FELADATOK A
BEVEZETŐ FEJEZETEK A MATEMATIKÁBA
TÁRGY I. FÉLÉVÉHEZ

ÖSSZEÁLLÍTOTTA LÁNG CSABÁNÉ

ELTE IK Budapest 2007-07-25

A **Halmazok** és a **Relációk** témakörben megoldott, letölthető példák találhatók Bruder Györgyi honlapján:

http: //compalg.inf.elte.hu/∼zslang/Bruder

A **Kombinatorika** fejezet példái megoldva megtalálhatók a következő példatárban:

Láng Csabáné: Kombinatorika, Példák és megoldások

Ez a példatár letölthető Láng Csabáné honlapjáról:

http: //compalg.inf.elte.hu/∼zslang

A **Komplex számok** fejezet példái megoldással együtt megtalálhatóak a következő példatárban (kapható a Jegyzetboltban):

Láng Csabáné: Példák és feladatok I. Komplex számok

A példatár letölthető Láng Csabáné honlapjáról is:

http: //compalg.inf.elte.hu/∼zslang

A **Számelmélet** fejezet példái megoldással együtt megtalálhatóak a következő példatárban (kapható a Jegyzetboltban):

Láng Csabáné: Számelmélet, Példák és feladatok

Tartalomjegyzék

1. Halmazok **4**

2. Relációk, függvények **7**

3. Komplex számok **10**
- 3.1. Algebrai alak 10
- 3.2. Trigonometrikus alak, Moivre-azonosság 11
- 3.3. Négyzetgyökvonás algebrai alakkal, másodfokú komplex együtthatós egyenletek 13
- 3.4. n-edik gyökvonás trigonometrikus alakkal, egységgyökök 13
- 3.5. Komplex számok geometriai megfeleltetése 14
- 3.6. Szögfüggvények és a komplex számok 15
- 3.7. Komplex együtthatós egyenletek 16
- 3.8. Gyökök és együtthatók 17
- 3.9. Egyéb példák 18
- 3.10. Binomiális együtthatók és komplex számok 19

4. Kombinatorika **21**
- 4.1. Alapvető fogalmak 21
  - 4.1.1. Összefoglaló táblázat 21
- 4.2. Skatulyaelv 21
- 4.3. Permutáció, variáció, kombináció alkalmazása 22
- 4.4. Relációk, elrendezések száma 24
- 4.5. Bolyongás, számok felbontása, leképezések száma 24
- 4.6. Logikai szita 25
- 4.7. Kártya 25

4.8. Binomiális tétel és alkalmazása 26

5. Számelmélet 27
5.1. Oszthatóság 27
5.2. Osztók száma, a τ függvény 28
5.3. Prímszámok 28
5.4. Euklideszi algoritmus 28
5.5. Kétváltozós lineáris diofantikus egyenletek 29
5.6. Euler-féle φ függvény 29
5.7. Kongruenciák, maradékrendszerek, Euler–Fermat-tétel 30
5.7.1. Kongruenciák, maradékrendszerek 30
5.7.2. Euler–Fermat-tétel 30
5.8. Lineáris kongruenciák 31
5.9. Lineáris kongruencia-rendszerek, a kínai maradéktétel 32
5.10. Lánctörtek, diofantikus approximációelmélet 33

1. Halmazok

1.0-1. Milyen összefüggés van az alábbi három halmaz között?
N = {természetes számok}
N' = {a természetes számok halmaza}
N" = {N}
1.0-2. Az A halmazt definiáljuk a következő módon:
A={1978-ben Budapesten született ikerpárok}
Kati és Jancsi ikrek, akik Budapesten születtek 1978-ban.
Igaz-e, hogy Jancsi $\in A$?
1.0-3. Az előbbi feladatban definiált A halmazra az alábbi összefüggések közül melyik igaz?
a. {Kati, Jancsi}$\in A$
b. {Kati, Jancsi} $\subseteq A$
c. {(Kati, Jancsi)} $\subseteq A$
1.0-4. Igaz-e, hogy $\emptyset = \{\emptyset\}$?
1.0-5. Keressünk olyan A, B, C halmazokat, melyekre

$$A \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap C = \emptyset, \qquad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

1.0-6. Legyen A={$p(x)$ polinom gyökei}, B={$q(x)$ polinom gyökei} és $r(x) = p(x)q(x)$. Hogyan fejezhetjük ki $r(x)$ gyökeit A és B-vel?
1.0-7. Melyik az az $s(x)$ polinom, melynek gyökei D halmazára $D = A \cap B$, ahol A és B az előző feladatban szereplő halmazok?
1.0-8. Bizonyítsuk be, hogy

$$A \cap B \subseteq C \iff A \subseteq \overline{B} \cup C$$

1.0-9. Igazoljuk, hogy
$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

1.0-10. Igazoljuk, hogy
$$A \triangle (A \triangle B) = B$$

1.0-11. Igazoljuk, hogy
$$A \triangle B = C \iff B \triangle C = A \iff C \triangle A = B$$

1.0-12. Legyen A és B tetszőleges halmaz. Lássuk be, hogy az

a. $A \triangle X = B$ egyenlet egyértelműen megoldható;

b. $A \cup X = B$ egyenlet nem biztos, hogy megoldható, ha pedig megoldható, akkor nem biztos, hogy egyértelmű a megoldása.

1.0-13. Fejezzük ki a $\triangle$ és $\cap$ segítségével a következőket:
$$A \cup B \qquad \text{és} \qquad A \setminus B$$

1.0-14. Fejezzük ki a $\triangle$ és $\cup$ segítségével a következőket:
$$A \cap B \qquad \text{és} \qquad A \setminus B$$

1.0-15. Lássuk be, hogy $A \setminus B$-t általában nem lehet kifejezni $\cap$ és $\cup$ segítségével.

1.0-16. Lássuk be, hogy $A \cup B$-t általában nem lehet kifejezni $\cap$ és $\setminus$ segítségével.

1.0-17. Az alábbi állítások közül melyik teljesül minden A, B, C halmaz esetén?

a. Ha $A \in B$ és $B \in C$, akkor $A \in C$.

b. Ha $A \subseteq B$ és $B \in C$, akkor $A \in C$.

c. Ha $A \cap B \subseteq \overline{C}$ és $A \cup C \subseteq B$, akkor $A \cap C = \emptyset$.

d. Ha $A \neq B$ és $B \neq C$, akkor $A \neq C$.

e. Ha $A \subseteq \overline{B \cup C}$ és $B \subseteq \overline{A \cup C}$ akkor $B = \emptyset$.

1.0-18. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$$(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$$

1.0-19. Igazoljuk az alábbi összefüggést:
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

1.0-20. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.0-21. Lássuk be, hogy $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1.0-22. Lássuk be az alábbi összefüggéseket:

a. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
b. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C)$

Legyen H az alaphalmaz. Tetszőleges $E \subseteq H$ **karakterisztikus függvénye** az alábbi:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in E \\ 0, & \text{ha } x \in H \setminus E \end{cases}$$

1.0-23. Legyen $A,\ B \subseteq H$, $f,\ g$ pedig sorban a karakterisztikus függvényeik. Mi lesz az alábbi részhalmazok karakterisztikus függvénye?

$$\overline{A}, \qquad A \cap B, \qquad A \cup B.$$

1.0-24. Legyen E tetszőleges halmaz, és $|E| = n$. Lássuk be a karakterisztikus függvény segítségével, hogy E részhalmazainak a száma 2^n.
1.0-25. Hány pozitív egész szám nem osztható egynél nagyobb négyzetszámmal, sem 10-nél nagyobb prímszámmal?
1.0-26. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megjegyzés. Ez a két *de Morgan azonosság* egyike.
1.0-27. Fejezzük ki a $\setminus$ és $\triangle$ segítségével a következőket:

$$A \cup B \quad \text{és} \quad A \cap B$$

1.0-28. Milyen összefüggés van az alábbi halmazok között?

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \setminus D) \qquad \text{és} \qquad B \cap C \cap D$$

1.0-29. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést:

$$\overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \overline{A}} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

1.0-30. Adjunk meg tetszőleges n pozitív egész számhoz olyan n elemű A_n halmazt, hogy $x, y \in A_n$ esetén az alábbiak közül pontosan az egyik teljesüljön:

$$x \in y, \quad y \in x, \quad x = y$$

2. Relációk, függvények

2.0-1.
Keressünk olyan relációt, amely

a. reflexív, de nem tranzitív.
b. antiszimmetrikus és reflexív.
c. antiszimmetrikus és nem tranzitív.
d. nem reflexív, nem tranzitív.
e. reflexív, nem tranzitív, szimmetrikus.
f. nem tranzitív, de trichotóm.
g. csupa nem (nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus és nem trichotóm).

2.0-2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en definiáljunk egy R relációt a következő módon:
$(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén $(m_1, n_1)R(m_2, n_2),$ ha $m_1 \leq m_2$ és $n_1 \leq n_2$
Mutassuk meg, hogy R részben rendezés.

2.0-3. Mutassuk meg, hogy az előbbi példában az R relációval az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ részben rendezett halmaz minden nem üres részhalmazának van minimális eleme. Hogyan kereshetjük meg?

2.0-4. Az $\{1, 2, 3\}$ halmazon keressünk két olyan relációt, melyek szimmetrikusak, de a szorzatuk nem szimmetrikus.

2.0-5. Mutassuk meg, hogy ha ϱ és σ szimmetrikus relációk S-en, akkor a következő állítások ekvivalensek:
a. $\varrho \circ \sigma$ szimmetrikus **b.** $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$

2.0-6. Legyen az $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció olyan, hogy nRm $(n, m \in \mathbb{N})$ igaz, ha n és m közös prímosztóinak a száma páros vagy nulla. Vizsgáljuk meg R tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexiv, tranzitiv, szimmetrikus, antiszimmetrikus, trichotóm).

2.0-7. Legyen $R \subseteq A \times A$. Vizsgáljuk $R^{-1} \circ R$ (relációszorzat jelöléssel), illetve $R \circ R^{-1}$ (függvényszorzat jelöléssel) tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexiv, szimmetrikus, tranzitiv).

2.0-8. Legyen R binér reláció,

$$\delta_R = \{x| \text{ van } y, \text{ amire } (x,y) \in R\};$$

$$\sigma_R = \{y| \text{ van } x, \text{ amire } (x,y) \in R\}.$$

Adjuk meg a $\delta_R, \sigma_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$ halmazokat, ha

a. $R = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{N}$ és x osztója y-nak$\}$;

b. $R = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{R}$ és $2x \geq 3y\}$;

2.0-9. Legyen $A = \{1978$ napjai$\}$, $B = \{$ az 1978-ban született gyermekek$\}$. Definiáljuk az alábbi relációkat:

$R_1 \subseteq A \times B$, aR_1b ha b gyerek az a napon született $(a \in A, b \in B)$

$R_2 \subseteq B \times A$, bR_2a ha b gyerek az a napon született $(a \in A, b \in B)$

Függvény-e R_1 illetve R_2 reláció?

2.0-10. Legyenek $f : X \to Y$, $\quad g : Y \to Z$ leképezések. Igazoljuk, hogy

a. Ha f, g injektív, akkor $f \circ g$ injektív;

b. Ha f, g szürjektív, akkor $f \circ g$ szürjetív;

c. Ha f, g bijektív, akkor $f \circ g$ bijektív.

2.0-11. Legyen $A = \{$a nem negatív egészek$\}$, $B = \{$páros számok$\}$.

Konstruáljunk bijektív leképezést az A és B halmazok között.

2.0-12. Konstruáljunk bijektív leképezést két tetszőleges síkbeli szakasz között.

2.0-13. Hány szürjekciója létezik egy háromelemű halmaznak egy kételemű halmazra?

2.0-14. Hány injekciója létezik egy háromelemű halmaznak egy kételemű halmazra?

2.0-15. Legyenek $f : X \to Y$, $\;g : Y \to Z$ leképezések. Lássuk be, hogy

a. ha $f \circ g$ injektív akkor f injektív.

b. ha $f \circ g$ szürjektív akkor g szürjektív.

2.0-16. Legyenek $f : A \to B$ bijektív, és $g : B \to C$ tetszőleges leképezések. Lássuk be, hogy

a. $f \circ g$ injektív $\Longleftrightarrow$ g injektív;

b. $f \circ g$ szürjektív $\Longleftrightarrow$ g szürjektív.

2.0-17. Definiáljunk $\mathbb{Z}$-n két relációt az alábbi módon, és vizsgáljuk R_1 és R_2 tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexiv, tranzitiv, szimmetrikus, antiszimmetrikus, trichotóm).

a. xR_1y, ha $x^2 + y^2$ osztható 2-vel $(x, y \in \mathbb{Z})$;

b. xR_2y, ha $y^2 - x^2$ osztható 2-vel $(x, y \in \mathbb{Z})$.

2.0-18. Függvény-e a következő reláció? $R \subseteq A \times A$, ahol $A = \{$a síkbeli egyenesek$\}$,

aRb $(a, b \in A)$, ha a és b egyenesek által bezárt kisebb szög $60°$.

Vizsgáljuk a fenti reláció tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexiv, tranzitiv, szimmetrikus).

2.0-19. Legyen

$A = \{$olyan egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlő egy rögzített $m > 0$ számmal$\}$,

$B = \{y|y > 0, y \text{ valós } \}$. Definiáljuk az $R \subseteq A \times B$ relációt a következőképpen:
$aRb, \quad a \in A, b \in B$, ha az a háromszög területe b.

Mutassuk meg, hogy R függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: szürjektív, injektív, bijektív).

3. Komplex számok

3.1. Algebrai alak

3.1-1. Fejezzük ki algebrai alakban a következő számokat:

a. $(3+i)(2+3i)$ **b.** $(1-2i)(5+i)$ **c.** $(2-5i)^2$ **d.** $(1-i)^3$

3.1-2. Írjuk a lehető legegyszerűbb alakban a következő kifejezéseket:

a. i^3 **b.** i^5 **c.** i^8 **d.** $\dfrac{1}{i^2}$ **e.** $\dfrac{1}{i}$ **f.** $\dfrac{1}{i^3}$

3.1-3. Számítsuk ki i^n értékét, ha n egész szám.

3.1-4. Adjuk meg a következő komplex számok konjugáltját:

a. $3+5i$ **b.** $4-7i$ **c.** $3i$ **d.** -4 **e.** $-1+i$

3.1-5. A következő számokat fejezzük ki algebrai alakban:

a. $\dfrac{3+4i}{1-2i}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ **c.** $\dfrac{1}{(1+i)^2}$ **d.** $\dfrac{1}{(2-i)(1+2i)}$

3.1-6. Fejezzük ki a következő számokat algebrai alakban:

a. $\dfrac{1}{2+3i}+\dfrac{1}{2-3i}$ **b.** $\dfrac{1}{3+i}-\dfrac{1}{1+7i}$

3.1-7. Keressük meg a következő komplex szám valós és képzetes részét.

$$\frac{1}{(1-2i)^2}$$

3.1-8. Adjuk meg az a és b valós számok értékét, ha:

a. $(a+bi)(2-i) = a+3i$ **b.** $(a+i)(1+bi) = 3b+ai$

3.1-9. Legyen

$$\frac{5}{x+yi} + \frac{2}{1+3i} = 1,$$

ahol x és y valós számok. Adjuk meg x és y értékét.

3.1-10. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét:

$$(1+2i)^6$$

3.2. Trigonometrikus alak, Moivre-azonosság

Az 1-3. feladatokban szereplő komplex számoknak adjuk meg az abszolút értékét és a fő argumentumát. A fő argumentumot radiánban, π többszöröseként fejezzük ki. (φ fő *argumentum*, ha $0 \leq \varphi < 2\pi$). Adjuk meg a számokat trigonometrikus alakban is.

3.2-1.

a. $\sqrt{3}+i$ **b.** $1-i$ **c.** $4i$ **d.** -3

3.2-2.

a. $\dfrac{10}{\sqrt{3}-i}$ **b.** $\dfrac{2+3i}{5+i}$

3.2-3.

a. $\cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ **b.** $-2(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

3.2-4. Az alábbi feladatban szereplő komplex számoknak adjuk meg az abszolút értékét (modulusát) és a fő argumentumát. A fő argumentumot radiánban, 3 tizedesjegy pontossággal fejezzük ki. Adjuk meg a számokat trigonometrikus alakban is.

a. $3-4i$ **b.** $-2+i$ **c.** $-1-3i$ **d.** $5-3i$

3.2-5. Hozzuk trigonometrikus alakra a következő komplex számokat:

$$\textbf{a.}\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \textbf{b.}\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \textbf{c.}\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \textbf{d.}\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3.2-6. Adjuk meg trigonometrikus alakban a következő komplex számokat:

$$\textbf{a.}\ \cos\varphi - i\sin\varphi \qquad \textbf{b.}\ -\cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \textbf{c.}\ -\cos\varphi - i\sin\varphi$$

3.2-7. Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket.

$$\textbf{a.}\ (\cos\frac{\pi}{4}+i\ \sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{3\pi}{4}+i\ \sin\frac{3\pi}{4}) \qquad \textbf{b.}\ (\cos\frac{5\pi}{12}+i\ \sin\frac{5\pi}{12})^2 \qquad \textbf{c.}\ \frac{(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3})}{(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})}$$

3.2-8. Végezzük el a kijelölt műveleteket trigonometrikus alak felhasználásával.

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

3.2-9. Legyen $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$, $r > 0$, $0 < \theta < \pi/2$. Adjuk meg az alábbi számokat trigonometrikus alakban, r és θ segítségével kifejezve.

$$\textbf{a.}\ -z \qquad \textbf{b.}\ iz \qquad \textbf{c.}\ z^2 \qquad \textbf{d.}\ \frac{z}{\bar{z}}$$

3.2-10. Mivel egyenlő az alábbi kifejezés, ha $n \in \mathbb{N}$?

$$(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

3.2-11. Számítsuk ki az értékét trigonometrikus alak felhasználásával:

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$$

3.2-12. Számítsuk ki a z értékét trigonometrikus alak felhasználásával:

$$z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$$

3.3. Négyzetgyökvonás algebrai alakkal, másodfokú komplex együtthatós egyenletek

3.3-1. Adjuk meg a $-7-24i$ komplex szám négyzetgyökeit algebrai alakban.
3.3-2. Vonjunk négyzetgyököt az alábbi számokból:

a. $3-4i$ **b.** $2i$ **c.** $8+6i$

3.3-3. Oldjuk meg a következő másodfokú egyenletet. A gyököket algebrai alakban adjuk meg.

$$z^2+2z+5=0$$

3.3-4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$$

3.3-5. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$$

3.3-6. Bontsuk elsőfokú tényezők szorzatára a következő kifejezéseket:

a. $x^2+25,$ **b.** $9x^2+4,$ **c.** x^2+2x+5

3.4. n-edik gyökvonás trigonometrikus alakkal, egységgyökök

3.4-1. Számoljuk ki a $z=-16\cdot\sqrt{3}+16i$ szám ötödik gyökeit.
3.4-2. Vonjunk harmadik gyököt 1-ből.
3.4-3. Vonjunk harmadik gyököt a következő számból trigonometrikus alak felhasználásával.

$$2+2i$$

A gyököket adjuk meg algabrai alakban is.
3.4-4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet.

$$x^4-(7+3i)(5-2i)^{-1}=0$$

3.4-5. Vonjunk harmadik gyököt i-ből.
3.4-6. Vonjunk hatodik gyököt a következő számból:

$$\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$$

3.4-7. Vonjunk negyedik gyököt a következő számból a trigonometrikus alak felhasználásával:

$$\frac{-4}{(2+i)^3}$$

3.4-8. Adjuk össze a harmadik egységgyököket.
3.4-9. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Lássuk be, hogy tetszőleges z komplex szám n-edik gyökeinek összege 0.
3.4-10. Jelöljön ε n -edik egységgyököt. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:
a. $1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{n-1}$
b. $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+...+n\varepsilon^{n-1}$
3.4-11. Vonjunk hatodik gyököt 1-ből. Keressük meg a primitív hatodik egységgyököket.
3.4-12. Legyen

$$\varepsilon_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \quad 0 \le k \le n.$$

Lássuk be, hogy ε_k pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha n-nél alacsonyabb természetes kitevőjű hatványa nem 1.
3.4-13. Legyen ε_k n-edik komplex egységgyök,

$$\varepsilon_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \quad 0 \le k \le n.$$

Lássuk be, hogy ε_k pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha $(k,n)=1$.

3.5. Komplex számok geometriai megfeleltetése

3.5-1. Bizonyítsuk be a komplex számok segítségével, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.
3.5-2. Ábrázoljuk a $z=2+i$ komplex számot a Gauss-számsíkon vektorral. Adjuk meg algebrai alakban és ábrázoljuk ugyanezen az ábrán a

$$-z, \qquad \overline{z}, \qquad -\overline{z}, \qquad iz \qquad \text{és} \qquad -iz$$

számokat is. Figyeljük meg, hogy az egyes vektorok milyen kapcsolatban vannak egymással.
3.5-3. Mi a geometriai jelentése a következőknek:

a. $|z_1 - z_2|$ **b.** i-vel való szorzás

c. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ -vel való szorzás **d.** $\cos\frac{2\pi}{n}+i\ \sin\frac{2\pi}{n}$ -nel való szorzás

3.5-4. A Gauss számsíkon jelölje az origót O, egy négyzet középpontja W, csúcsai pedig az óramutató járásával ellenkező irányban O, R, S, T. A pontok által reprezentált komplex számok o, w, r, s, t. Adjuk meg w és i segítségével kifejezve az r, s, t számokat.
3.5-5. A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a $3+2i$, a négyzet egyik csúcsa az $5+7i$ pontban van. Adjuk meg a többi három csúcsot reprezentáló komplex számokat.
3.5-6. Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyeknek megfelelő komplex számokra

a. $|z| = 2Re(z)$; **b.** $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| \geq 1$;

c. $z = \frac{1}{\bar{z}}$; **d.** $z = -\frac{1}{\bar{z}}$; **e.** $|z| = iz$.

3.5-7. A $z = x+yi$ komplex számnak a Gauss számsíkon feleltessük meg a Z pontot. Tudjuk, hogy a

$$\frac{z-2i}{z+4}$$

komplex szám valós része zérus. Bizonyítsuk be, hogy Z mértani helye egy körön van rajta. Keressük meg a kör középpontját, és mutassuk meg, hogy a sugara $\sqrt{5}$.
3.5-8. Jelöljük A, B, C, D-vel a Gauss-számsík azon pontjait, amelyek a következő komplex számoknak felelnek meg.

$$z_A = 8-i, \qquad z_B = 3+11i, \qquad z_C = -9+6i, \qquad z_D = -4-6i.$$

Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ négyzet.
3.5-9. Adjuk meg $|z+4|$ legkisebb értékét, ha

a. $\mathrm{Re}(z) = 5$ **a.** $\mathrm{Im}(z) = 3$ **c.** $|z| = 1$ **d.** $\arg(z) = \pi/4$

3.5-10. Tegyük fel, hogy z értéke a $|z-7| = 3$ feltételnek eleget téve változik. Keressük meg $|z-i|$ legkisebb és legnagyobb értékét.
3.5-11. Tegyük fel, hogy z és w a következő feltételeknek eleget tevő változók:

$$|w-12| = 7 \qquad \text{és} \qquad z-5i = 4.$$

Keressük meg $|w-z|$ legnagyobb és legkisebb értékét.

3.6. Szögfüggvények és a komplex számok

3.6-1. Adjuk meg $\cos(3\Theta)$-t $\cos\Theta$-val, $\sin(3\Theta)$-t $\sin\Theta$-val és $\tan(3\Theta)$-t $\tan\Theta$-val kifejezve.

3.6-2.

a. A $\cos(5\Theta) + i\sin(5\Theta) = (\cos\Theta + i\sin\Theta)^5$ ismert összefüggés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\cos(5\Theta) = 16\cos^5\Theta - 20\cos^3\Theta + 5\cos\Theta.$$

b. Ebből számológép felhasználása nélkül bizonyítsuk be, hogy

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

és keressünk hasonló kifejezést $\cos 54^\circ$ számára.

3.6-3. Legyen $z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 2i$. Számítsuk ki mindkét szám abszolút értékét és fő argumentumát. A Gauss-számsík segítségével mutassuk meg, hogy

$$\arg(z_1 + z_2) = \frac{5\pi}{12}.$$

Ebből kiindulva lássuk be, hogy

$$\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

3.6-4. Mutassuk meg, hogy

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

3.6-5. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x\sin x}{2\sin x}$$

3.7. Komplex együtthatós egyenletek

3.7-1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$|z| - z = 1 + 2i$$

3.7-2. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet.

$$z^2 - \overline{z} = 0$$

3.7-3. Vizsgáljuk meg, milyen z komplex számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\overline{z} = z^3$$

3.7-4. Igazoljuk, hogy ha

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\Theta,$$

akkor

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos(m\Theta), \quad (m \in \mathbb{N}).$$

3.7-5. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varepsilon \neq 1$ harmadik egységgyök, akkor

$$(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

3.7-6. Legyen

$$z_1 = 2^{3/4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = 2(\cos 45^\circ) - i\sin 45^\circ$$

és

$$z_3 = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right).$$

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg trigonometrikus alakban:

$$z_1^6 - \overline{z_2}^5 - z_3 z^3 = 0$$

3.7-7. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg trigonometrikus alakban.

$$(\cos 225^\circ - i\sin 225^\circ)z^5 + 32i - 0,5\left(\frac{4}{i-1}\right)^4 \overline{(i-1)} = 0.$$

3.8. Gyökök és együtthatók

3.8-1. Keressük meg a $z^3 + z + 10 = 0$ egyenlet valós gyökét, ha tudjuk, hogy az egyik gyök $z_1 = 1 - 2i$.
3.8-2. Mutassuk meg, hogy a $z^4 + z^3 + z - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke $z_1 = i$. Adjuk meg a többi három gyököt.
3.8-3. Mutassuk meg, hogy a $z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0$ egyenlet egyik gyöke

$z_1 = -1 + i$. Adjuk meg a többi három gyököt.
3.8-4. Tudjuk, hogy a $z^2 + (1-i)z - 4 + 7i = 0$ egyenlet egyik gyöke $z_1 = 2 - i$. Keressük meg a másik gyököt.
3.8-5. Tegyük fel hogy a $z^3 - 2z + k = 0$ egyenlet egyik gyöke $z_1 = 1 + i$. Adjuk meg a másik két gyököt és a k valós konstans értékét.
3.8-6. Tudjuk, hogy a $z^3 + pz^2 + qz + 13 = 0$ egyenlet egyik gyöke $z_1 = 2 - 3i$. Adjuk meg a többi gyököt, valamint a p és q valós konstansok értékét.
3.8-7. Keressük meg az a és b valós számok értékét, ha $z^3 - 3z^2 + az + b$ osztható $z - i$-vel.

3.9. Egyéb példák

3.9-1. Bizonyítsuk be, hogy ha két természetes szám mindegyike előállítható két négyzetszám összegeként, akkor a szorzatuk is előállítható ilyen alakban. Igaz-e az állítás megfordítása?
3.9-2. Bizonyítsuk be a következő állítást: Legyen $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
A $z = 0$ szám egyetlen n-edik gyöke 0.
Ha $z \neq 0$ és $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor n különböző n-edik gyöke van, melyek

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\ \sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right), \quad 0 \le k \le n-1.$$

3.9-3. Bizonyítsuk be a következő állítást: Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ és $w_1^n = z$. Ekkor z többi n-edik gyöke $w_1\varepsilon_k$ $(1 \le k \le n-1)$, ahol ε_k n-edik egységgyök.
3.9-4. Szerkesszük meg két adott komplex szám szorzatának megfelelő vektort a Gauss-számsíkon.
3.9-5. Szerkesszük meg valamely $z \neq 0$ komplex szám reciprokának megfelelő vektort a Gauss-számsíkon.
3.9-6. Bizonyítsuk be, hogy szabályos háromszög síkjában fekvő tetszőleges, a csúcsoktól különböző P pontot a csúcsokkal összekötő szakaszokból háromszög szerkeszthető oly módon, hogy ezek a szakaszok a háromszög oldalai lesznek.
3.9-7.
a. Az 1-től különböző harmadik egységgyököknek megfelelő pontokat kössük össze az 1-nek megfelelő ponttal, és számítsuk ki az így keletkező szakaszok hosszának a szorzatát.
b. Végezzük el ugyanezt a negyedik egységgyökökkel.
3.9-8. Írjunk az egység sugarú körbe egy szabályos n szöget. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges csúcsot a többi csúccsal összekötő szakaszok hosszának a szorzata n-nel egyenlő.

3.10. Binomiális együtthatók és komplex számok

Az alábbi példákban n pozitív egész számot, k, m nem negatív egész számokat jelölnek.

3.10-1. Adjuk meg a következő kifejezések értékét zárt alakban.

a.
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \binom{n}{8} - \ldots + (-1)^k \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb páros egész szám, melyre $k \leq n$,

b.
$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \binom{n}{9} - \ldots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb páratlan egész szám, melyre $k \leq n$.

3.10-2. Adjuk meg a következő kifejezések értékét zárt alakban.

a.
$$A = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots + \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb 4-gyel osztható egész szám, melyre $k \leq n$,

b.
$$B = \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots + \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb $4m+1$ alakú egész szám, melyre $k \leq n$.

c.
$$C = \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \ldots + \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb $4m+2$ alakú egész szám, melyre $k \leq n$,

d.
$$D = \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{9} + \binom{n}{11} + \ldots + \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb $4m+3$ alakú egész szám, melyre $k \leq n$.

3.10-3.

a. Legyen
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$
Lássuk be, hogy $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}$ értéke 3, ha $3|k$, illetve 0, ha $3 \not| k$.

b. Adjuk meg a következő kifejezés értékét zárt alakban:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots + \binom{n}{k},$$
ahol k a legnagyobb 3-mal osztható egész szám, melyre $k \leq n$.

3.10-4.

a. Legyen
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$$

Lássuk be, hogy $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\ldots+\varepsilon^{(m-1)k}$ értéke m, ha $m \mid k$, illetve 0, ha $m \nmid k$.

b. Legyen

$$T=\binom{n}{0}+\binom{n}{m}+\binom{n}{2m}+\ldots+\binom{n}{k},$$

ahol k a legnagyobb m-mel osztható egész szám, melyre $k \le n$. Lássuk be, hogy

$$(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+\ldots+(1+\varepsilon^{m-1})^n=mT,$$

és ennek segítségével keressünk zárt formulát T számára.

3.10-5. Legyen

$$a,b,\varphi\in\mathbb{R} \quad \text{és} \quad a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \quad \text{ahol} \quad r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Igazoljuk, hogy

a.

$$A=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4+\ldots+\binom{n}{4k}a^{n-4k}b^{4k}+\ldots=$$
$$=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{4}+\frac{1}{2}r^n\cos n\varphi$$

b.

$$B=\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{5}a^{n-5}b^5+\ldots+\binom{n}{4k+1}a^{n-4k-1}b^{4k+1}+\ldots=$$
$$=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{4}+\frac{1}{2}r^n\sin\ n\varphi$$

c.

$$C=\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{6}a^{n-6}b^6+\ldots+\binom{n}{4k+2}a^{n-4k-2}b^{4k+2}+\ldots=$$
$$=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{4}-\frac{1}{2}r^n\cos\ n\varphi$$

d.

$$D=\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\binom{n}{7}a^{n-7}b^7+\ldots+\binom{n}{4k+3}a^{n-4k-3}b^{4k+3}+\ldots=$$
$$=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{4}+\frac{1}{2}r^n\sin\ n\varphi$$

4. Kombinatorika

4.1. Alapvető fogalmak

4.1.1. Összefoglaló táblázat

ismétlés nélküli	permutáció	$P_n = n!$
	variáció	$V_n^k = 0,$ ha $n < k$ $V_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1),$ ha $n \geq k$
	kombináció	$C_n^k = 0,$ ha $n < k$ $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$ ha $n \geq k$
ismétléses	variáció	$V_n^{k,i} = n^k.$
	kombináció	$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k$
	permutáció	$P_n^{i_1,i_2,\ldots,i_r} = \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_r!}$

4.2. Skatulyaelv

4.2-1. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számhoz található olyan k pozitív egész szám, amelyre az $n \cdot k$ szorzat a tízes számrendszerben felírva csupa egyesből és nullából áll.

4.2-2. Mutassuk meg, hogy a $\pi, 2\pi, \ldots, 100\pi$ számok között van legalább egy olyan, amelyik valamely egész számtól $\frac{1}{100}$ -nál kevésbé különbözik.

4.3. Permutáció, variáció, kombináció alkalmazása

4.3-3. A 90 számos lottószelvényen a 90 számból 5-öt kell megjelölni, és 5 számot húznak. A találatok száma a kihúzott, illetve a bejelölt számok halmazában az azonos elemek mennyisége.

Ha az összes lehetséges módon kitöltjük a 90 számos lottószelvényt, hány lesz közöttük

a. pontosan 5 találatos,
b. pontosan 4 találatos,
c. pontosan 3 találatos,
d. pontosan 2 találatos,
e. pontosan 1 találatos,
f. olyan, amelyen egyetlen találat sincs?

4.3-4.
a. Hány kilencjegyű szám képezhető az 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5 számjegyekből?
b. Hány kezdődik ezek közül 125-tel?

4.3-5. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyik 5-tel osztható?

4.3-6.
a. Hány csupa különböző jegyből álló hatjegyű szám képezhető?
b. Ezek között a számok között hány olyan van, amelyikben pontosan négy páratlan számjegy fordul elő?

4.3-7. Egy 28-as létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha

a. a jutalmak egyenlők, és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat;
b. a jutalmak egyenlők, és egy tanuló több jutalmat is kaphat;
c. a jutalmak különbözők, és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat;
d. a jutalmak különbözők, és egy tanuló többet is kaphat?

4.3-8. Egy hegy csúcsára 5 út vezet. Két ember felmegy és lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha a két embert személy szerint nem különböztetjük meg, és

a. egy utat egy ember használhat legfeljebb egyszer;
b. egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban;
c. nincs semmi megszorítás az útra?

A **d.**, **e.**, **f.** kérdések ugyanazok, mint az a, b, c, azzal a különbséggel, hogy most a két embert személy szerint megkülönböztetjük.

4.3-9. Képezzük az összes olyan hatjegyű számot, amelyikben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyike szerepel. Mekkora az így nyert hatjegyű számok összege?

4.3-10. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyiknek a jegyei

a. szigorúan monoton nőnek (mindegyik számjegy nagyobb az előtte levőnél);
b. monoton nőnek (mindegyik számjegy nagyobb vagy egyenlő, mint az előtte levő);
c. szigorúan monoton csökkennek (mindegyik számjegy kisebb az előtte levőnél);
d. monoton csökkennek (mindegyik számjegy kisebb vagy egyenlő, mint az előtte levő)?

4.3-11. Hány ötjegyű számot képezhetünk a

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

számjegyekből, ha páros helyen páros, páratlan helyen páratlan számjegy áll, s egy elem

a. csak egyszer fordul elő?

b. többször is előfordulhat?

4.3-12. Hányféleképpen lehet tíz számot öt párba rendezni?

4.3-13. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni, ha minden rekeszben vagy pontosan 6 darab golyó van, vagy egy sem.

a. a golyók egyformák;

b. a golyók különbözők, és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét is;

c. a golyók különbözők, de nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét a rekeszeken belül?

4.3-14. Határozzuk meg, hogy hány metszéspontja van egy n oldalú konvex sokszög átlóinak. (Csak a sokszög belsejében levő metszéspontokat tekintjük.) Feltételezzük, hogy a sokszögnek nincs három olyan átlója, amelyiknek közös pontja lenne.

4.3-15. Ha az egymástól különböző elemek számát 2-vel megnöveljük, akkor a permutációk száma 90-szer nagyobb. Mekkora az elemek száma?

4.3-16. Hány zérus van 1 000! végén?

4.3-17. Osztható-e a

$$\frac{3400!}{(1700!)^2}$$

szám 1599-cel?

4.3-18. Hányféleképpen lehet 2 fekete, 3 fehér, 4 vörös golyót egy sorba rendezni úgy, hogy fekete golyó ne álljon fehér golyó mellett?

4.3-19. Valamely játékosnak a sakkversenyen a hetedik forduló után 5 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény? (Nyerés 1 pont, döntetlen 0,5 pont, vereség 0 pont. A mérkőzések sorrendje is számít.)

4.3-20. Hányféleképpen ülhet le négy házaspár egy kerek asztal mellé úgy, hogy

a. két nő ne kerüljön egymás mellé;

b. sem két házastárs, sem két nő nem ülhet egymás mellé?

4.3-21. Nyolc labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszik. Mennyi az egy mérkőzésre jutó gólátlag, ha az összes mérkőzésen együtt 42 gólt rúgtak?

4.3-22. Hány tag van a következő kifejezések kifejtett alakjában?

a. $(x + y + z)^6$

b. $(a + 2b + 5c + d)^4$

c. $(r + s + t + u + v)^6$

4.3-23.

a. Mi az $x^2y^3z^2$ kifejezés együtthatója az $(x + y + z)^7$ kifejtett alakjában?

b. Mi az $x^6y^3z^2$ kifejezés együtthatója az $(x - 2y + 5z)^{11}$ kifejtett alakjában?

4.3-24. Hányféleképpen tudunk n azonos ajándékot elosztani r gyermek között

a. ha nincs semmi megkötés;

b. ha minden gyermeknek legalább egy ajándékot kell adnunk?

4.3-25. Adott számú könyvből 4 könyvet 210-féleképpen lehet kiválasztani. Mennyi a könyvek száma?

4.4. Relációk, elrendezések száma

4.4-26. Legyen n pozitív egész szám, és A legyen n-elemű halmaz. Az A halmazon nézzük a homogén binér relációkat.

a. Mennyi az összes reláció száma?

b. Hány szimmetrikus reláció van?

c. Hány olyan reláció van, amelyik egyszerre reflexív és szimmetrikus?

4.4-27. Az állatszelidítő 5 oroszlánt és 4 tigrist akar kivezetni a porondra, de két tigris nem jöhet egymás után.

a. Hányféleképpen állíthatja sorba az állatokat?

b. Hányféleképpen állíthat sorba n oroszlánt és k tigrist?

Az oroszlánok egymás közötti sorrendje is számít, és a tigriseké is, hiszen az állatoknak is van személyiségük.

4.4-28. Hányféleképpen lehet sorba rendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

4.4-29.

a. A könyvespolcon 12 különböző könyv áll. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 5-öt úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

b. Hányféleképpen lehet n könyv közül k darabot kiválasztani úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

4.4-30.

a. Artúr király kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük hadilábon áll a szomszédaival. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják az elvarázsolt hercegnőt.

Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek az öt lovag között?

b. Ha a kerekasztal körül n lovag ül, hányféleképpen választhatunk ki közülük k lovagot, akik között nincsenek szomszédok?

4.5. Bolyongás, számok felbontása, leképezések száma

4.5-31. Bolyongás. Egy szöcske ugrál a számegyenes mentén, egy ugrása 1 egység. Ezt vagy jobbra, vagy balra teszi meg.

a. Hányféleképpen juthat el a 0 pontból a $+8$ pontba, ha 18-at ugrik?

b. Az origóból induló szöcske n ugrás után hányféleképpen juthat el a számegyenes $k \geq 0$ pontjába?

4.5-32. Hányféleképpen lehet 100-at három pozitív egész összeadandó összegére fel-bontani, ha az egymástól csupán az összeadandók sorrendjében eltérő megoldásokat

a. különbözőnek tekintjük;

b. nem tekintjük különbözőnek?

4.5-33. Hány megoldása van az $|x| + |y| < 100$ egyenlőtlenségnek, ha x, y egészek?

4.5-34. Hányféleképpen lehet az egymilliót három pozitív egész tényező szorzatára bontani, ha az egymástól csak a tényezők sorrendjében különböző megoldásokat

a. különbözőknek tekintjük;

b. nem tekintjük különbözőknek? (Szorzótényező az 1 is lehet.)

4.5-35.

a. Tegyük fel, hogy $|A| = n$ és $|B| = k$. Hány $A \to B$ függvény van?

b. Tegyük fel, hogy $|A| = |B| = n$. Hány $A \to B$ bijekció van?

c. Tegyük fel, hogy $|A| = n$ és $|B| = k$. Hány $A \to B$ injekció van?

d. Hány szigorúan monoton növő $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény van?

4.5-36.

Hány olyan hatjegyű számsorozat van, amelyikben van valahol egymás mellett két azonos számjegy (0-9-ig bármi)?

4.6. Logikai szita

4.6-37. Hány olyan n jegyű szám van ($n \geq 3$), amelyik csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

4.6-38. Egy ismerősünknek el akarunk küldeni nyolc különböző fényképet. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha pontosan 5 különböző borítékot akarunk felhasználni?

4.6-39. Az 5-ös számrendszerben a legfeljebb 8 jegyű számok között hány olyan van, amelyiknek a jegyei között az 1, 2, 3, 4 legalább egyszer előfordul?

4.6-40. Hány $A \to B$ szürjekció van, ha $|A| = n, |B| = k$?

4.6-41. (Kovács Géza egykori ELTE-s hallgató példája.) 4 házaspár hogyan helyezhető el egy kerek asztal körül úgy, hogy házastársak nem kerülnek egymás mellé.

4.6-42. Hány ötjegyű szám alkotható

a. csupa egyenlő számjegyből;

b. két különböző számjegyből;

c. három különböző számjegyből;

d. négy különböző számjegyből;

e. öt különböző számjegyből?

4.7. Kártya

4.7-43. Az 52 lapos francia kártyában négy szín (kőr, pikk, káró, treff) és mindegyikből 13 darab van. Mindegyik színből négy figura (ász, király, dáma, bubi), kilenc pedig 2-től 10-ig számozott.

a. Négy játékosnak 13-13 lapot osztva hány különböző leosztás van?

b. Hány olyan leosztás van, ahol minden játékosnak van ásza?
c. Hány olyan leosztás van, ahol minden ász egy kézbe került?

4.8. Binomiális tétel és alkalmazása

Binomiális tétel.
Legyen n természetes szám, x, y pedig tetszőleges komplex számok. Ekkor

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{k}x^ky^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

Helyettesítsünk x és y helyébe is 1-et. Az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Ha az $x = -1$ és az $y = 1$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor pedig a következő összefüggéshez jutunk:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

4.8-44. Határozzuk meg a következő összeget:

$$3\binom{n}{1} + 3^2\binom{n}{2} + \ldots + 3^n\binom{n}{n}$$

4.8-45. Határozzuk meg a következő összeget:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$$

4.8-46. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

4.8-47. Bizonyítsuk be, hogy igaz a következő egyenlőség:

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \ldots + \binom{n+m}{k} = \binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

5. Számelmélet

5.1. Oszthatóság

5.1-1. Állapítsuk meg, milyen maradékot adnak a természetes számok négyzetei 3-mal és 5-tel osztva.
5.1-2. Igaz-e, hogy minden 3-nál nagyobb p prímnek van 6-tal osztható szomszédja?

5.1-3. Bizonyítsuk be, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ osztható 120-szal. (n tetszőleges egész szám.)
5.1-4. Bizonyítsuk be, hogy $665 | 3^{6n} - 2^{6n}$.
5.1-5. Bizonyítsuk be, hogy öt egymást követő egész szám négyzetének az összege nem négyzetszám.
5.1-6. Bizonyítsuk be, hogy $a^{2^n+1} - a$ tízes számrendszerben felírva mindig 0-ra végződik, ha $n \geq 2$.
5.1-7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy (tízes számrendszerben felírt) ötjegyű szám osztható 41-gyel, akkor a számjegyek ciklikus permutálásával nyert ötjegyű szám is osztható 41-gyel.
5.1-8. Bizonyítsuk be, hogy 30 osztója az $mn(m^4 - n^4)$ számnak, bármilyen m, n egész szám esetén.
5.1-9. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetszőleges egész szám, akkor az

$$\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$$

tört nem egyszerűsíthető.

5.2. Osztók száma, a τ függvény

5.2-1. Hány pozitív osztója van 490-nek?
5.2-2. A $15^3 \cdot 12^6 \cdot 23^2 \cdot 14$ számnak
a. hány 21-hez relatív prím pozitív osztója van?
b. hány 21-gyel nem osztható pozitív osztója van?

5.2-3. A szultán 100 cellájában száz rab raboskodik. A szultán leküldi egymás után 100 emberét. A k-adik alkalommal leküldött ember minden k-adik cella zárján állít egyet, ha nyitva volt, bezárja, ha zárva volt, akkor kinyitja. Kezdetben minden cella zárva volt. Mely sorszámú cellák lesznek a végén nyitva?
5.2-4. Határozzuk meg azt a legkisebb n természetes számot, amelyre
a. $\tau(n) = 23$; **b.** $\tau(n) = 25$; **c.** $\tau(n) = 24$.
5.2-5. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy n természetes számnak ugyanannyi páros osztója legyen, mint ahány páratlan?

5.3. Prímszámok

5.3-1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok $4k - 1$ alakú prímszám van.
5.3-2. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok $6k - 1$ alakú prímszám van.
5.3-3. Lássuk be, hogy végtelen sok $4k + 1$ alakú prím van.
5.3-4. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat (a negatívakat is), melyekre $p+10$ és $p + 14$ is prímszám.
5.3-5. A kapitánynak három unokája van, életkoruk három különböző prímszám. Ezek négyzetének összege ismét prímet ad. Hány éves a kapitány legkisebb unokája?

5.4. Euklideszi algoritmus

5.4-1. Legyenek $a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0$. Tekintsük az

$$ax + by \quad (x, y \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

számokat. Lássuk be, hogy az ilyen alakú pozitív egészek közül a legkisebb szám legnagyobb közös osztója az a, b számpárnak.
5.4-2. Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki $a = 86$ és $b = 31$ legnagyobb közös osztóját, valamint a $d = ax + by$ lineáris kombinációs előállításhoz az x és y együtthatókat. Számítsuk ki a legkisebb közös többszöröst is.
5.4-3. Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki $a = 139$ és $b = 102$ legnagyobb közös osztóját, valamint a $d = ax + by$ lineáris kombinációs előállításhoz az x és y együtt-

hatókat.
5.4-4. Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki $a = 255$ és $b = 111$ legnagyobb közös osztóját, valamint a $d = ax + by$ lineáris kombinációs előállításhoz az x és y együtthatókat. Számítsuk ki a legkisebb közös többszöröst is.
5.4-5. Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki $a = 332$ és $b = 88$ legnagyobb közös osztóját, valamint a $d = ax + by$ lineáris kombinációs előállításhoz az x és y együtthatókat.
5.4-6. Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki $a = 124$ és $b = 46$ legnagyobb közös osztóját, valamint a $d = ax + by$ lineáris kombinációs előállításhoz az x és y együtthatókat.

5.5. Kétváltozós lineáris diofantikus egyenletek

Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenleteket

5.5-1. $172x + 62y = 38$
5.5-2. $82x + 22y = 34$
5.5-3. $450x + 86y = 100$
5.5-4. $125x + 45y = -20$

5.6. Euler-féle φ függvény

5.6-1. Számítsuk ki az értéküket:
a. $\varphi(9)$ **b.** $\varphi(540)$ **c.** $\varphi(900)$ **d.** $\varphi(6!)$ **e.** $\varphi(7!)$
5.6-2. Melyek azok a természetes számok, amelyekre $\varphi(n) = 1$?
5.6-3. Melyek azok a természetes számok, amelyekre $\varphi(n)$ értéke páratlan?
5.6-4. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \geq 2$ egész szám, akkor az m-nél kisebb, m-hez relatív prím számok összege $\frac{1}{2}m\varphi(m)$.
5.6-5. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra

$$\varphi(n^2) = n\varphi(n).$$

5.6-6. Oldjuk meg a $\varphi(2x) = \varphi(3x)$ egyenletet.

5.7. Kongruenciák, maradékrendszerek, Euler–Fermat-tétel

5.7.1. Kongruenciák, maradékrendszerek

5.7-1. Bizonyítsuk be kongruenciákkal az alábbi állításokat. Legyen $a, b \in \mathbb{Z}, k, n \in \mathbb{N}$. Ekkor:
a. $a - b | a^n - b^n$
b. $a + b | a^{2k} - b^{2k}$
c. $a + b | a^{2k-1} + b^{2k-1}$
5.7-2. Lássuk be, hogy

$$25,\ -20,\ 16,\ 46,\ -21,\ 18,\ 37,\ -17$$

teljes maradékrendszert alkot modulo 8.
5.7-3. Teljes maradékrendszer-e

$$1,\ 11,\ 21,\ 31,\ 41,\ \ldots,\ 751,\ 761 \pmod{77}?$$

5.7-4. Teljes maradékrendszer-e

$$7,\ 22,\ 37,\ 52,\ 67,\ \ldots,\ 11632,\ 11647 \pmod{777}?$$

5.7-5. Határozzuk meg $3,\ 8,\ 17,\ -17,\ 120,\ 54,\ -40,\ 236,\ 237$
a. legkisebb nemnegatív maradékait $\pmod{11}$,
b. abszolút legkisebb maradékait $\pmod{11}$.
c. A fenti számok közül melyek kongruensek egymással $\pmod{11}$?
5.7-6. Redukált maradékrendszer-e

$$5, 15, 25, 35, 45, 55, \ldots, 155 \pmod{32}? \tag{1}$$

5.7.2. Euler–Fermat-tétel

5.7-7. Lássuk be, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n^2 + 1$ szám minden páratlan prímosztója $4k + 1$ alakú.
5.7-8. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely n egész szám nem osztható 17-tel, akkor $n^8 - 1$ vagy $n^8 + 1$ osztható 17-tel.
5.7-9. Határozzuk meg 109^{355} 14-gyel való osztási maradékát.
5.7-10. Határozzuk meg 293^{275} 48-cal való osztási maradékát.
5.7-11. Mi a $39^{39^{390}}$ szám utolsó két számjegye a tízes számrendszerben?
5.7-12. Lássuk be, hogy ha $(a, 10) = 1$, akkor

$$a^{100n+1} \equiv a \pmod{1000},$$

ahol n természetes szám.
5.7-13. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^{19\cdot 73-1} \equiv 1 \pmod{19 \cdot 73}.$$

5.7-14. Melyek azok a p prímek, amelyekre

$$5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}? \tag{1}$$

5.7-15. Határozzuk meg a 439^{291} szám osztási maradékát 60-nal.
5.7-16. Lássuk be, hogy ha p és q különböző prímszámok, akkor

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p \cdot q}.$$

5.8. Lineáris kongruenciák

Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat

5.8-1. $21x \equiv 14 \pmod{35}$
5.8-2. $172x \equiv 6 \pmod{62}$
5.8-3. $3x \equiv 8 \pmod{13}$
5.8-4. $12x \equiv 9 \pmod{15}$
5.8-5. $12x \equiv 9 \pmod{18}$
5.8-6. $20x \equiv 10 \pmod{25}$
5.8-7. $10x \equiv 25 \pmod{35}$
5.8-8. $90x + 18 \equiv 0 \pmod{138}$
5.8-9. Tegyük fel, hogy $a^{100} \equiv 2 \pmod{73}$ és $a^{101} \equiv 69 \pmod{73}$. Határozzuk meg a-nak a 73-mal történő osztáskor keletkező legkisebb nemnegatív osztási maradékát.

Keressük meg a következő egyenletek egész megoldásait kongruenciák felhasználásával

5.8-10. $84x + 37y = 2$
5.8-11. $41x + 30y = 3$
5.8-12. Pajkos százlábúak futkároznak a ládában. Az egyik fajtának 14 lába van, a másiknak 20. Kölyök (alias Gorcsev Iván) összesen 232 lábat számolt meg. Hány százlábú van a ládában?
5.8-13. Bontsuk fel 463-at két természetes szám összegére úgy, hogy az egyik szám osztható legyen 14-gyel, a másik 23-mal. Oldjuk meg a feladatot kongruenciák segítségével.

5.9. Lineáris kongruencia-rendszerek, a kínai maradéktétel

5.9-1. Oldjuk meg a következő kongruencia-rendszert:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 3 \pmod 7 \\ 3x &\equiv 7 \pmod 8 \end{aligned}$$

5.9-2. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 1 \pmod 5 \end{aligned}$$

kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével.

5.9-3. Oldjuk meg a következő kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével:

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 2 \pmod 3 \\ 3x &\equiv 2 \pmod 7 \\ 9x &\equiv 7 \pmod{11} \end{aligned}$$

5.9-4. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy van k számú egymásutáni egész úgy, hogy bármelyiknek van egynél nagyobb négyzetszám osztója.

5.9-5. Oldjuk meg a a következő kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével:

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 2 \pmod 5 \\ 2x &\equiv 2 \pmod 7 \\ 5x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

5.9-6. Keressük meg a kínai maradéktétel alkalmazásával az alábbi kongruenciák szimultán megoldását:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod 7 \\ 4x &\equiv 1 \pmod 9 \\ 8x &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

5.9-7. Legyen $A = 1000$, és végezzük el a $23 \cdot 37$ szorzást maradékszámrendszerben.

5.9-8. Legyen $A = 1000$, és végezzük el a $24 \cdot 33$ szorzást maradékszámrendszerben.

5.10. Lánctörtek, diofantikus approximációelmélet

5.10-1.
a. Fejtsük egyszerű lánctörtbe a $\frac{139}{102}$ számot.
b. Számítsuk ki a P_n, Q_n értékeket, és állítsuk elő a közelítő törteket.
c. Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenletet:

$$139x + 102y = 1$$

Hasonlítsuk össze ezeket az adatokat azokkal, amelyek az *Euklideszi algoritmus* fejezetben $\mathrm{lnko}(139, 102)$ kiszámítása közben keletkeztek.

5.10-2.
a. Fejtsük egyszerű lánctörtbe a $\frac{172}{62}$ számot. Írjuk fel a szeleteit.
b. Számítsuk ki a P_n, Q_n értékeket, valamint a közelítő törteket.
c. Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenletet:

$$172x + 62y = 38$$

Hasonlítsuk össze ezeket az adatokat azokkal, amelyek a *Diofantikus egyenletek* fejezetben $\mathrm{lnko}(172, 62)$ kiszámítása közben keletkeztek.
5.10-3. Fejtsük lánctörtbe $\sqrt{2}$-t.
5.10-4. Melyik γ számnak a lánctörtbe fejtett alakja az alábbi? Állítsuk elő γ közelítő törtjeit.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\ldots}}.$$

5.10-5. Fejtsük lánctörtbe a $\pi = 3,1415926\ldots$-t.