Lineáris kódok

Definíció.

Legyen $S=\mathbf{F}_q$. Ekkor S^n az $\mathbf{F}_q$ test feletti vektortér. K *lineáris kód*, ha K az S^n k-dimenziós altere. $[n,k]_q$ vagy $[n,k,d]_q$.

Jelölések:

$\underline{u}\in \mathbf{F}_q^n$ esetén u oszlopvektor, u^T sorvektor. $W_q^{(n,k)}$ az n dimenziós tér k-dimenziós altere.

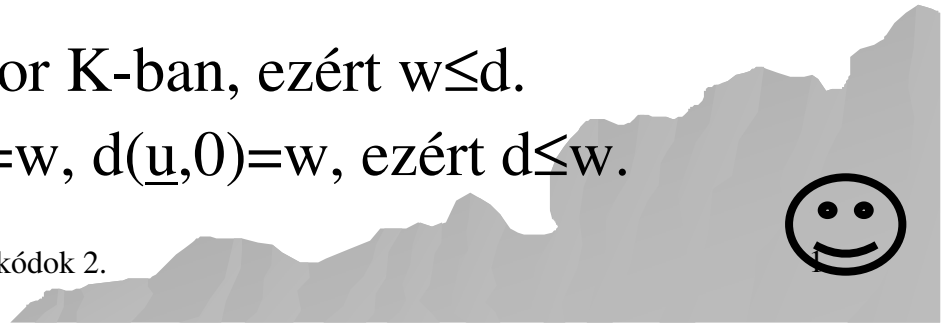
3. tétel.

Legyen K [n,k,d] kód ($k \geq 1$). Ekkor d(K)=w(K)

Bizonyítás.

- Legyen d=d(K), w=w(K). Ekkor $\exists\ \underline{u}, \underline{v}\in K$, melyre $d(\underline{u}, \underline{v})=d$.
  A kód lineáris, így a két vektor különbsége is kódszó:
  $\underline{u}-\underline{v}=\underline{u}_1\in K$.
  $w(\underline{u}_1)=d$, így van d súlyú vektor K-ban, ezért $w\leq d$.
- w=w(K) miatt $\exists\ \underline{u}\in K$: $w(\underline{u})=w$, $d(\underline{u},0)=w$, ezért $d\leq w$.

$\Rightarrow$ d=w



Definíció.

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbf{F}_q^n$ *skalár (belső) szorzata* $(a, b) = a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ *ortogonálisak*, ha $(\underline{a}, \underline{b})=0$.

$\underline{a}$ *önortogonális*, ha $(\underline{a}, \underline{a})=0$.

$W_q^{(n,k)}$ ***ortogonális altere*** $\mathbf{F}_q^n$ mindazon vektorainak a halmaza, melyek $W_q^{(n,k)}$ minden vektorára merőlegesek: $W_q^{(n,k)\perp}$

4. tétel.

- $W_q^{(n,k)\perp}$ az $\mathbf{F}_q^n$ (n–k) -dimenziós altere.
- $\left(W_q^{(n,k)\perp}\right)^{\perp} = W_q^{(n,k)}$

Definíció.
Legyen $W_q^{(n,k)}$ [n,k] kód (n>k). A kód *generátormátrixa* a $W_q^{(n,k)}$ egy bázisának elemeiből, mint sorvektorokból álló G mátrix.

A kód (*paritás-*)*ellenőrző mátrixa* a $W_q^{(n,k)\perp}$ egy bázisának elemeiből, mint sorvektorokból álló H mátrix.

Megjegyzés.
Egy kódnak általában több generátormátrixa és több paritásellenőrző mátrixa is lehet.

5. tétel.

Legyen az F_q fölötti [n,k] kód generátormátrixa G, ellenőrző mátrixa H.

1. Ekkor G (k×n)-es, k rangú, H ((n–k)×n)-es, n–k rangú F_q fölötti mátrix.
2. $H \cdot G^T = 0$.
3. $\underline{v} \in \mathbf{F}_q^n$ akkor és csak akkor kódszó, ha $H \cdot v = 0$.

Bizonyítás.

1. G (k×n)-es, k rangú, H ((n–k)×n)-es, n–k rangú mátrix: Következménye a definíciónak.
2. $H \cdot G^T = 0$:

   A szorzás során H egy-egy sorának a skalárszorzatát képezzük G egy-egy sorával. Minden skalárszorzat eredménye 0, mert H sorvektorai merőlegesek G minden egyes sorvektorára. A $H \cdot G^T$ szorzat egy csupa 0-ból álló (n–k)xk méretű mátrix.

3. Legyen $\underline{v} \in \mathbf{F}_q^n$ kódszó. Ekkor merőleges H minden sorára, tehát H·v eredménye (n–k) elemű nullvektor.

Fordítva: Ha $\underline{v} \in \mathbf{F}_q^n$ nem kódszó, akkor nem merőleges H minden sorára, s így a H·v szorzat eredménye sem nullvektor.

Kódolás lineáris kóddal:

Legyen K $[n,k]_q$ kód. A kódszavak az n dimenziós tér k dimenziós alterének szavai, és az altér bármely bázisa alkalmas generátormátrix képzésére.

Közleményszavakhoz kódszavakat rendelünk:

egy rögzített G generátormátrixszal dolgozunk. A közleményszavak k hosszú vektorok, az $\mathbf{F}_q^k$ elemei.

$\underline{u} \in \mathbf{F}_q^k$ egy lehetséges közleményszó és $u^T \cdot G = v^T$.

$\underline{v} \in \mathbf{F}_q^n$ vektor az $\underline{u}$ kódja.

A kódolás sémája:

közleményszavak $\rightarrow$ kódszavak

$\mathbf{F}_q^k \rightarrow \mathbf{F}_q^n$

$\underline{u} \in \mathbf{F}_q^k \quad u^T \cdot G = v^T \quad \underline{v} \in \mathbf{F}_q^n$

$\underline{u} \rightarrow \underline{v}$

8. példa.

- Az 6. példa kétszeres ismétlés kódja lineáris kód, generátormátrixa $G=(I_k\ I_k)$. (I_k kxk méretű egységmátrix)
- A háromszoros ismétlés kódja szintén lineáris, generátormátrixa $G=(I_k\ I_k\ I_k)$.
- Hasonlóan lineáris a paritásellenőrző kód is, generátormátrixa $G=(I_k\ I)$. (I csupa 1-esből álló oszlopvektor.)

9. példa.

Az alábbi kódok esetében állapítsuk meg a minimális távolságot, a hibajelző, illetve hibajavító képességet,

valamint azt, hogy melyik lineáris, a lineárisoknak pedig adjuk meg a generátormátrixát.

a. Legyen k=3, n=4, és az üzenetekhez az alábbi szabállyal rendeljük hozzá a kódszavakat.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)$$

---

d=2, mert ha az üzenetben egy jelet megváltoztatunk, a kódszóban két jel változik.

d-1=1 hibajelző és $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 0$ hibajavító.

A kód nem lineáris, mert például a $\underline{0}$ vektor nem kódszó.

b. Legyen k=3, n=5, és az üzenetekhez az alábbi szabállyal rendeljük hozzá a kódszavakat.

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2+\alpha_3)$

---

d=2, mert ha az üzenetben egy jelet megváltoztatunk, a kódszóban két jel változik.

→ d-1=1 hibajelző

$\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 0$ hibajavító.

A kód lineáris $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. k=3, n=5, és az üzenetekhez az alábbi szabállyal rendeljük hozzá a kódszavakat.

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \max(\alpha_2, \alpha_3))$

---

d=1, mert van egymástól 1 távolságra lévő két kódszó.

Például (1 0 1 1 1) és (1 1 1 1 1).

A kód d-1=0 hibajelző és 0 hibajavító.

A kód nem lineáris, mert van két olyan kódszó, amelyek összege nem kódszó, s így az összeadás (valamint a kivonás is) kivezet a kódszavak halmazából.

Például $\underline{u}_1^T = (1\ 1\ 0\ 1\ 1)$ és $\underline{u}_2^T = (1\ 0\ 1\ 1\ 1)$ kódszavak, de $\underline{u}_1^T + \underline{u}_2^T = (0\ 1\ 1\ 0\ 0)$ nem kódszó.

6. tétel.

Ha egy [n,k] kód generátormátrixa $G=(I_k \;\; P)$ ($k\times n$, $k\times(n-k)$)

alakú, akkor a $H = (-P^T \;\; I_{n-k})$ mátrix a kód ellenőrző mátrixa. ($(n-k)\times n$, $(n-k)\times k$)

(P tetszőleges mátrix .)

Bizonyítás.

Elég belátnunk azt, hogy $H\cdot G^T=0$. Blokkonkénti szorzással a következőt kapjuk:

$$\left(-P^T \quad I_{n-k}\right)\cdot\begin{pmatrix} I_k \\ P^T \end{pmatrix} = -P^T + P^T = 0$$

Megjegyzés.

Hasonlóan igaz az is, hogy ha egy [n,k] kód ellenőrző mátrixa $H = (I_{n-k} \;\; R)$ alakú, ahol R tetszőleges $((n-k)\times k)$ méretű mátrix, akkor a $G=(-R^T \;\; I_k)$ mátrix megfelel generátormátrixnak. A kételemű test fölött –P helyett P is irható, mert $\mathbf{F}_2$-ben $1=-1$.

10. példa.

Adjuk meg a 9. példában szereplő lineáris kód ellenőrző mátrixát a

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generátormátrix felhasználásával.

Az előző tételt alkalmazzuk.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. tétel.

Egy [n,k,d] kód H ellenőrző mátrixában van d lineárisan összefüggő oszlop, de bármely d-nél kevesebb oszlop lineárisan független.

Bizonyítás.

- Egy [n,k,d] kód H ellenőrző mátrixában van d lineárisan összefüggő oszlop: a következő módon lehet ilyet találni:

  $d=d(K)=w(K)$ miatt $\exists\, \underline{u} \in K$: $w(\underline{u})=d$.

  $\underline{u}$ –ban d helyen nem nulla érték áll, a többi helyen nulla.

  $H\cdot\underline{u}=0$: H oszlopainak vesszük a lineáris kombinációit, és $\underline{u}$ elemei az együtthatók.

A lineáris kombinációban pontosan d számú együttható különbözik nullától. A megfelelő d oszlop H-ban lineárisan összefüggő.

- H-ban bármely d-nél kevesebb oszlop lineárisan független:

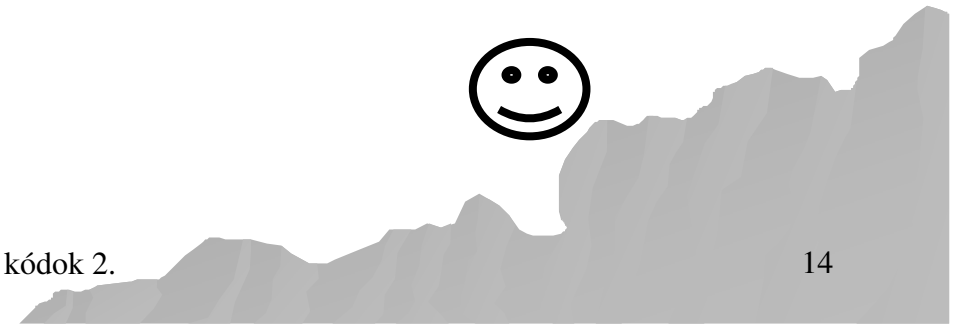
  Legyen $0<d_1<d$ és tegyük fel, hogy H-ban van d_1 összefüggő oszlop. Így van H oszlopainak olyan lineáris kombinációja, amelyben ez a d_1 oszlop nem mind nullával szorzódik, a többi együttható azonban mind nulla, s az eredmény a nullvektor.

  Az együtthatókból készítsünk egy $\underline{u}_1$ vektort.

  Egyrészt $H\cdot\underline{u}_1=0$, emiatt $\underline{u}_1$ kódvektor.

  Másrészt $w(\underline{u}_1)=d_1$, így a kód súlya és ezzel együtt a távolsága kisebb lenne d-nél, ami ellentmondás. ↯

Beláttuk, hogy minden d-nél kevesebb oszlop lineárisan független H-ban.



11. példa.

Adjuk meg a 10. példában szereplő lineáris kód

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ellenőrző mátrixának segítségével a kód távolságát és hibajelző, valamint hibajavító képességét.

Az ellenőrző mátrixban van két összefüggő oszlop
(a 2. és a 3.), bármely oszlop önmagában lineárisan független
(nem szerepel köztük a nullvektor),
Így d=2, 1-hibajelző és 0-hibajavító a kód.

(Más meggondolással a 7.b példában ugyanezt kaptuk.)

8. tétel. (Singleton korlát)

[n,k,d] kódban $d \leq n-k+1$.

Bizonyítás.

H rangja n–k, emiatt H-ban a független oszlopok száma ≤ n–k.

Előző tétel szerint H-ban bármelyik d–1 oszlop lineárisan független. Így

$$d-1 \leq n-k$$

$$d \leq n-k+1$$

Definíció.

Az [n,k,d] kód *maximális távolságú*, ha d=n-k+1.

Jelölése: MDS kód. (S: szeparábilis).

13. példa.

Egy bináris kód generátormátrixa G. Adjuk meg a kód paritásellenőrző mátrixát és a távolságát.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bázistranszformáció a sorvektorokon: ugyanannak az altérnek másik bázisát kapjuk, ugyanaz a mátrix lehet az ellenőrző mátrix. Az 1. sort adjuk a 2.-hoz.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4-1-3-2 permutáció

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2-3-1-4 permutáció

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H$$

A kód távolsága d=2, mert H-ban van két összefüggő oszlop (3. 7.), de mindegyik oszlop önmagában független.