FELADATOK A BEVEZETŐ FEJEZETEK A MATEMATIKÁBA TÁRGY ESTI III. FÉLÉVÉHEZ

ÖSSZEÁLLÍTOTTA: LÁNG CSABÁNÉ
ELTE IK Budapest 2007-07-25

Az 1. fejezet feladataihoz hasonlóak megoldva megtalálhatók a *Gráfok, csoportok, gyűrűk és testek: Példák és megoldások* anyagban.
Az 2. fejezet feladataihoz hasonlóak megoldva találhatóak a *Polinomok: Példák és megoldások* anyagban.
Mindkettő letölthető Láng Csabáné honlapjáról:

http: //compalg.inf.elte.hu/∼zslang

valamint az IK Digitális Könyvtárából:

//www.inf.elte.hu/konyv_jegyzet_kep/digitalis_tar/oktatast_tamogato_letoltheto_anyagok

A második témakörben megoldott példák találhatók a következő, nyomtatásban megjelent és a Jegyzetboltban kapható példatárban:

Gonda János: *Gyakorlatok és feladatok a Bevezetés a matematikába c. tárgyhoz Polinomok, véges testek, kongruenciák, kódolás* ELTE TTK, Budapest, 2001

Tartalomjegyzék

1. Gyűrűk, testek

1.1. Gyűrű, test, integritási tartomány, nullosztó

1.1-1. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:

a. egész számok az összeadásra és szorzásra nézve;

b. a páros számok az összeadásra és szorzásra nézve;

c. adott n egész szám többszörösei az összeadásra és szorzásra nézve (az $n = 0$ esetet külön nézzük meg);

d. $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve;

e. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve (Gauss-egészek);

f. az n-edrendű ($n \times n$-es) egész elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve;

g. az n-edrendű valós elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve.

h. $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ a modulo m tekintett maradékosztályok a maradékosztály összeadásra és szorzásra.

1.1-2. Jelöljön $(S; +)$ egy Abel-csoportot. Definiáljuk a $\circ$ műveletet a következő módon: $a \circ b = 0$. 0 az $(S; +)$ egységeleme. Bizonyítsuk be, hogy az $(S; +, \circ)$ struktúra gyűrű. (Ezt nevezzük *zérógyűrűnek*.)

1.1-3. Teljesüljenek az $(R;+,\cdot)$ struktúrában a következő tulajdonságok:
a. $(R;+)$ csoport, **b.** $(R;\cdot)$ egységelemes félcsoport, **c.** a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Bizonyítsuk be, hogy $(R;+,\cdot)$ gyűrű.
1.1-4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(R;+,\cdot)$ egységelemes gyűrű minden elemének van multiplikatív inverze, akkor a gyűrűnek csak egyetlen eleme van.
1.1-5. Testet alkotnak-e a modulo $2m$ maradékosztályok közül a párosak, $\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\ldots,\overline{2m-2}\}$ a maradékosztályok közötti összeadásra és szorzásra, ha

a. $2m = 10$,

b. $2m = 20$.
1.1-6. Bizonyítsuk be, hogy ha $(T,+,\cdot)$ véges, legalább két elemet tartalmazó integritási tartomány, akkor test.
1.1-7. Milyen m értékre ismerünk m elemű gyűrűt, illetve testet?
1.1-8. Határozzuk meg a modulo 12 maradékosztályok gyűrűjében a nullosztókat.
1.1-9. Legyen $(R,+,\cdot)$ egységelemes gyűrű. Jelölje a nullelemet 0, az egységelemet e. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a \in R$ elemre fennáll az $a^n = 0$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re (a ***nilpotens elem***), akkor az $e-a$ elemnek van inverze.
1.1-10. Mutassuk meg, hogy egy gyűrű egységeleme nem lehet két nilpotens elem összege. (Lásd az előző példát.)
1.1-11. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:

a. $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve.

b. A [-1, 1] intervallumon értelmezett valós függvények a függvények összeadására és szorzására nézve. (Az f és g függvények összegét $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, a szorzatát pedig az $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$, $x \in [-1,1]$ hozzárendeléssel definiáljuk.)

c. Az $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$ mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra.
1.1-12. Vizsgáljuk meg, hogy testet alkot-e az $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz az összeadásra és szorzásra nézve.
1.1-13. Végezzük el a kijelölt műveleteket a $\mathbb{Z}_{17}$ maradékosztály testben.

a. $(\overline{5})^{-1}$, **b.** $\overline{9}-\overline{11}$, **c.** $(\overline{15}+\overline{10})(\overline{3}+\overline{5})^{-1}$, **d.** $\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\ldots\cdot\overline{16}$.
1.1-14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $(R;+,\cdot)$ egységelemes gyűrű a elemének van bal oldali multiplikativ inverze, akkor az a elem nem lehet a gyűrű bal oldali nullosztója.
1.1-15. Legyen $D = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x = m\cdot 2^k, m,k \in \mathbb{Z}\}$ a véges diadikus törtek halmaza. Lássuk be, hogy a véges diadikus törtek az összeadásra és szorzásra integritási tartományt alkotnak, de nem alkotnak testet.
1.1-16. a1. Tekintsük a $\mathbb{Z}_{10}$ maradékosztály-gyűrűt. Írjuk fel ebben minden elem (minden maradékosztály) osztóit.

a2. Mik az egységek, és mik a nullosztók?

b. Legyen a a $\mathbb{Z}_m$ maradékosztály-gyűrű egy maradékosztálya. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy mikor osztható minden maradékosztály a-val - vagyis hogy az a maradékosztály mikor egység.

1.2. Karakterisztika

1.2-17. Mutassuk meg, hogy ha egy R gyűrű minden a elemére $a^2 = a$ teljesül, akkor R karakterisztikája 2 és kommutatív. (*Boole-gyűrű.*)
1.2-18. Legyen H halmaz, $R = \{P(H), \circ, \cap\}$, ahol $(A \circ B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, a szimmetrikus differencia.) Lássuk be, hogy R gyűrű, keressük meg a nullelemét, és az egységelemét. Lássuk be, hogy R Boole-gyűrű. Keressünk benne nullosztót.

1.3. Oszthatóság, osztók, egységek, felbonthatatlan, prím

1.3-19. Ha valamely kommutatív gyűrűben $a = a \cdot e$ teljesül, következik-e ebből, hogy e egységelem?
1.3-20. a. Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}_{10}$-ben $\overline{5}$? **b.** Prím-e $\mathbb{Z}_{10}$-ben $\overline{5}$?
1.3-21. Mely számok osztói az 1-nek a véges diadikus számok gyűrűjében? Mik az egységek? Adjunk egyszerű feltételt arra, hogy ebben a gyűrűben egy szám oszt egy másikat.
1.3-22. A véges diadikus számok gyűrűjében hány osztója van egy számnak. Lehet-e egy számnak nála nagyobb osztója is?
1.3-23. A véges diadikus számok gyűrűjében mely elemeknek van végtelen sok lényegesen különböző osztója? (Vagyis olyanok, amelyek nem csak egységszorzóban különböznek egymástól.)
1.3-24. A véges diadikus számok gyűrűjében felbonthatatlan-e a 12?
1.3-25. Melyek a felbonthatatlanok és melyek a prímek a véges diadikus számok gyűrűjében?
1.3-26. Legyen $G = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve (*Gauss-egészek*). Legyen $\varphi(a + bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Bizonyítsuk be ennek a leképezésnek a felhasználásával, hogy a Gauss-egészek körében az egységek $1, -1, i, -i$.

1.4. Euklideszi gyűrű

1.4-27. A (páros számok, $+$, $\cdot$) integritási tartományt képeznek. Euklideszi gyűrű-e?

1.4-28. Legyen $L = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadással és szorzással. (L egészek.)

a. Bizonyítsuk be, hogy az $(L, +, \cdot)$ struktúra egységelemes integritási tartomány.

b. Bizonyítsuk be, hogy az L egészek körében két egység van, ezek 1 és -1.

1.4-29. Lássuk be, hogy ha integritási tartományban létezik prím, akkor létezik egységelem.

1.4-30. Legyen $L = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadással és szorzással.

a. Bizonyítsuk be, hogy az L egészek körében $1+i\sqrt{5}, 1-i\sqrt{5}, 2, 3$ felbonthatatlan elemek, de nem prímelemek.

b. Bizonyítsuk be, hogy az $(L, +, \cdot)$ gyűrű nem euklideszi gyűrű.

1.4-31. Igaz-e hogy ha érvényes az egyértelmű felbontás tétele valamely gyűrűben, akkor az euklideszi gyűrű?

1.4-32. Legyen $H_2 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve, és $\varphi(a + b\sqrt{2}) = \mid (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \mid = \mid a^2 - 2b^2 \mid$. Bizonyítsuk be, hogy a $(H_2, +, \cdot)$ struktúra euklideszi gyűrű.

1.4-33. Mik az egységek az előző példabeli euklideszi gyűrűben.

1.5. Részgyűrű, ideál, faktorgyűrű

1.5-34. Melyek $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ részgyűrűi. Van-e köztük ideál? ($\mathbb{Z}_4$ a modulo 4 maradékosztályok halmaza.)

1.5-35. Legyen R véges gyűrű, I ideál R-ben, és $I \neq R$. Bizonyítsuk be, hogy I minden a nullelemtől különböző eleme nullosztó R-ben.

1.5-36. Határozzuk meg a $(T, +, \cdot)$ test ideáljait. (Lássuk be, hogy testben nincs nem triviális ideál.)

1.5-37. Tekintsük a racionális számok $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gyűrűjét. Bizonyítsuk be, hogy a páros egészek a racionális számok gyűrűjének részgyűrűjét alkotják, de nem ideálját.

1.5-38. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok részgyűrűt képeznek a racionális számok gyűrűjében, de nem ideált.

1.5-39. Jelölje M a valós számtest feletti 2×2-es mátrixok halmazát,
$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, illetve $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

a. Igazoljuk, hogy $(K, +, \cdot)$ bal oldali ideálja $(M, +, \cdot)$-nak de nem jobb oldali ideálja.

b. Igazoljuk, hogy $(L, +, \cdot)$ jobb oldali ideálja $(M, +, \cdot)$-nak, de nem bal oldali ideálja.

1.5-40. a. Lássuk be, hogy a páros számok (P) az egészek részgyűrűjét, sőt ideálját alkotják.

b. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}/P$ maradékosztály gyűrűt.

1.5-41. Legyen $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$, és $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in 2\mathbb{Z} \right\}$

a. Mutassuk meg, hogy I ideál R-ben.

b. Hány elemű az R/I faktorgyűrű?

1.5-42. Jelöljük N-nel az R kommutatív gyűrűben a nullosztók és a 0 által alkotott halmazt.

a. Lehet-e, hogy N nem részgyűrű?

b. Lehet-e, hogy N részgyűrű, de nem ideál?

c. Bizonyítsuk be, hogy ha N ideál, akkor R/N nullosztómentes.

d. Mely m-ekre igaz, hogy a modulo m maradékosztály-gyűrűben N ideál?

1.5-43. Legyen $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}$, Bizonyítsuk be, hogy az $(M;+,\cdot)$ struktúra izomorf az $(\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ gyűrűvel.

1.5-44. Izomorfak-e a $G = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ és $K = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűk?

1.6. Vegyes feladatok

1.6-45. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűben pontosan egy balegységelem van, akkor az szükségképpen egységelem.

1.6-46. Igazoljuk, hogy ha egy gyűrűben az $1 - ab$ elemnek van inverze, akkor az $1 - ba$ elemnek is van.

1.6-47. Írjuk fel a $\mathbb{Z}_{12}$ maradékosztály-gyűrűben minden elem osztóit!

1.6-48. Jelölje M a valós számtest feletti 2×2-es mátrixok halmazát, valamint $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

a. Igazoljuk, hogy $(K,+,\cdot)$ részgyűrűje az $(M,+,\cdot)$ gyűrűnek.

b. Ideálja-e K az M-nek?

1.6-49. Legyen $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$. Bizonyítsuk be, hogy a $(K,+,\cdot)$ struktúra izomorf a komplex számok testével.

2. Polinomok

2.1. Gyűrűk-testek

2.1-1. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e a szokásos műveletekre:

a. az egész számok;

b. a racionális számok;

c. azok a valós számok, amelyeknek van valós 100-dik gyöke;

d. azok a komplex számok, amelyeknek van valós 100-dik gyöke;

e. azok a komplex számok, amelyeknek van komplex 100-dik gyöke;

f. a 2×2-es, valós elemű mátrixok;

g. a valós együtthatós polinomok.

2.1-2. A modulo m maradékosztályok mikor alkotnak testet a szokásos műveletekre?

2.1-3. Melyek igazak az alábbi állítások közül:

a. Bármely testben $ab = ac,\ a \neq 0 \Rightarrow b = c$.

b. Bármely gyűrűben $ab = ac,\ a \neq 0 \Rightarrow b = c$.

c. Ha egy kommutatív, legalább két elemű gyűrűben

$ab = ac,\ a \neq 0 \Rightarrow b = c$, akkor az test.

d. Véges, legalább két elemű kommutatív gyűrűben ha

$ab = ac,\ a \neq 0 \Rightarrow b = c$, akkor az test.

2.1-4. Melyek igazak az alábbi állítások közül:

a. Ha egy testben $d \neq 0$ és $c \cdot d = d$, akkor c egységelem.

b. Ha egy kommutatív gyűrűben $d \neq 0$ és $cd = d$, akkor c egységelem.

2.2. Polinomok maradékos osztása $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}_p$ fölött

2.2-5. Legyen $f = x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3$ és $g = x^2 + 4x - 5$.

Végezzünk maradékos osztást az f és g polinomokkal

a. Q fölött,

b. Z_3 fölött

2.2-6. Hogy kell megválasztani a p, q, m értékeket, hogy az $x^3 + px + q$ polinom osztható legyen az $x^2 + mx - 1$ polinommal $\mathbb{C}$ fölött.

2.2-7. Határozza meg az először megadott polinomnak a másodszorra megadott polinommal való osztásakor kapott maradékát $\mathbb{Q}$ fölött.

a. $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad x^2 - 3x + 1$

b. $x^3 - 3x^2 - x - 1, \quad 3x^2 - 2x + 1$

2.2-8. Hogyan kell megválasztani p, q, m értékét, hogy az $x^4 + px + q$ polinom osztható legyen az $x^2 + mx + 1$ polinommal $\mathbb{Q}$ fölött.

2.3. Legnagyobb közös osztó euklideszi algoritmussal és lineáris kombináció; közös gyök

2.3-9.

a. Keressük meg az 5. feladatban szereplő polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{Q}$ fölött. Van-e közös racionális gyökük?

b. Keressük meg a polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{Z}_3$ fölött.

2.3-10. Van-e az alábbi polinomoknak közös gyökük $\mathbb{C}$ fölött? (Határozza meg a következő polinomok legnagyobb közös osztóját.)

$$(x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad x^3 + x^2 - x - 1)$$

2.3-11. Bizonyítsa be, hogy $f(x)$ és $g(x)$ $\mathbb{Q}$ fölötti polinomok legnagyobb közös osztója 1, és határozzon meg olyan $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat, amelyekre

$$1 = f(x)u(x) + g(x)v(x).$$

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1;$

b. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x + 1$

2.4. Horner-elrendezés

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1\alpha + a_0 =$$
$$= (\ldots(((a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2})\alpha + a_{n-3})\alpha + a_{n-4}\ldots)\alpha + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_1	a_0	$f(\alpha)$
α		$b_{n-1} =$ $= a_n$	$b_{n-2} =$ $= a_n\alpha + a_{n-1}$ $= b_{n-1}\alpha + a_{n-1}$	$b_{n-3} =$ $= b_{n-2}\alpha + a_{n-2}$	$\ldots$ $\ldots$	b_1	$b_0 =$ $= b_1\alpha + a_1$	$b_0\alpha + a_0$

2.4-12. Keressük meg az $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$ polinom helyettesítési értékét a $3, -1, 2, -2$ helyeken.

2.4-13. Határozza meg a következő polinomok osztási maradékát. Oldja meg a feladatot maradékos osztással és Horner-elrendezéssel is.

a. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ osztva $x - 1$-gyel,

b. $2x^5 - 5x^3 - 8$ osztva $x + 3$-mal,

c. $4x^3 + x^2$ osztva $x + 1 + i$-vel,

d. $x^3 - x^2 - x$ osztva $x - 1 + 2i$-vel.

2.4-14. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x + p$ polinom osztható legyen $x - 2$-vel. Oldjuk meg a feladatot maradékos osztással és Horner-elrendezéssel is.

A hányados polinom együtthatói a Horner elrendezés során keletkező számok

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0) : (x-\alpha) =$$
$$a_n x^{n-1} + (a_n\alpha + a_{n-1})x^{n-2} + ((a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2})x^{n-3} + \ldots$$

$$\underline{a_n x^n - a_n x^{n-1}\alpha}$$
$$(a_n\alpha + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots$$
$$\underline{(a_n\alpha + a_{n-1})x^{n-1} - (a_n\alpha + a_{n-1})\alpha x^{n-2}}$$
$$((a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2})x^{n-2}$$

2.5. Többszörös gyök keresése f és f' legnagyobb közös osztójával

2.5-15. Határozza meg az a paramétert úgy, hogy az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak -1 legalább kétszeres gyöke legyen. Oldja meg a feladatot

a. maradékos osztással,

b. Horner-elrendezéssel,

c. a derivált polinom felhasználásával.

2.5-16. Határozza meg az a, b paraméterek értékét úgy, hogy $ax^4 + bx^3 + 1$ osztható legyen $(x-1)^2$-nel.

2.5-17. Határozza meg a következő polinomok és deriváltjaik legnagyobb közös osztóját:

a. $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3) \quad f \in \mathbb{Z}[x]$

b. $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \quad f \in \mathbb{Z}[x]$

2.5-18. Van-e többszörös gyöke az $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x + 2$ polinomnak?

2.5-19. Bizonyítsuk be, hogy egy, a racionális test felett irreducibilis polinomnak a komplex számok körében sem lehet többszörös gyöke.

2.6. Racionális és egész együtthatós polinomok racionális és egész gyökei; polinomok felbontása

2.6-20. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom. Bizonyítandó, hogy ha $f(0)$ és $f(1)$ páratlan, akkor az $f(x)$ polinomnak nincs zérushelye az egész számok körében.

2.6-21. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok.

a. $x^2 - 2 \quad \mathbb{Q}$ fölött, $\mathbb{R}$ fölött,

b. $x^2 - 1$ tetszőleges test fölött,

c. $x^2 + 1 \quad \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ fölött, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_2$ fölött,

d. x^2 és $x^2 + x \quad \mathbb{F}_2$ fölött.

2.6-22. Lássuk be, hogy ha az egész együtthatós f polinomnak gyöke a p/q racionális szám, $(p, q) = 1$, akkor p osztója a konstans tagnak, q osztója a főegyütthatónak.

2.6-23. Lássuk be, hogy ha $\alpha \in \mathbb{Z}$ gyöke az $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak, akkor

$$1 - \alpha \left| \sum_0^n a_i \quad \text{és} \quad 1 + \alpha \right| \sum_0^n (-1)^i a_i$$

2.6-24. Keressük meg az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ polinom racionális gyökeit.

2.6-25. Keressük meg az $f(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$ polinom racionális gyökeit.

2.6-26. Adjuk meg az összes olyan c egész számot, amelyre a $81x^{100} + c \cdot x^{65} + 64 = 0$ egyenletnek van racionális gyöke.

2.6-27. Bizonyítsuk be, hogy ha k és n pozitív egészek, és $\sqrt[k]{n}$ nem egész, akkor $\sqrt[k]{n}$ irracionális.

2.6-28. Schönemann–Eisenstein tétel.

Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik p prím, amelyre

(i) $p \not| a_n$,

(ii) $p | a_i (i = 0, \ldots, n-1)$,

(iii) $p^2 \not| a_0$,

akkor $f(x)$ felbonthatatlan $\mathbb{Z}$ fölött.

Megjegyzés. Ha egy egész együtthatós polinom felbonthatatlan $\mathbb{Z}$ fölött, akkor a Gauss-tétel következményeként $\mathbb{Q}$ fölött is felbonthatatlan.

2.6-29. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ n-edfokú irreducibilis polinom.

2.6-30. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 12x^2 + 10x + 14$ -et bontsuk fel irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ fölött.

2.6-31. $f(x) = 20x^4 + 26x^3 + 65x^2 + 91$ -et bontsuk fel irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ fölött.

2.6-32. Mik az $f(x) = 40x^4 + 45x + 15$ polinom racionális gyökei.

2.6-33. Mik az

$$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{55}{4}x - \frac{15}{2}$$

polinom racionális gyökei.

2.6-34. Mik az $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ polinom racionális gyökei.

2.6-35. Bontsuk fel az $x^4 + 1$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára

a. $\mathbb{C}$ fölött,

b. $\mathbb{R}$ fölött.

2.6-36. Bontsuk fel $\mathbb{R}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az x^6+27 polinomot.

2.6-37. Bontsuk fel $\mathbb{R}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az x^4+4 polinomot.

2.7. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

Vieta formulák

Legyen R egységelemes integritási tartomány, és tegyük fel, hogy az

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in R[x]$

n-edfokú polinom – multiplicitással együtt vett – n gyöke mind R-ben van. Legyenek ezek a gyökök $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$. Ekkor

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = \\
&= a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n) = \\
&= a_n\big(x^n - (c_1+c_2+\ldots+c_n)x^{n-1} + \\
&\quad +(c_1\cdot c_2 + c_1\cdot c_3 + \ldots + c_{n-1}\cdot c_n)x^{n-2} + \\
&\vdots \\
&\quad +(-1)^n(c_1\cdot c_2\cdots c_n)\big)
\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(c_1+c_2+\ldots+c_n) \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= (c_1\cdot c_2 + c_1\cdot c_3 + \ldots + c_{n-1}\cdot c_n) \\
&\vdots \\
\frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n(c_1\cdot c_2\cdots c_n)
\end{aligned}$$

2.7-38. Határozza meg a d paraméter értékét, ha a $2x^3 - x^2 - 7x + d = 0$ egyenlet két gyökének összege 1.

2.7-39. Számtani sorozat egymás utáni három eleme-e a $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenlet három gyöke?

2.7-40. Számítsa ki az $x^3 + 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszegét.

2.7-41. Mi az $x^5 - 5x^3 + 5x + 2$ polinom gyökeinek négyzetösszege?