Ha $p = a + bi + cj + dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor az a valós számot a p *valós részének*, a $bi + cj + dk$ kvaterniót pedig a p *képzetes részének* nevezzük. Jelölésük: $\Re(p)$ illetve $\Im(p)$. (A jelölés eltér a komplex számoknál szokásostól!) A p *konjugáltja* a $\overline{p} = a - bi - cj - dk$ kvaternió. A komplex számokra a szokásos konjugálást kapjuk vissza. Egy kvaternió pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával, azaz $b = c = d = 0$. Ha egy kvaternió valós része nulla, akkor *tisztán képzetesnek* nevezzük. A definíció alapján azonnal következnek a $\overline{\overline{p}} = p$, $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$, $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$ (sic!), $p + \overline{p} = 2\Re(p)$, $p - \overline{p} = 2\Im(p)$, ha $p, q \in \mathbb{H}$ összefüggések.

2.3.10. Kvaterniók és a háromdimenziós euklidészi tér. A kvaterniók a fentiek alapján $\mathbb{R}^4$ (azaz a négydimenziós *téridő*) pontjainak is tekinthetők. A kvaterniók összeadása megfelel az $\mathbb{R}^4$-beli összeadásnak. A tisztán képzetes kvaterniók $\mathbb{R}^3$-mal, és így a három dimenziós tér pontjaival azonosíthatók: egy derékszögű koordinátarendszerben $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koordinátákkal rendelkező pontnak a $p = xi + yj + zk$ tisztán képzetes kvaternió felel meg. Ily módon i, j és k rendre a koordinátarendszer három tengelyén vett egységvektoroknak felelnek meg. Ha mást nem mondunk, akkor a koordinátarendszert úgy választjuk, hogy *jobbsodrású* legyen, azaz egy jobbmenetes csavart az i vektor irányából a j vektor irányába forgatva, a k vektor irányába haladjon. A tisztán képzetes kvaterniók összeadása megfelel a térbeli vektorok szokásos (paralelogramma-szabály) összeadásának. A $p = xi + yj + zk$ és $p' = x'i + y'j + z'k$ tisztán képzetes kvaterniók szorzatának valós része $-\langle p, p' \rangle$, ahol $\langle p, p' \rangle = xx' + yy' + zz'$, képzetes része pedig $p \times p' = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - x'y)k$. A $(p, p') \mapsto \langle p, p' \rangle$ leképezést *belső szorzásnak* vagy *skaláris szorzásnak* nevezzük (bár nem művelet, de „kommutatív" és „mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve"). A $(p, p') \mapsto p \times p'$ leképezés nem kommutatív (hanem antikommutatív: $p \times p' = -p' \times p$) művelet, amely mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve, és *vektoriális szorzásnak* vagy *külső szorzásnak* szokás nevezni. Ha p'' is egy tisztán képzetes kvaternió, akkor, mint könnyen kiszámolható, $p \times (p' \times p'') = \langle p, p'' \rangle p' - \langle p, p' \rangle p''$. A vektoriális szorzás nem asszociatív, például $i \times (i \times j) = i \times k = -j$, míg $(i \times i) \times j = 0$. Végül a $(p, p', p'') \mapsto \langle p, p' \times p'' \rangle$ leképezést *vegyes szorzásnak* szokás nevezni. A kvaterniókat a háromdimenziós mozgásokkal való szoros kapcsolatuk miatt felhasználják robotok vezérlésénél.

2.3.11. Kvaterniók abszolút értéke. Egy kvaternió abszolút értéke a hossza (mint vektornak): ha $p = a + bi + cj + dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor legyen a p kvaternió *abszolút értéke* $|p| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. (Ezzel a jelöléssel most is $1/p = (1/|p|^2)\overline{p}$, ha $0 \neq p \in \mathbb{H}$.) A komplex számokra a szokásos abszolút értéket kapjuk vissza. Nyilván $p\overline{p} = |p|^2$, $|0| = 0$ és $p \neq 0$ esetén $|p| > 0$, $|\overline{p}| = |p|$, $|pq| = |p||q|$ (mert mindkét oldal négyzete $p\overline{p}q\overline{q}$), $\bigl|\Re(p)\bigr| \leq |p|$, $\bigl|\Im(p)\bigr| \leq |p|$ és $|p| \leq \bigl|\Re(p)\bigr| + \bigl|\Im(p)\bigr|$. Teljesül a $|p + q| \leq |p| + |q|$ *háromszög-egyenlőtlenség* és a belőle kapható $\bigl||p| - |q|\bigr| \leq |p - q|$ egyenlőtlenség; mindkettő ugyanúgy kapható, mint a komplex számoknál.

2.3.12. A szorzások geometriai jelentése. Ha egy tisztán képzetes kvaterniót valós számmal (skalárral) szorzunk, az a megfelelő vektor nyújtásának illetve összehúzásának felel meg, negatív valós szám esetén pedig az irányítás is változik. Az előző pont szerint ha p és p' tisztán képzetes kvaterniók, akkor

$$(1) \qquad \langle p, p'\rangle^2 + |p \times p'|^2 = |p|^2|p'|^2.$$

Innen $\big|\langle p, p'\rangle\big| \le |p||p'|$ és $|p \times p'| \le |p||p'|$.

A skaláris szorzatra kapott formulából, a skaláris szorzat egyenesen arányos p hosszával is és p' hosszával is, így $|p||p'|$-vel. Vegyük észre, hogy mint könnyen kiszámolható, $|p + p'|^2 - |p - p'|^2 = 2\langle p, p'\rangle$, azaz a skaláris szorzat kifejezhető hosszakkal. Innen következik, hogy ha mindkét vektort ugyanazzal a forgatással forgatjuk, akkor belső szorzatuk nem változik. Az arányossági tényező meghatározásához elég tehát arra az esetre szorítkoznunk, amikor $p = i$ és p' egy, az i és j vektorok síkjában lévő 1 hosszú vektor. (Az 1 hosszú vektorokat *egységvektor*oknak nevezzük.) Ekkor $p' = (\cos\varphi)i + (\sin\varphi)j$ alakban írható, ahol φ a két vektor által bezárt szög, a skaláris szorzat pedig $\cos\varphi$, az arányossági tényező. Tehát általában $\langle p, p'\rangle = |p||p'|\cos\varphi$, ahol φ a két vektor által bezár szög. Ha p egységvektor és $p' \ne 0$, akkor $\langle p, p''\rangle$ abszolút értéke a p' vektor p irányú vetületének hossza, előjele pedig pozitív, ha a két vektor hegyesszöget zár be, negatív, ha a két vektor tompaszöget zár be, és nulla, ha merőlegesek.

Ebből az eredményből (1) felhasználásával $|p \times p'| = |p||p'||\sin\varphi|$, a p és p' által kifeszített paralelogramma területe. Tehát ha p és p' párhuzamosak, akkor vektori szorzatuk nulla lesz. Egyszerű számolással adódik, hogy $\langle p, p \times p'\rangle = 0$ és $\langle p', p \times p'\rangle = 0$, azaz $p \times p'$ merőleges a p és p' vektorokra. Az irányítás meghatározásához vegyük észre, hogy ha a p vektort az i irányba, a p' vektort pedig az i és j által adott síkba forgatjuk, de úgy, hogy második koordinátája ne legyen negatív, akkor vektori szorzatuk k irányú. Ez azt jelent, hogy p, p' és $p \times p'$ jobb sodrású vektorrendszert alkotnak.

Végül a vegyes szorzat geometriai jelentése a p, p' és p'' vektorok által kifeszített paralellepipedon előjeles térfogata, hiszen ennek alapterülete $|p' \times p''|$, magassága pedig $|p|\cos\varphi$, ahol φ a p és $p' \times p''$ által bezárt szög.

2.3.13. Geometriai alkalmazások. A háromdimenziós térben p_0 és p_1 által megadott pontok *távolság*a $|p_1 - p_0|$. Ha $p_0 \ne p_1$, akkor a két ponton átmenő egyenesnek a $v = p_1 - p_0$ vektor egy *irányvektor*a; az egyenes bármely p pontjára $p - p_0$ a v vektor egy skalárszorosa, azaz valamely $t \in \mathbb{R}$-re $p = p_0 + tv$. Ez az *egyenes paraméteres egyenlete*. Ha p_0, p_1 és p_2 három pont, amelyek nem esnek egy egyenesbe, akkor a három ponton átmenő sík tetszőleges p pontjához léteznek olyan t_1 és t_2 valós számok, amelyekkel a $p - p_0 = v$ irányvektorra $v = t_1v_1 + t_2v_2$, ahol v_1 illetve v_2 a $p_1 - p_0$ illetve $p_2 - p_0$ irányvektorok. Innen $p = p_0 + t_1v_1 + t_2v_2$, ez a *sík paraméteres egyenlete*. A koordinátákat kiírva, ez három összefüggést jelent. Kettőből kifejezve a t_1 és t_2 paramétereket, és beírva a harmadikba, egy egyenletet kapunk, ez a *sík egyenlete*. Ugyanezt úgy is megkaphatjuk, hogy választunk egy, a v_1-re és a v_2-re is merőleges n *normálvektor*t, például $v_1 \times v_2$-t, és észrevesszük, hogy a v vektorokat az jellemzi, hogy merőlegesek n-re, azaz $\langle p, n\rangle = \langle p_0, n\rangle$. Hasonló módon, a sík paraméteres egyenletéből két sík egyenletét kaphatjuk (az egyenes ezek metszete), ez az *egyenes egyenletrendszere*.

A p pont és a p_0 ponton átmenő, n normálvektorú sík távolságát különösen egyszerű számolni, ha n-et egységvektornak választjuk, mivel ez a $p - p_0$ vektor n irányú vetületének hossza, azaz $\langle p - p_0, n\rangle$ abszolút értéke. Egy p pont távolságát a p_0 ponton átmenő, v irányvektorú egyenestől ugyancsak akkor a legegyszerűbb akkor számolni, ha v egységvektor: ez $(p - p_0) \times v$ hossza. A p_1 illetve p_2 pontokon átmenő, v_1 illetve v_2 irányvektorú egyenesek távolsága, ha n egységvektor, amely merőleges v_1-re és v_2-re is, $\langle p_2 - p_1, n\rangle$ abszolút értéke. Ezen két egyenes hajlásszöge a v_1 és v_2 vektorok által bezárt szög, amelynek koszinusza $\langle v_1, v_2\rangle$ abszolút értéke, ha v_1 és v_2 egységvektorok. Végül a v irányvektorú egyenes és az n normálvektorú sík hajlásszögének színusza, ha n és v is egységvektor, $\langle v, n\rangle$ abszolút értéke.

2.4. Polinomok

2.4.1. Jelölés: $\mathbb{K}$, $\overline{\mathbb{K}}$. A továbbiakban gyakran egyszerre kívánjuk tárgyalni a valós illetve a komplex esetet. Ilyenkor hasznos az a jelölés, hogy $\mathbb{K}$ vagy $\mathbb{R}$-et vagy $\mathbb{C}$-t jelenti, $\overline{\mathbb{K}}$ pedig vagy $\overline{\mathbb{R}}$-t vagy $\overline{\mathbb{C}}$-t jelenti.

2.4.2. Polinomok és racionális törtfüggvények. A $\mathbb{K}$ feletti konstans függvényekből és az identikus függvényből véges sok szorzás és összeadás segítségével kapható függvényeket *polinomfüggvény*eknek vagy röviden csak *polinom*oknak, pontosabban $\mathbb{K}$ feletti polinomoknak nevezzük. Nyilván a polinomok $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$, $x \in \mathbb{K}$ alakú függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}$. Az üres szorzatot egynek, az üres összeget nullának tekintjük, így $x^0 = 1$, az azonosan nulla polinom pedig üres összegként is írható. A binomiális tétel szerint, akármilyen $c \in \mathbb{K}$-ra, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k$ is polinom. Ha valamely $c \in \mathbb{K}$-ra $f(c) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy c az f polinom *gyök*e. Azokat a függvényeket, amelyek előállnak $x \mapsto f(x)/g(x)$ alakban, ahol f, g polinomok, *racionális törtfüggvény*eknek nevezzük; ez a függvény a g gyökeiben nincs értelmezve.

2.4.3. A maradékos osztás tétele polinomokra. *Legyenek*

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_m x^m \quad \text{és} \quad g(x) = g_0 + g_1 x + \cdots + g_n x^n$$

polinomok $\mathbb{K}$ felett, $n \geq 0$ és $g_n \neq 0$. Ekkor léteznek olyan q és r polinomok, hogy $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ minden $x \in \mathbb{K}$-ra, továbbá ha $m < n$, akkor q az üres összeg, egyébként $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_{m-n}$, $q_{m-n} = f_m/g_n$ és $r(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1} x^{n-1}$.

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás algoritmust ad a maradékos osztás elvégzésére.

Bizonyítás. Az m szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $m < n$, akkor legyen q az üres összeg és $r_j = f_j$, ha $0 \leq j \leq m$ és $r_j = 0$, ha $m < j < n$. Indukcióval, tegyük fel, hogy $m-1$-re igaz az állítás. Legyen $q_{m-n} = f_m/g_n$, és legyen $f_j^* = f_j - q_{m-n} g_{j-m+n}$, ha $j = m-n, m-n+1, \dots, m$ és legyen $f_j^* = f_j$, ha $j = 0, 1, \dots, m-n-1$. Ekkor $f^*(x) = f_0^* + f_1^* x + \cdots + f_{m-1}^* x^{m-1}$, így az indukciós feltevés szerint léteznek olyan $q_0, q_1, \dots, q_{m-n-1}$ és $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ számok, hogy

$$f^*(x) = g(x)\left(\sum_{j=0}^{m-n-1} q_j x^j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} r_j x^j.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $g(x) q_{m-n} x^{m-n}$-et, kapjuk az állítást. $\square$