1.3.39. Valós önadjungált transzformáció átlós alakja. *Ha A egy euklideszi tér egy önadjungált transzformációja, akkor van a térnek olyan ortonormált bázisa, amelyben A mátrixa átlós alakú.*

Bizonyítás. Az alapgondolat az úgynevezett *komplexifikálás*. Írjuk fel egy ortonormált bázisban A mátrixát. Ez a valós elemű szimmetrikus mátrix tekinthető egy unitér tér egy önadjungált transzformációja mátrixának is valamely ortonormált bázisban. Innen az előző következmény szerint karakterisztikus polinomjának zérushelyei mind valósak. Ezt felhasználva, alkalmazhatjuk a normális transzformációk esetén használt gondolatmenetet. $\square$

1.3.40. Poláris felbontás. *Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett és $A : X \to Y$ egy lineáris leképezés. Ha $\dim(X) \le \dim(Y)$, akkor létezik olyan $Q : X \to Y$ lineáris izometria és $P : X \to X$ pozitív definit transzformáció, hogy $A = QP$, ha pedig $\dim(X) \ge \dim(Y)$, akkor létezik olyan $Q : Y \to X$ lineáris izometria és $P : Y \to Y$ pozitív definit transzformáció, hogy $A = PQ^*$.*

A bizonyítás konstruktív.

* **Bizonyítás.** Először legyen $\dim(X) \le \dim(Y)$. Válasszunk olyan $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ortonormált bázist X-ben, amelyben az A^*A önadjungált transzformáció mátrixa diagonális. Erre $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle A^*Ae_i, e_j\rangle = 0$. Legyen $Pe_i = \|Ae_i\|e_i$ $(1 \le i \le m)$ és legyen $Qe_i = Ae_i/\|Ae_i\|$, ha $Ae_i \ne 0$, az A nullterét pedig képezze le Q izometrikusan $\mathrm{im}(A)$ ortogonális komplementerébe. A másik esetben $A^* = QP$, és így $A = P^*Q^* = PQ^*$. $\square$

* **1.3.41. Szinguláris érték felbontás.** *Egy $\mathbb{K}$ feletti $m \times n$-es a mátrix felírható $a = \tilde{q}s\overline{q}'$ alakban, ahol s egy $m \times n$-as diagonális mátrix a főátlójában álló*

$$s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_k \ge 0, \quad k = \min\{m, n\}$$

értékekkel, $\tilde{q}$ és q pedig $m \times m$-es illetve $n \times n$-es ortogonális mátrixok.

A bizonyítás konstruktív. A tételben szereplő felbontást az *a maximális szinguláris érték felbontás*ának nevezzük, az $s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_k$ értékek a *szinguláris érték*ek. Megjegyezzük, hogy ha $n < m$, akkor $\tilde{q}$ utolsó $m - n$ oszlopa el is hagyható, hiszen s utolsó $m - n$ sora úgyis nulla. Ezt az alakot nevezzük *szinguláris érték felbontás*nak, ezt fogjuk bizonyítani. Sőt, ha a rangja r, akkor s rangja is r kell legyen, így $s_{r+1} = s_{r+2} = \cdots = s_k = 0$, így $\tilde{q}$ utolsó $m - r$ oszlopa, valamint q utolsó $n - r$ oszlopa (azaz $\overline{q}'$ utolsó $n - r$ sora) is elhagyható; ezt az alakot *minimális szinguláris érték felbontás*nak nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a szokásos bázisban a. Tekintsük A poláris felbontását: $A = QP$. Van olyan ortonormált bázis, amelyben P mátrixa diagonális és a bázisvektorok cserélgetésével az is elérhető, hogy ebben a bázisban P diagonálisának elemei monoton csökkenő sorozatot alkossanak. Legyen s ez a mátrix. Legyen T az erről a bázisról a szokásos bázisra való áttérés kísérő transzformációja. Ekkor P mátrixa a szokásos bázisban $[T]^{-1}s[T]$, így $a = [A] = [Q][T]^{-1}s[T] = [QT^{-1}]s[T]$. Mivel T, és így T^{-1} is unitér, QT^{-1} lineáris izometria, így $\tilde{q} = [QT^{-1}]$, $q = [T]^{-1}$ jelöléssel kapjuk az állítást. Az $m \ge n$ esetben a bizonyítás hasonló. $\square$

* **1.3.42. Általánosított inverz.** Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, $A : X \to Y$ lineáris operátor. Az $Ax = b$ lineáris egyenlet helyett tekinthetjük az általánosabb $\|Ax - b\|^2 \to \min$ problémát, amelyről megmutatjuk, hogy mindig megoldható. Ennek a megoldásait a *legkisebb négyzetek módszere* értelmében vett megoldásoknak nevezzük. A megoldás nem mindig egyértelmű, ezért $\min_{x \in X} \|Ax - b\|^2 = \alpha$ jelöléssel tekintsük az $\|Ax - b\|^2 = \alpha$, $\|x\|^2 \to \min$ problémát. Megmutatjuk, hogy ennek egyetlen x_b megoldása van. Valóban, az $\|y - b\| \to \min$, $y \in \mathrm{im}(A)$ problémának egyetlen megoldása van, amelyet meg is kaphatunk: tekintsünk egy ortonormált bázist az $\mathrm{im}(A)$ altérben, és kombináljuk a vektorait b-nek a Fourier-együtthatóival. Most $A^{-1}(y)$ minden eleme az $\|Ax - b\|^2 = \alpha$ megoldása. Legyen $x_0 \in A^{-1}(y)$. Ezzel $A^{-1}(y) = \ker(A) + x_0$. Írjuk fel x_0-at $x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in \ker(A)^\perp$. Megmutatjuk, hogy x_2 a keresett x_b elem. Mivel $y = A(x_0) = A(x_1) + A(x_2) = A(x_2)$, kapjuk, hogy $x_2 \in A^{-1}(y)$. Minden $x \in A^{-1}(y)$ egyértelműen felírható $x = x_2 + x'$ alakban, ahol $x' \in \ker(A)$. Mivel $x_2 \in \ker(A)^\perp$, azt kapjuk, hogy $\|x\|^2 = \|x_2\|^2 + \|x'\|^2$, az $\|x\|^2$ (és így $\|x\|$ is) akkor minimális, ha $x' = 0$, azaz valóban $x_b = x_2$.

Az $A^\dagger : b \mapsto x_b$ leképezését Y-nak X-be az A *általánosított inverz*ének nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy az $\mathrm{im}(A) = Y$, $\ker(A) = \{0\}$ esetben megegyezik az inverzzel.

* **1.3.43. Feladat [7].** Ha a szokásos bázisban

$$[A_c] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

ahol c valós paraméter, számítsuk ki $A_c^\dagger$ mátrixát. Vizsgáljuk a $\lim_{c \to 0} A_c^\dagger$ határértéket.

* **1.3.44. Tétel.** *Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, $e_1, \dots, e_n$ illetve $f_1, \dots, f_m$ ortonormált bázisokkal, $A : X \to Y$ lineáris operátor, rangja r. Legyen A mátrixának maximális szinguláris érték felbontása $a = \tilde{q} s \overline{q}'$. Ekkor $A^\dagger$ lineáris operátor, és mátrixa ugyanezekben a bázisokban $a^\dagger = q s^\dagger \overline{\tilde{q}}'$, ahol $s^\dagger$ egy $n \times m$-es diagonális mátrix, átlójában az $1/s_1, 1/s_2, \dots, 1/s_r, 0, \dots, 0$ értékekkel.*

Bizonyítás. Legyen $b \in Y$, $\alpha = \min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$, és x az $\alpha = \|Ax - b\|^2$ minimális normájú megoldása, azaz $x = A^\dagger(b)$. Ekkor

$$\alpha = \big\|a[x] - [b]\big\|^2 = \big\|\tilde{q} s \overline{q}'[x] - [b]\big\|^2 = \big\|s \overline{q}'[x] - \overline{\tilde{q}}'[b]\big\|^2 = \big\|s[y] - [c]\big\|^2,$$

ahol $[c] = \overline{\tilde{q}}'[b]$ és $[y] = \overline{q}'[x]$, mivel $\tilde{q}$ és $\overline{q}'$ ortogonális mátrixok. Legyen

$$[y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad [c] = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\|s[y] - [c]\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |s_j y_j - c_j|^2 + \sum_{j=r+1}^{m} |c_j|^2.$$

Innen $y_j = c_j/s_j$, ha $1 \le j \le r$, és y_j tetszőleges, ha $r < j \le m$ esetben lesz a bal oldal minimális. Ezen vektorok közül y normája akkor lesz minimális, ha $r < j \le m$ esetén $y_j = 0$. Innen $[x] = q[y] = qs^\dagger[c] = qs^\dagger\overline{q}'[b]$, azaz $A^\dagger$ lineáris és $[A^\dagger] = qs^\dagger\overline{q}'$. □

* **1.3.45. Tétel: QR-felbontás.** *Legyen a egy $m \times n$-es $\mathbb{K}$-beli elemű mátrix, és legyen k a rangja. Ekkor létezik olyan $m \times k$-as q ortogonális mátrix és $k \times n$-es felső trapéz mátrix, hogy $a = qr$.*

A bizonyítás konstruktív. A tételben szereplő felbontást *minimális QR-felbontás*nak szokás nevezni. További nulla sorokkal kiegészítve r-et és megfelelő oszlopokkal kiegészítve q-t elérhető, hogy a méretekben szereplő k-ra $k = \min\{m, n\}$ legyen, ezt fogjuk *QR-felbontás* alatt érteni. Ha $m > n$, akkor tovább folytatva a kiegészítést, azt is elérhetjük, hogy a méretekben szereplő k-ra $k = m$ legyen; ezt a felbontást *maximális QR-felbontás*nak nevezzük.

Bizonyítás. Legyenek a oszlopai $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hagyjunk el minden olyan vektort ezek közül, amely az előzőek lineáris kombinációja, majd a maradék $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$ vektorokat ortonormáljuk. A kapott $q_1, q_2, \ldots, q_k$ vektorok legyenek q oszlopai. Ha $1 \le j \le n$ és $j_\ell \le j < j_{\ell+1}$ (ahol $j_0 = 0$ és $j_{k+1} = n + 1$), akkor a_j lineárisan kombinálható a $q_1, \ldots, q_\ell$ vektorokból: $a_j = \sum_{i=1}^{\ell} r_{i,j} q_i$. Legyen $r_{i,j} = 0$, ha $\ell < i \le k$. A kapott $r = (r_{i,j})$ mátrix felső trapéz mátrix és nyilván $a = qr$. □

* **1.3.46. Megjegyzés.** Abban a speciális esetben, amikor az $A : X \to Y$ lineáris operátor kölcsönösen egyértelmű, ahol X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, a QR-felbontás is felhasználható az $\|Ax - b\|^2 \to \min$ probléma megoldására. Választva $e_1, \ldots, e_n$ és $f_1, \ldots, f_m$ ortonormált bázisokat ($m \ge n$), az $a = [A]$ jelöléssel, ha $a = qr$ az a maximális QR-felbontása, akkor

$$\|Ax - b\|^2 = \big\|a[x] - [b]\big\|^2 = \big\|qr[x] - [b]\big\|^2 = \big\|r[x] - \overline{q}'[b]\big\|^2 = \big\|[y] - [c]\big\|^2,$$

ahol $[y] = r[x]$ és $[c] = \overline{q}'[b]$, mivel q ortogonális. Legyen

$$[y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [c] = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\big\|[y] - [c]\big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j - c_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{m} |c_j|^2.$$

Innen a minimum értéke $\sum_{j=n+1}^{m} |c_j|^2$ és akkor kapjuk, ha $y_j = c_j$ ($j = 1, \ldots, n$). Az $r[x] = [y]$ egyenletrendszer egyértelműen (és könnyen) megoldható, mert r rangja n, és felső háromszög alakú.

* **1.3.47. Feladat** [8]. Legyen $h = (h_{i,j})$ a 15×15-ös Hilbert-márix, azaz legyen $h_{i,j} = 1/(i+j)$. Számoljuk ki a csupa 1 koordinátájú x oszlopmátrixra $b = hx$ értékét pontosan, majd oldjuk meg Gauss-eliminációval részleges főelemkiválasztással lebegőpontosan az egyenletrendszert x-re. Csináljuk meg ugyanezt h szinguláris érték felbontásával, nullázva a 10^{-10}-nél kisebb szinguláris értékeket.

* **1.3.48. Feladat** [8]. Legyen a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad [b] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a legkisebb négyzetes értelemben vett megoldások közül a legkisebb normájút. Ismételjük meg ugyanezt, a második sor második elemét 10^{-12}-re cserélve.

∘* **1.3.49. Tyihonov-regularizáció.** Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, $A : X \to Y$ lineáris operátor. Az

$$\|Ax - b\|^2 = \alpha, \quad \|x\|^2 \to \min, \quad \text{ahol} \quad \alpha = \min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$$

probléma helyett adott $C > 0$ konstanssal tekintsük a

$$\|A_\delta x - b_\delta\|^2 + \delta \|Tx\|^2 \to \min$$

problémát, ahol $\delta > 0$, $\|b - b_\delta\| \le \delta$, $\|A - A_\delta\| \le \delta$, $\|Pb - P_\delta b_\delta\| \le C\delta$ és T a *Tyihonov-operátor*, leggyakrabban $T = \mathbb{I}_X$; itt P a $\operatorname{im}(A)$-ra, P_δ pedig $\operatorname{im}(A_\delta)$-ra való merőleges vetítés operátora. Ennek a problémának a megoldása sokszor sokkal jobban viselkedik (és megmutatható, hogy ha $T = \mathbb{I}_X$, akkor $\delta \to 0$ esetén tart az első probléma megoldásához). Az eljárást *Tyihonov-regularizáció*nak nevezzük.

∘* **1.3.50. Feladat** [7]. Ha a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad [b] = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},$$

ahol a, c valós paraméterek, számítsuk ki a Tyihonov-regularizációval kapott probléma x_δ megoldását, ha $C = 1$, $T = \mathbb{I}_X$, $A_\delta = A$ és $b_\delta = b$. Vizsgáljuk a $\lim_{\delta \to 0} x_\delta$ határértéket.