Zárthelyi dolgozat

M.Sc., Analízis C, 2010/2011, I. félév, 1. zh.

1. (8 pont) Definiáljuk a Fourier-transzformáltat $\mathbb{L}^1$-en és fogalmazzuk meg a Riemann–Lebesgue-lemmát.

2. (8 pont) Legyen $F(x) = 3\operatorname{tg}(x) - x + |x-1|$. Legyen
$$T_1(x) = 3\operatorname{tg}(x) + |x-1|, \quad T_2(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-|x-1|}{3}.$$
Mutassuk meg, hogy mindkét esetben az $F(x) = 0$ egyenlet ekvivalens a $T_i(x) = x$ fixpont problémával. Melyik T_i alkalmas iterációra az egész számegyenesen?

3. (8 pont) Írjuk fel a Nap gravitációs terében a középpontján átmenő síkban mozgó m tömegű kisbolygó Lagrange-függvényét a Hamilton-elv segítségével. (A gravitációs potenciál r távolságban $-GM/r$, ahol M a Nap tömege, G a gravitációs állandó.)

4. (8 pont) Írjuk fel a D síkbeli origó középpontú egységsugarú zárt körlapon adott $u : D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$ függvényre az
$$S(u) = \iint_D \frac{1 + u(x,y)u_x(x,y)}{u_y(x,y)}\, dx\, dy \to \text{lokmin}$$
variációs probléma Euler–Lagrange-differenciálegyenletét. A kijelölt differenciálásokat mind végezzük el!

5. (10 pont) Ha Holdraszálláskor figyelembe vesszük a rakéta m tömegének változását is, akkor a magasságot h-val, a sebességet v-vel jelölve a
$$h''(t) = -g + \frac{w(t)}{m(t)} \qquad \text{és} \qquad m'(t) = -kw(t)$$
differenciálegyenletek és $h(t_0) = h_0$, $v(t_0) = v_0$, $m(t_0) = m_0$ kezdeti- és $h(t_1) = 0$, $v(t_1) = 0$ célfeltételek adódnak; itt g az (állandónak tekintett) gravitációs gyorsulás a Holdon, w az üzemanyagfogyasztással arányos tolóerő, amelyre $0 \le w \le a$, ahol a egy adott konstans, és k is egy adott konstans. Cél a minimális üzemanyagfogyasztással való leszállás. Írjuk fel a vezérlési egyenleteket, a vezérlési funkcionált, a Pontrjagin-függvényt és a Pontrjagin-elvből kapható transzverzalitási feltételeket. (A differenciálegyenleteket nem kell felírni.)

6. (8 pont) Határozzuk meg a $[-1, 1]$ intervallum karakterisztikus függvényének Fourier-transzformáltját. Az eredmény segítségével határozzuk meg a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin u)^2}{u^2}\, du$$
integrál értékét.