

1. feladatsor: Halmazok

Az olyan feladatokban, amelyekben halmazokra vonatkozó azonosságot/állítást kell bizonyítani, a logikai műveletek, illetve a halmazműveletek előadáson tanult tulajdonságait használhatjuk, illetve olyan állításokat, melyeket gyakorlaton bizonyítottunk.

1. feladat

Legyen az alaphalmaz $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, továbbá legyen $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 8\}$, $C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\}$.

(a) Határozza meg a következő halmazokat:

$$A \cap B \qquad B \cup C \qquad A \setminus C \qquad \overline{C}$$

(b) Tekintsük az $X = \{A, B, C\}$ halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat.

$$\cap X \qquad \cup X$$

(c) Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét, ha $Y = \{\{x \mid x \in U \text{ és } x \text{ páros}\}, \{x \mid x \in U \text{ és } x \text{ páratlan}\}\}$.

$$\begin{array}{llll} 4 \in B & A \subseteq B & \{\emptyset\} \subseteq X \cup Y & 3 \in A \cap B \\ \{1, 2\} \subseteq A & A \in X \cup Y & A \subseteq X \cup Y & C \cap \emptyset = \emptyset \\ 2 \subseteq A & \{2\} \subseteq A & 2 \in X \cup Y & \{2\} \in X \cap Y \end{array}$$

2. feladat

Keressünk olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

3. feladat

Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{a, e\}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (B \cap C)$. Igaz-e ez az állítás tetszőleges A, B, C halmazokra?

4. feladat

Tekintsük az $X = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{0, 2, 3, 7\}\}$ halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat:

- (a) $\cap X$
- (b) $X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\}$
- (c) $\cup (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$
- (d) $\cap (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$

5. feladat

Legyen $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$. Mi lesz $\cup \mathcal{A}$ és $\cap \mathcal{A}$?

6. feladat

Határozza meg az A, B, C halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, $C \setminus B = \{2, 4\}$ és $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.

7. feladat

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok, U az alaphalmaz, $A, B, C \subseteq U$. A logikai műveletek előadáson tanult tulajdonságai segítségével (lásd mellékelt összefoglaló) igazoljuk a következő azonosságokat.

(a) $A \cup B = B \cup A$

(g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(h) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(c) $A \cap B = B \cap A$

(i) $A \cup \overline{A} = U$

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(j) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(k) $\overline{\overline{A}} = A$

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8. feladat

Igazolja a következő azonosságokat.

(a) $A \Delta \emptyset = A$

(b) $A \Delta A = \emptyset$

(c) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

(d) $A \Delta (A \Delta B) = B$

9. feladat

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő állításokat.

(a) ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq C$ akkor $A \cup B \subseteq C$

(b) ha $A \subseteq B$ és $A \subseteq C$ akkor $A \subseteq B \cap C$

(c) $A \cup (B \cap A) = A$

10. feladat

Legyen A és B nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

(a) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

(b) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B}$

11. feladat

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.

12. feladat

Legyen az alaphalmaz U továbbá $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

(a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(c) $A \setminus (A \setminus (B \setminus C)) = A \cap B \cap \overline{C}$

13. feladat

Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozza meg az $A \times A$, $A \times B$, $A \times A \times B$, $B \times A$, $(A \times A) \times B$, $A \times (A \times B)$, $A \Delta B$, $A \Delta C$ halmazokat.

14. feladat

Legyenek A, B, C nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőséget:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

15. feladat

Legyenek A, B, C, D nemüres halmazok. Bizonyítsuk be, hogy $A \times B \subseteq C \times D$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq D$.

16. feladat

Bizonyítsa be a következő összefüggést: $\overline{(A \cap B \cup C)} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

17. feladat

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, ahol $P(A)$ jelöli A hatványhalmazát. Igaz-e az állítás unióval?

18. feladat

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra. Állításait bizonyítsa.

- (a) $\overline{A} \cap B = B \setminus A$
- (b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$
- (c) $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
- (d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (e) $(A \cup B) \setminus A = B$
- (f) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

Nehezebb, illetve szorgalmi feladat**19. feladat**

A 8 (c) feladat alapján tetszőleges A, B és C halmazokra: $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$. Így bevezethető a következő jelölés: $A \triangle B \triangle C = A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges A, B, C és D halmazokra: $A \triangle (B \triangle C \triangle D) = (A \triangle B \triangle C) \triangle D$.