathbb{Z}_2^5$-beli szavak halmazát.

(7) A `01000` szót mire dekódoljuk minimális távolságú dekódolással?

→ **9.3.3. Feladat** [**5**]. Bináris blokk-kódot készítünk 3 hosszú üzenetekhez. Legalább mekkora legyen a kódszavak hossza, ha azt akarjuk, hogy a kód pontosan 1-hiba javító legyen?

→ **9.3.4. Feladat** [**5**]. Az alábbi $\mathbb{F}_2$ feletti kódok esetén állapítsuk meg a kód távolságát, hibajelző és hibajavító képességét, hogy lineáris-e, és a lineárisaknál adjuk meg a szokásos bázisban a generátormátrixot és egy ellenőrző mátrixot:

(1) $(b_1, b_2, b_3) \mapsto (b_1, b_2, b_3, b_1 + b_2 + b_3 + 1)$;

(2) $(b_1, b_2, b_3) \mapsto (b_1, b_2, b_3, b_1, b_2 + b_3)$;

(3) $(b_1, b_2, b_3) \mapsto (b_1, b_2, b_3, b_1, 1 - b_2 b_3)$.

→ **9.3.5. Feladat** [**6**]. Egy $[n,k]$ lineáris kód generátormátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_k \\ P \end{pmatrix} \tag{1}$$

blokkmátrix alakú, ahol $\mathbb{E}_k$ a $k \times k$-as egységmátrix. Mutassuk meg, hogy a $(-P\ \mathbb{E}_{n-k})$ blokkmátrix (a szokásos bázisban) egy ellenőrző mátrixa a kódnak, ahol $\mathbb{E}_{n-k}$ az $(n-k) \times (n-k)$ méretű egységmátrix. Megfordítva, ha $(-P\ \mathbb{E}_{n-k})$ blokkmátrix egy ellenőrző mátrixa a kódnak, akkor mutassuk meg, hogy az (1) blokkmátrix egy lehetséges generátormátrix.

→ **9.3.6. Feladat** [4]. Legyen egy $\mathbb{F}_2$ feletti lineáris kód generátormátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adja meg a kód egy ellenőrző mátrixát. Mennyi a kódtávolság?

→ **9.3.7. Feladat** [4]. Legyen egy $\mathbb{F}_2$ feletti lineáris kód generátormátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adjon meg egy olyan generátormátrixot, amelyhez ugyanez a kódtér tartozik, de a mátrixának első három sora egységmátrix. Adja meg a kód egy ellenőrző mátrixát. Milyen kódszó felel meg az `110` üzenetnek?

9.3.8. Feladat [4]. Legyen egy bináris kód generátormátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mennyi a kód elemeinek száma és a kódtávolság?

→ **9.3.9. Feladat** [4]. Egy bináris kód ellenőrző mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adja meg a kód egy generátormátrixát. Mi lesz az `10100011011` üzenet kódja? Mi volt a kódolt üzenet, ha a vett szó `111010010000011`, és az átvitel során egy hiba lépett fel? Mi volt az eredeti üzenet, ha az adott generátormátrixszal történt a kódolás?

→ **9.3.10. Feladat** [**6**]**.** Konstruáljon egy $[15, 6]_{16}$ Reed–Solomon-kódot.

* **9.3.11. Feladat** [**3**]**.** Adja meg az `10010000101` bináris üzenet Hamming-kódját.

* **9.3.12. Feladat** [**4**]**.** Az előző feladat kódszavában meghibásodik a megadott bit. Végezze el mindegyik esetben a hibajavítást és a dekódolást.

(1) a 3. bit;

(2) a 4. bit;

(3) a 3. és 7. bit;

(4) a 3., 5,. és 6. bit;

(5) a 4., 6. és 8. bit.

9.3.13. További feladatok. Feladatok [25] és megoldások [26]: 4.14–4.23, 4.26, 4.28–4.30, 4.60, 4.62–4.72, 4.75, 4.78–4.80, 4.82–4.86, 4.88–4.106; [22]: V.1.3–V.1.28, V.2.1–V.2.25; [49]: 4.0-5–4.0-6, 4.0-8, 0-16–4.0-18, 4.0-21, 4.0-25, 4.0-28.

10. ALGORITMUSOK

10.1. Számítási modellek

→ **10.1.1. Feladat** [**3**]**.** Mutassuk meg, hogy egy bármely számítási eljáráshoz végtelen sok olyan számítási eljárás létezik, amely őt szimulálni képes.

→ **10.1.2. Feladat** [**6**]**.** Adjunk meg számítási eljárást a valós számokon végzett négy alapművelet és összehasonlítás segítségével az alábbi függvények értékének 2^{-n}-nél ($n \in \mathbb{N}$ rögzített) kisebb hibával való kiszámítására:

(1) $x \mapsto \sqrt{x}$;

(2) $(m, x) \mapsto \sqrt[m]{x}$, ahol $m \in \mathbb{N}^+$;

(3) $x \mapsto \log x$;

(4) $x \mapsto 2^x$.

° **10.1.3. Feladat** [**6**]**.** Adjunk meg számítási eljárást az alábbi valós konstansok értékének 2^{-n}-nél ($n \in \mathbb{N}$ rögzített) kisebb hibával való kiszámítására:

(1) e;

(2) π.

→ **10.1.4. Feladat** [**3**]**.** Melyek azok a függvények, amelyek kételemű ábécével, két belső állapottal Turing-gépen kiszámíthatóak?

→ **10.1.5. Feladat** [**6**]**.** Konstruáljunk az alábbi $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, illetve $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket kiszámító Turing-gépet:

(1) $f(n) = \mathrm{sgn}(n)$;

(2) $f(n) = \lfloor 1/n \rfloor$;

(3) $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$;

(4) $f(m, n) = \max\{0, m - n\}$;

(5) $f(m, n) = m - n$;

(6) $f(m, n) = m/n$;

(7) $f(m, n) = (4 - m)/n^2$.

→ **10.1.6. Feladat** [**7**]**.** Konstruáljunk az alábbi $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, illetve $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket kiszámító Turing-gépet:

(1) $f(n) = \max\{0, n-1\}$;

(2) $f(n) = 1 - \operatorname{sgn}(n)$;

(3) $f(n) = 1/(n-2)$;

(4) $f(m,n) = m + n$;

(5) f véges sok helyen definiált függvény;

(6) $f(m,n) = m/(2-n)$.

10.1.7. Feladat [**6**]**.** Konstruáljunk az alábbi $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, illetve $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket kiszámító egyszalagos Turing-gépet úgy, hogy a megadott k számú mezőt fogjuk össze egy mezővé:

(1) $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $k = 4$;

(2) $f(m,n) = \operatorname{sgn}(m)/n$, $k = 3$;

(3) $f(m,n) = m + n$, $k = 3$.

10.1.8. Feladat [**7**]**.** Konstruáljunk az alábbi $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, illetve $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket kiszámító Turing-gépet:

(1) $f(m,n) = |m - n|$;

(2) $f(m,n) = \max\{m,n\}$;

(3) $f(m,n) = \min\{m,n\}$;

(4) $f(m,n) = \max\{0, m-n\}$;

(5) $f(m,n) = m^n$;

(6) $f(n) = n!$.

10.1.9. Feladat [**9**]**.** Konstruáljunk az alábbi $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, illetve $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket kiszámító Turing-gépet:

(1) $f(m,n) = \lfloor m/n \rfloor$;

(2) $f(m,n) = m \bmod n$;

(3) $f(n)$ az n-edik Fibonacci-szám;

(4) $f(n)$ az n osztóinak száma;

(5) $f(n)$ az n osztóinak összege;

(6) $f(n)$ az n prímosztóinak száma;

(7) $f(n)$ az n-nél nem nagyobb prímek száma;

(8) $f(m,n)$ az m és n legnagyobb közös osztója;

(9) $f(m,n)$ az m és n legkisebb közös to'bbszöröse;

(10) $f(n)$ az n-edik prímszám;

(11) $f(n)$ az n legnagyobb prímosztója;

(12) $f(m,n)$ az m-edik prímszám kitevője és n prímtényezős felbontásában;

(13) $f(n) = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$;

(14) $f(m,n) = \lfloor \sqrt[m]{n} \rfloor$;

(15) $f(m,n) = \sqrt[m]{n}$;

(16) $f(m,n) = \binom{n}{m}$.

° **10.1.10. Feladat [9].** Konstruáljunk az alábbi $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket kiszámító Turing-gépet:

(1) $f(n) = \lfloor en \rfloor$;

(2) $f(n) = \lfloor e^n \rfloor$.

(3) $f(n)$ a $\sqrt{2}$ tizedestört előállításában az n-edik jegy;

(4) $f(n)$ az e tizedestört előállításában az n-edik jegy;

(5) $f(n)$ a π tizedestört előállításában az n-edik jegy.

10.1.11. Feladat [7]. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy legalább két betűből álló ábécé. Kódoljuk A betűit a $\{\sqcup, \mathtt{I}\}$ ábéce betűivel úgy, hogy a_i kódja egy i hosszú $\sqcup$ sorozat, amely előtt és után egy-egy $\mathtt{I}$ áll. szimulájunk egy A szalgábécével működő egyszalagos Turing-gépet ezzel a kódolással.

10.1.12. Feladat [7]. Egy szalagos, három elemű szalagábécével rendelkező Turing-gépek szimulálását végző három szalagos Turing-gép második és harmadik szalagjára legfeljebb négy betűs programot írunk. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes programok esetén milyen gépet szimulál az univerzális gép.

→ **10.1.13. Feladat [9].** Hogyan írhatunk bárhonnan hívható „szubrutint" Turing-gépre, RAM-gépre, illetve tárolt programú gépre?

10.1.14. További feladatok. [22]: VII.1.1–VII.1.6, VII.1.9–VII.1.13, VII.1.17, VII.1.19, VII.1.24–VII.1.26; [51]: III.2.1–III.2.25.

10.2. Kiszámíthatóság

→ **10.2.1. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha az ugyanazon ábécé feletti $\mathcal{L}_1$ és ‘cL_2 nyelvek eldönthetőek, akkor $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ is.

→ **10.2.2. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha az ugyanazon ábécé feletti $\mathcal{L}_1$ és ‘cL_2 nyelvek felsorolhatóak, akkor $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ is.

10.2.3. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha az ugyanazon ábécé feletti $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ nyelvekre $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ felsorolhatóak és diszjunktak, $\mathcal{C}$ pedig eldönthető, valamint $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A}$ is eldönthető.

→ **10.2.4. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha az ugyanazon ábécé feletti $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nyelvekre felsorolhatóak, akkor léteznek olyan diszjunkt felsorolható $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{B}_1$ nyelvek, amelyekre $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$, és $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

→ **10.2.5. Feladat [5].** Alkalmazzuk a rekurzió operációját a megadott f és g függvényekre, és határozzuk meg, hogy milyen h függvényt kapunk:

(1) $f(x_1) = x_1$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$;

(2) $f(x_1) = x_1$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$;

(3) $f(x_1) = 2_1^x$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}$;

(4) $f(x_1) = 1$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_3\big(1 + \operatorname{sgn}|x - 1 + 2 - 2x_3|\big)$;

(5) $f(x_1) = 1$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)\operatorname{sgn}(1 + x_3/3)$.

→ **10.2.6. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy a megadott h függvények primitív rekurzívak:

(1) $h(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2^2$;

(2) $h(x_1) = 3_1^x$;

(3) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_3 \bmod 2$.

→ **10.2.7. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy az $f(n) = n^2$, ha n páros és $f(n) = n+1$, ha n páratlan összefüggéssel definiált függvény primitív rekurzív.

→ **10.2.8. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy a $t(0) = 0$, és $t(n)$ az n osztóinak száma egyébként összefüggéssel definiált függvény primitív rekurzív.

→ **10.2.9. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy a prímszámok halmazának karakterisztikus függvénye primitív rekurzív.

→ **10.2.10. Feladat [3].** Alkalmazzuk a minimalizáció operációját a megadott változókra a megadott sorrendben:

(1) $f(x_1) = 3$, $i = 1$;

(2) $f(x_1) = x_1/2$, $i = 1$;

(3) $f(x_1, x_2) = p_1^{(2)}(x_1, x_2)$, $i = 2$;

(4) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$, $i = 1, 2$;

(5) $f(x_1, x_2) = x_1 - 1/x_2$, $i = 1, 2$;

(6) $f(x_1, x_2) = 2_1^x(2x_2 + 1)$, $i = 1, 2$.

→ **10.2.11. Feladat [3].** az alábbi függvényekről mutassuk meg, hogy parciálisan rekurzívak:

(1) $f(x_1) = 2 - x_1$;

(2) $f(x_1) = x_1/2$;

(3) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$;

(4) $f(x_1, x_2) = x_1/(1 - x_1 x_2)$.

10.2.12. További feladatok. [22]: VII.2.3–VII.2.6, VII.2.9–VII.2.29; [51]: III.1.1–III.1.44; III.3.1–III.3.9, III.3.15–III.3.48, III.4.1–III.4.43.

10.3. Idő és tár

→ **10.3.1. Feladat [5].** Vizsgáljuk meg a 10.1.8. feladatban konstruált (többszalagos, bináris) Turing-gépek futásidő és tárigényét.

→ **10.3.2. Feladat [8].** Vizsgáljuk meg a 10.1.9. feladatban konstruált (többszalagos, bináris) Turing-gépek futásidő és tárigényét.

→ **10.3.3. Feladat [8].** Az előző feladatban megvizsgált (többszalagos, bináris) Turing-gépekre, ahol a futásidő nem polinomiális, próbáljunk polinomiális méretű tanút találni.

10.3.4. Feladat [10]. Adjunk polinomiális méretű és futásidejű tanút egy természetes szám prímfelbontására.

10.3.5. További feladatok. [22]: VII.3.16–VII.3.22.

IRODALOM

[1] Aho, A. V.–Hopcroft, J. E.–Ullman, J. D.: *Számítógép-algoritmusok tervezése és analízise.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[2] Alexandrov, P. Sz.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[3] Bálintné Sz. M.–Czédli G.–Szendrei Á.: *Absztrakt algebrai feladatok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[4] Birkhoff, G.–Bartee, T. C.: *A modern algebra a számítógép-tudományban.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[5] Bruder Gy.: *Feladatok relációkra.* `http://compalg.inf.elte.hu./z̃slang/Bruder`, ELTE IK, Budapest, 2005. október 19.

[6] Bruder Gy.: *Feladatok halmazokra.* `http://compalg.inf.elte.hu./~zslang/Bruder`, ELTE IK, Budapest, 2006. szeptember 1.

[7] Busacker, R. G.–Saaty, T. L.: *Véges gráfok és hálózatok. Bevezetés alkalmazásokkal.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.

[8] Cormen, T. H.–Leiserson, C. E.–Rivest, R. L.: *Algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.

[9] Csákány B.: *Algebra. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[10] Demetrovics J.–Denev, J.–Pavlov, R.: *A számítástudomány matematikai alapjai.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[11] Dörfler, W.–Mühlbacher, J.: *Graphentheorie für Informatiker.* Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1973.

[12] Dringó L.–Kátai I.: *Bevezetés a matematikába. Egységes jegyzet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

[13] Drommerné Takács V. (szerk.): *Sejtautomaták.* Gondolat Kiadó, Budapest, 1978.

[14] Eukleidész: *Elemek, Szabó Árpád előszavával.* Gondolat, Budapest, 1983.

[15] Fagyejev, D. K.–Szominszkij, I. Sz.: *Felsőfokú algebrai feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[16] Fried E.: *Általános algebra.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[17] Fried E.: *Algebra I.–II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[18] Fuchs L.: *Algebra. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[19] Fuchs L.: *Bevezetés az algebrába és a számelméletbe. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[20] Gács P.–Lovász L.: *Algoritmusok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[21] Gathen, v. z., J.–Gerhard, J.: *Modern computer algebra.* Cambridge University Press, 1999.

[22] Gavrilov, G. P.–Szapozsenko, A. A.: *Diszkrét matematikai feladatgyűjtemény.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[23] Gonda J.: *Bevezető fejezetek a matematikába. Kiegészítés. Egyetemi jegyzet.* ELTE TTK, Budapest, 1998.

[24] Gonda J.: *Bevezető fejezetek a matematikába III. Egyetemi jegyzet.* ELTE TTK, Budapest, 2000.

[25] Gonda J.: *Gyakorlatok és feladatok a bevezető fejezetek a matematikába című tárgy hoz. Polinomok, véges testek, kongruenciák, kódolás. Egyetemi jegyzet.* ELTE TTK, Budapest, 2001.

[26] Gonda J.: *Gyakorlatok és feladatok a bevezető fejezetek a matematikába című tárgy hoz. Polinomok, véges testek, kongruenciák, kódolás. Megoldások. Egyetemi jegyzet.* ELTE TTK, Budapest, 2001.

[27] Hajnal A.–Hamburger P.: *Halmazelmélet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[28] Hajnal P.: *Gráfelmélet.* Poligon, Szeged, 1997.

[29] Hajós György: *A geometria alapjai.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[30] Hall, G. G.: *Alkalmazott csoportelmélet.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[31] Halmos P. R.: *Véges dimenziós vektorterek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[32] Halmos P. R.: *Elemi halmazelmélet.* Sigler, L. E.: *Halmazelméleti feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[33] Hewitt, E.– Stromberg, K. R.: *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.

[34] Jákó P.: *Digitális hangtechnika.* Kossuth Kiadó, Budapest, 2002.

[35] Kalmár L.: *A matematika alapjai, I./I., I./II., II./I., II./II. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 1969, 1969, 1971.

[36] Kaluzsnyin, L. A.: *Bevezetés az absztrakt algebrába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[37] Kelley, J. L.: *General topology.* D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1955.

[38] Knuth, D. E.: *The art of computer programming. Vol. 1, 2, 3. Third edition.* Addison–Wesley, 1998.

[39] Knuth, D. E.: *The Stanford GraphBase.* Addison–Wesley, 1993.

[40] Kuros, A. G.: *Felsőbb algebra.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[41] Laczkovich M.: *Sejtés és Bizonyítás.* TypoTEX, Budapest, 1998.

[42] Laczkovich M. — T. Sós Vera: *Analízis I.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[43] Landau, E.: *Grundlagen der Analysis.* Chelsea Publishing Company Inc., New York, 1948.

[44] Láng Csabáné: *Bevezető fejezetek a matematikába I.–II. Egyetemi jegyzet.* ELTE, Budapest, 2000.

[45] Láng Csabáné: *Példák és feladatok I. Komplex számok. Egyetemi jegyzet.* ELTE, Budapest, 2003.

[46] Láng Csabáné: *Számelmélet. Példák és feladatok.* ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 2005.

[47] Láng Csabáné: *Kombinatorika. Példák és megoldások.* ELTE IK, Budapest, 2006. szeptember 7, `http://compalg.inf.elte.hu./~zslang`.

[48] Láng Csabáné: *Feladatok a bevezető fejezetek a matematikába tárgy I. félévéhez.* ELTE IK, Budapest, 2007. július 25, `http://compalg.inf.elte.hu./~zslang`.

[49] Láng Csabáné: *Feladatok a bevezető fejezetek a matematikába tárgy III. félévéhez.* ELTE IK, Budapest, 2007. `http://compalg.inf.elte.hu./~zslang`.

[50] Láng Csabáné — Gonda J.: *Bevezetés a matematikába II. Egyetemi jegyzet.* ELTE, Budapest, 1995.

[51] Lavrov, I. A.–Makszimova, L. L.: *Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, 1987.

[52] Leindler L.–Schipp F. : *Analízis I. Egységes jegyzet. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[53] van Leeuwen, J. (Ed.): *Algorithms and complexity Vol. A, B.* Elsevier, Amsterdam, 1990.

[54] Lovász L.: *Algoritmusok bonyolultsága. Kézirat. ELTE TTK* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[55] Lovász L.: *Kombinatorikai problémák és feladatok.* TypoTEX, Budapest, 2000.

[56] Manna, Z.: *Programozáselmélet.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[57] Manyin, J. I.: *Bevezetés a kiszámíthatóság matematikai elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[58] Mendelson, E.: *Introduction to mathematical logic.* D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1964.

[59] Niven, I.–Zuckerman, H. S.: *Bevezetés a számelméletbe.* Műszaki Könyvkiadó, 1978.

[60] Penrose, R.: *A császár új elméje. Számítógépek, gondolkodás és a fizika törvényei.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993.

[61] Quine, W. V. O.: *A logika módszerei.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

[62] Recski A.: *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

[63] Révész Gy.: *Bevezetés a formális nyelvek elméletébe.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

[64] Rónyai L., Ivanyos G., Szabó R.: *Algoritmusok.* TypoTEX, Budapest, 1999.

[65] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[66] Safarevics, I. R.: *Algebra.* Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

[67] Salomon, D.: *Data compression.* Springer Verlag, New York, 2000.

[68] Sárközy A.: *Számelmélet és alkalmazásai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[69] Sárközy A.–Surányi J.: *Számelmélet — feladatgyűjtemény. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

[70] Sierpiński, W.: *200 feladat az elemi számelmélet köréből.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

[71] Székelyhidi László: *Erdős Jenő válogatott előadásai.* Debreceni Egyetem matematikai Intézet, 2004.

[72] Szele T.: *Bevezetés az algebrába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[73] Szendrei Á.: *Diszkrét matematika; logika, algebra, kombinatorika.* Poligon, Szeged, 2000.

[74] Totik V.: *Halmazelméleti feladatok és tételek.* Poligon jegyzettár, Szeged, 1997.

[75] Trahtenbrot, B. A.: *Algoritmusok és absztrakt automaták.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[76] Vinogradov, I. M.: *A számelmélet alapjai.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[77] Vollmar, R.: *Sejtautomata algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[78] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra I.–II.* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959.