Néhány logikai és halmazelméleti fogalom és tétel

Logika

Állítás (A logikai műveletek tulajdonságai).

1. $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$ *(idempotencia)*
2. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ *(asszociativitás)*
3. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ *(kommutativitás)*
4. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(disztributivitás)*
5. $(A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow A$, $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$ *(abszorpció, azaz elnyelési tulajdonság)*
6. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ *(De Morgan szabályok)*
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(a kontrapozíció tétele)*
8. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ *(modus ponens)*
9. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ *(szillogizmus)*
10. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

Halmazok

$\emptyset = \{\}$ jelöli az **üres halmaz**t, vagyis azt a halmazt, amelynek nincs eleme. Az olyan halmazt, amelynek elemei szintén mind halmazok, **halmezrendszer**nek is hívják.

Definíció (Részhalmaz). Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak: $A \subseteq B$, ha A minden eleme B-nek is eleme, azaz

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ha $A \subseteq B$-nek, de $A \neq B$, akkor A **valódi részhalmaza** B-nek: $A \subsetneq B$.

Definíció (**Halmazok uniója**)**.** Az A és B halmazok **uniója:** $A \cup B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B elemeit tartalmazza: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Általában: Legyen $\mathscr{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (**halmazrendszer**). Ekkor $\bigcup \mathscr{A} = \cup\{A : A \in \mathscr{A}\} = \cup_{A \in \mathscr{A}} A$ az a halmaz, mely az $\mathscr{A}$ összes elemének elemét tartalmazza:

$$\cup \mathscr{A} = \{x | \exists A \in \mathscr{A} : x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

Definíció (**Halmazok metszete**)**.** Az A és B halmazok **metszete:** $A \cap B$ az a halmaz, mely pontosan az A és B *közös* elemeit tartalmazza: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Általában: Legyen $\mathscr{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cap \mathscr{A} = \cap\{A : A \in \mathscr{A}\} = \cap_{A \in \mathscr{A}} A$ a következő halmaz:

$$\cap \mathscr{A} = \{x \mid \forall A \in \mathscr{A} : x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

Állítás (**Az unió tulajdonságai**)**.**

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asszociativitás)*
3. $A \cup B = B \cup A$ *(kommutativitás)*
4. $A \cup A = A$ *(idempotencia)*
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Állítás (**A metszet tulajdonságai**)**.**

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás)*
3. $A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás)*
4. $A \cap A = A$ *(idempotencia)*
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Állítás (**Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai**)**.**

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Definíció (**Halmazok különbsége**)**.** Az A és B halmazok **különbsége** az $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ halmaz.

Definíció (**Halmaz komplementere**)**.** Egy rögzített X alaphalmaz és $A \subseteq X$ részhalmaz esetén az A halmaz **komplementere** az $\overline{A} = A' = X \setminus A$ halmaz.

Állítás (**Különbség kifejezése komplementer segítségével**)**.** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Állítás (**Komplementer tulajdonságai**). *Legyen X az alaphalmaz.*

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{\emptyset} = X$;
3. $\overline{X} = \emptyset$;
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
5. $A \cup \overline{A} = X$;
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

A 7. és 8. összefüggések az ún. **De Morgan szabályok**.

Definíció (**Szimmetrikus differencia**). Az A és B halmazok **szimmetrikus differenciája** az $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmaz.

Állítás (**Szimmetrikus differencia kifejezése másképpen**). $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.