6. feladatsor: Gauss-számsík, egységgyökök

Gauss-számsík, komplex számok geometriája

1. feladat

A sík mely geometriai transzformációjának felelnek meg a következő leképzések?
(a) $z \mapsto 3z + 2$
(b) $z \mapsto (1 + i)z$
(c) $z \mapsto 1/\overline{z}$

2. feladat

Forgassa el síkban a $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektort (a) 45 (b) 30 (a) -60 fokkal.

3. feladat

Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 2\}$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 3\}$$
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0\}$$

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) $A \cap B$ (f) $A \cup B$
(g) $A \cap C$ (h) $B \cup C$ (i) $A \setminus B$ (j) $A \triangle B$ (k) $A \cap D$ (l) $C \setminus \overline{B}$

4. feladat

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 2| = 10\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z\}$
(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq |z + 3|\}$
(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z + i - 2| \leq 4\}$

5. feladat

A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a $K = 1 + 2i$ illetve egyik csúcsa az $A = 5 + 4i$ komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

6. feladat

Legyen z, w két különböző komplex szám! Írja fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve súlypontját, melyeknek z, w csúcsai!

Komplex egységgyökök

7. feladat
Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n-re lesznek ezek n-edik egységgyökök, illetve primitív n-edik egységgyökök?

(a) 1 (b) -1 (c) i

(d) $1+i$ (e) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ (f) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(g) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (h) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (i) $\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)$

(j) $\cos\left(\dfrac{\pi}{361}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{361}\right)$

8. feladat

(a) A $z=-1-\sqrt{3}i$ egyik negyedik gyöke $w_0=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$. Alkalmas primitív negyedik egységgyök segítségével állítsa elő a többi negyedik egységgyököt, majd ezek felhasználásával számítsa ki z többi negyedik gyökét.

(b) A $z=-i$ egyik hatodik gyöke $w_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Alkalmas primitív hatodik egységgyök segítségével állítsa elő a többi hatodik egységgyököt, majd ezek felhasználásával számítsa ki z többi hatodik gyökét.

(A komplex gyökvonás képlete nem használható.)

Nehezebb, illetve szorgalmi feladatok

9. feladat
Mutassuk meg, hogy ha $\varepsilon^4=i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon)$!

10. feladat
Ha $o(\varepsilon)=128$, akkor mennyi lehet $o(i\cdot\varepsilon)$? Bizonyítsuk is be állításunkat.