A végtelen kicsinyek használata nagyon sok buktatót tartalmaz. Például egyszerű gondolatmenetünkből nem világos, hogy miért nem differenciálható minden folytonos függvény. Még fontosabb ellenvetés, hogy a valós számok között nincsenek végtelen kicsinyek: az archimédészi tulajdonság szerint bármely nem nulla valós számhoz van olyan n, hogy a számot n-szer összeadva saját magával, az összeg abszolút értéke nagyobb lesz 1-nél, így a szám abszolút értéke nagyobb, mint $1/n$. Bár a gondolatmenetek finomíthatók, és a valós számok halmazának bővítésével a végtelen kicsinyek is „megmenthetők", ma véges dx, dy, stb., változásokkal dolgozunk, majd határátmenetet veszünk. Semmi sem gátolja azonban, hogy heurisztikus gondolatmenetben végtelen kicsinyeket használjunk, csak az így megsejtett összefüggéseket be is kell bizonyítani.

Az alábbiakban néhány ilyen heurisztikus gondolatmenettel kapható eredményt is bemutatunk.

5.3.2. Görbe hossza, heurisztikusan. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $t \mapsto z(t)$ egy, az $[a, b]$ intervallumot $\mathbb{C}$-be képező folytonosan differenciálható függvény. Ezen függvény tekinthető egy pont mozgásának. A dt időre eső elmozdulás dz, ennek hossza $|dz|$, így a teljes hossz

$$\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = \int_a^b \bigl|z'(t)\bigr|\, dt.$$

A görbe hosszát később pontosan definiáljuk, és az összefüggést (nem csak síkgörbékre) bebizonyítjuk.

Legyen $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ egy sima (azaz folytonosan differenciálható) síkgörbe. Ha deriváltja sehol sem nulla, akkor az $s = \varphi(t) = \int_a^t |z'|$ ívhossz szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható függvénye t-nek. A $w(s) = z\bigl(\varphi^{-1}(s)\bigr)$ összefüggéssel definiált függvény egy, a z-vel ekvivalens síkgörbe. Erre

$$\left|\frac{dw}{ds}\right| = \left|\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \Bigl|z'\bigl(\varphi^{-1}(s)\bigr)\Bigr| \frac{1}{\varphi'\bigl(\varphi^{-1}(s)\bigr)} = 1,$$

azaz a deriváltja egységvektor. Ilyen paraméterezéseket a síkgörbe *természetes paraméterezés*ének fogunk nevezni. Természetes paraméterezés használata sokszor egyszerűsíti a számolásokat.

Legyen $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ egy síkgörbe természetes paraméterezéssel. Ha z folytonosan differenciálható, akkor bármely $s \in [a, b]$ pontra az $e(s) = z'(s)$ vektort a z görbe s pontbeli *érintő egységvektor*ának nevezzük. (Tetszőleges paraméterezésben adott síkgörbe deriváltját is érintővektornak nevezzük, ez nem feltétlenül egységvektor.) Ha z kétszer folytonosan differenciálható, akkor $e(s)\overline{e(s)} = 1$ differenciálásával kapjuk, hogy $\Re\bigl(e'(s)\overline{e(s)}\bigr) = 0$, tehát $e'(s)/e(s)$ tiszta képzetes, azaz $e'(s)$ merőleges $e(s)$-re. A $\kappa(s) = \bigl|e'(s)\bigr|$ számot az s-beli *görbület*nek nevezzük. Ha $\kappa \equiv 0$, akkor e konstans, és r egyenes, $r(s) = r(s_0) + (s - s_0)e$. Ha $\kappa(s) \neq 0$, akkor az $n(s) = e'(s)/\kappa(s)$ vektort az s-beli *főnormális*nak nevezzük.

Legyenek most az s_0 és $\kappa_0 > 0$ valós számok, a $\mathbb{C}$-beli e_0 és n_0 egymásra merőleges egységvektorok, valamint az $z_0 \in \mathbb{C}$ vektor adottak. Legyen $R = 1/\kappa_0$. Tekintsük az

$$z(s) = (z_0 + Rn_0) - R\cos\bigl((s - s_0)/R\bigr)n_0 + R\sin\bigl((s - s_0)/R\bigr)e_0, \quad s_0 - \pi R \le s \le s_0 + \pi R$$

kört. Mivel $\left|z'(s)\right| = \left|-\sin\bigl((s-s_0)/R\bigr)n_0 + \cos\bigl((s-s_0)/R\bigr)e_0\right| = 1$, a paraméter természetes paraméter. Továbbá $z(s_0) = r_0$, $e(s_0) = e_0$, $\kappa(s_0) = \kappa_0$ és $n(s_0) = n_0$, így

$$z(s) = z_0 + (s-s_0)e_0 + \frac{\kappa_0}{2}(s-s_0)^2 n_0 + \omega(s-s_0),$$

ahol $\omega(s-s_0)$ még $(s-s_0)^2$-el osztva is nullához tart. Ha most $\tilde{z}$ tetszőleges kétszer folytonosan differenciálható görbe természetes paraméterezéssel, amelynek az s_0 pontban az értéke z_0, érintője e_0, görbülete κ_0 és főnormálisa n_0, akkor $\tilde{z}(s) - z(s)$ tart nullához még $(s-s_0)^2$-el osztva is. Ezért szokás a fenti kört a görbe s_0 ponthoz tartozó *simulókör*ének nevezni. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett a simulókör lényegében egyértelmű.

5.3.3. Polárkoordinátákkal adott szektor területe, heurisztikusan. Legyen $-\pi < \alpha < \beta \le +\pi$ és $\varphi \mapsto r(\varphi)$ egy $[\alpha,\beta]$-t $\mathbb{R}^+$-ba képező folytonos függvény. A

$$S := \bigl\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \le r(\varphi) \text{ és } \alpha \le \varphi \le \beta, \text{ ahol } \varphi = \arg(z)\bigr\}$$

szektorszerű síkidomra, a φ és $\varphi + d\varphi$ között szögekhez tartozó rész közelítőleg háromszög, amelynek területe

$$\frac{r(\varphi)^2}{2}\,d\varphi,$$

így a teljes terület

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2\,d\varphi.$$

A területet később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

5.3.4. Forgástest térfogata, heurisztikusan. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. A függvény grafikonjának megforgatásával kapott

$$T := \bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f(x)^2\bigr\}$$

forgástest azon része, amelynek első koordinátája x és $x + dx$ közé esik, közelítőleg henger, amelynek magassága dx, alapterülete pedig $\pi f(x)^2$, tehát térfogata

$$\pi f(x)^2\,dx,$$

így a teljes térfogat

$$\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

A térfogatot később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

5.3.5. Forgásfelület felszíne, heurisztikusan. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. A függvény grafikonjának megforgatásával kapott

$$F := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 = f(x)^2\right\}$$

forgásfelület azon része, amelynek első koordinátája x és $x + dx$ közé esik, közelítőleg csonkakúppalást, amelynek kerülete $2\pi f(x)$, magassága dx, így alkotójának hossza

$$\sqrt{dx^2 + df^2} = \sqrt{dx^2 + f'(x)^2\,dx^2} = dx\sqrt{1 + f'(x)^2},$$

tehát felszíne közelítőleg

$$2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

így a teljes felület

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

A felszínt később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

5.3.6. Tömeg, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték. Tekintsünk egy T testet, amelynek sűrűsége az x, y, z koordinátákkal megadott pontban $\varrho(x, y, z)$. A testen kívül a sűrűséget tekintsük nullának. Tegyük fel, hogy a test minden pontjának első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x_0 és x_1, y_0 és y_1, illetve z_0 és z_1 közé esik. Mivel a test azon részének tömege, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x és $x+dx$, y és $y+dy$, illetve z és $z+dz$ közé esik, $\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, a test tömege

$$M = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ha a gravitációs gyorsulás g, a test súlya Mg. Feltéve, hogy a gravitációs gyorsulás párhuzamos a z tengellyel, számítsuk ki az y tengelyre vonatkozó forgatónyomatékot. Mivel a test azon részétől származó forgatónyomaték, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x és $x + dx$, y és $y + dy$, illetve z és $z + dz$ közé esik, $x\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, a teljes forgatónyomaték

$$\int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} x\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ez meg kell egyezzen azzal a forgatónyomatékkal, amelyet akkor kapnánk, ha a test teljes M tömege az $S = (x_S, y_S, z_S)$ súlypontban (tömegközéppontban) lenne. Innen

$$x_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} x\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$y_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} y\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

és

$$z_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} z\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Végül határozzuk meg z tengelyre vonatkozó Θ_{zz} tehetetlenségi nyomatékot. Mivel a test azon részétől származó tehetetlenségi nyomaték, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x és $x+dx$, y és $y+dy$, illetve z és $z+dz$ közé esik, $(x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, a teljes tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_{zz} = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

5.3.7. Közelítő számítások. Az alapgondolat egy függvény értékét, integrálját, deriválját, zérushelyét stb. úgy közelíteni, hogy vesszük a függvény egy közelítését (például egy Lagrange-interpolációval kapható polinomközelítést), és ennek vesszük az értékét, integrálját, deriváltját, zérushelyét stb. Itt egy $[a,b]$ korlátos valós intervallumon értelmezett, valós értékű függvény *közelítő integrálás*át fogjuk vizsgálni. Az így adódó legegyszerűbb formulák az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

érintőformula, az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\bigl(f(a)+f(b)\bigr)$$

trapézformula, és az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Simpson-formula. Az érintőformula neve onnan ered, hogy ha a függvényt az intervallum középpontjában vett érintővel közelítjük, akkor ezt a formulát kapjuk. A Simpson-formula parabolikus interpolációnak felel meg. Könnyen megmutatható, hogy ha egy test térfogatát a Simpson-formulával úgy közelítjük, hogy

$$V \approx \frac{m}{6}(T_a + 4T_k + T_f),$$

ahol T_a, T_k, T_f rendre az alaplap, a középmetszet, illetve a fedőlap területei, és m a magasság, akkor henger, hasáb, kúp, gúla, gömb, csonkakúp és csonkagúla esetén pontos értéket kapunk.

Gyakran ezekkel az egyszerű formulákkal nem érünk célt. Ekkor az értelmezési tartományt kisebb részekre osztjuk, minden kis részen egy közelítést választunk, ennek az integrálját számítjuk ki, és a kis részeken vett integrálokat összeadjuk. Például ha egy $[a, b]$ intervallumon egy függvény integrálját akarjuk közelíteni, az intervallumot $h = (b-a)/n$ hosszúságú egyenlő részekre osztva az $x_k = a + kh$ beosztást kapjuk, és az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big).$$

összetett trapézformula, illetve az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\bigg(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2f(x_2) + \cdots + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n)\bigg).$$

összetett Simpson–formula adódik. A pontosság az osztópontok számának növelésével növelhető.

5.3.8. A Newton-módszer. Egy $f(x) = 0$ *egyenlet gyök*ének meghatározására természetes módon adódik egy közelítő módszer, ha egy adott x_n érték közelében f-et a lineáris részével közelítjük. Ekkor az

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

így a következő közelítésre

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens, ekkor viszont igen gyorsan konvergál: az értékes jegyek száma általában minden lépésben megduplázódik. A konvergencia biztosabbá tehető, ha kezdetben *relaxáció*t alkalmazunk:

$$x_{n+1} = x_n - t_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakban keressük a következő közelítést, ahol t_n pozitív valós szám. Eljárhatunk úgy, hogy először $t_n = 1$-el próbálkozunk; ha az így kapott x_{n+1}-re $\big|f(x_{n+1})\big| < \big|f(x_n)\big|$, akkor ezt választjuk következő közelítésnek, egyébként t_n-et csökkentjük. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n) = 0$.

5.3.9. Differenciálegyenletek. A természettudományokban az ismeretlen gyakran egy $x \mapsto y(x)$ függvény, amelyet egy rá vonatkozó

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = g(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

alakú egyenletből, úgynevezett *differenciálegyenlet*ből kell meghatároznunk, amelyben f és g adott függvények. A differenciálegyenletekkel részletesen a harmadik félévben foglalkozunk, itt csak két nagyon speciális esetet tekintünk.