Minta zárthelyi dolgozat

BIII*, 2003/2004, I. félév, 1. zh.

1. (15 pont) Legyen $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}/|\vec{r}|^3$ és legyenek $a, c > 0$ konstansok. Számítsuk ki az $\oint_C \vec{v}(r) \times d\vec{r}$ integrált, ahol $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, C az $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$ kör, amelyet egyszer futunk be a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal.
2. (10 pont)
   a. Mutassuk meg, hogy az

   $$(x, y, z) \mapsto \big(-2\sin(x)\sin(3y)e^z + yz, 6\cos(x)\cos(3y)e^z + xz, 2\cos(x)\sin(3y)e^z + xy\big),$$

   $x, y, z \in \mathbb{R}$ vektormezőnek van potenciálja, és határozzuk meg.

   b. Határozzuk meg a vektormező integrálját a $(\pi/2, \pi/6, 0)$ kezdőpontú és $(0, \pi/6, 1)$ végpontú lineáris pályán (szorzás a belső szorzás).
3. (35 pont) A divergenciatétel segítségével alakítsuk át az

   $$\iint_S \big(x^2\cos(\alpha) + y^2\cos(\beta) + z^2\cos(\gamma)\big)\, dS$$

   integrált, ahol $h > 0$ konstans, $x, y, z \in \mathbb{R}$, az S az $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$ kúp határa, és $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ a külső normális iránykoszinuszai. Mindkét integrált számoljuk ki.
4. (25 pont) A *Stokes-tétel alkalmazásával* számítsuk ki az

   $$\oint_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$$

   pálya menti integrált, ahol $a, h > 0$ konstansok, $x, y, z \in \mathbb{R}$, a C az $x^2 + y^2 = a^2$, $x/a + y/h = 1$ egyenletű ellipszis, amelyet az x tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal egyszer futunk be.
5. (15 pont) Hol differenciálható az $f(0) = 0$, $f(x+iy) = (x^5 + iy^4)/(x^2+y^2)$ egyébként $(x, y \in \mathbb{R})$ összefüggésekkel definiált komplex függvény?
6. (20 pont) Adjunk meg olyan törtlineáris leképezést, amely a felső félsíkot az egységkör belsejébe és az i-t az origóba viszi.