2. feladatsor: Relációk alapfogalmai és kompozíciója

Relációk alapfogalmai

1. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $\rho = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

(a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

(b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

(c) Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

(d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?
$\rho_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\rho_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$\rho_3 = A \times B$
$\rho_4 = B \times A$

(e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, a $\rho(\{1, 2\})$ képet és a $\rho^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. feladat

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$. Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét, a $\rho(\{3, 4, ..., 10\})$ képet és ρ leszűkítését $\{1, 2, ..., 6\}$-ra.

3. feladat

Az $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozza meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$, illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

Relációk kompozíciója

4. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$ továbbá $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$, $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$ és $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

5. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; S, R \subseteq A \times A$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

(a) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ és $S = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$

(b) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 6), (7, 2)\}$

(c) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4), (5, 3)\}$ és $S = \{(2, 6), (3, 7), (5, 1), (5, 6), (5, 8), (6, 2), (7, 7)\}$

(d) $R = \{(6, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 1), (7, 2)\}$

Kommutatív-e a kompozíció? Határozza meg például az (a) esetben az $R \circ S$ kompozíciót.

6. feladat

Legyen $R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2 + 6\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 1 = y\}$

(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$

(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = y^2\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x - 2} = 3y\}$

(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y \land 2y = x\}$

Nehezebb, illetve szorgalmi feladatok

7. feladat

Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

8. feladat

Tekintsük a következő relációkat:

$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\}$, $\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6x - 1 = 4y + 5\}$,

$\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid 2x + 3y\}$, $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1,5x - 1,5 \leq y\}$

Határozza meg a következő kompozíciókat.

$\rho \circ \varphi$ $\qquad$ $\varphi \circ \lambda$ $\qquad$ φ^3 $\qquad$ $\alpha \circ \rho$ $\qquad$ $\rho \circ \alpha$