A WEIERSTRASS-FÉLE SZIGMA-FÜGGVÉNY JELLEMZÉSE

Járai Antal és Wolfgang Sander

Abstract. Megmutatjuk, hogy az

$$f_1(x+y)f_2(x-y)=\sum_{i=1}^{k} g_i(x)h_i(y)$$

függvényegyenlet mérhető és nem majdnem mindenütt nulla $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ megoldásai $\mathcal{C}^\infty$-ek és a $k \le 2$ esetben parciális differenciálegyenletre való visszavezetéssel megoldjuk az egyenletet.

Bevezetés

A XXX. ISFE-en (1992, Oberwolfach) Wolfgang Sander a következő problémát vetette fel [10]:

Probléma. *Legyenek $f, g_1, g_2, h_1, h_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények. Tegyük fel, hogy f nem mindenütt nulla, és hogy g_1 és g_2 lineárisan függetlenek. Ha f, g_1, g_2, h_1, h_2 teljesítik az*

$$f(u+v)f(u-v)=g_1(u)h_1(v)+g_2(u)h_2(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

függvényegyenletet, bizonyítsuk be vagy cáfoljuk meg, hogy f mérhetőségéből következik f folytonossága.

Ez a kérdés tulajdonképpen egy, a Weierstrass-féle szigma-függvénynek addíciós tétel segítségével történő jellemzésére vonatkozó kérdés. Folytonosság feltételezése mellett Mario Bonk adott ilyen jellemzést habilitációs dolgozatában és azt [2] dolgozatában publikálta. Őt Aczél János “The state of the second part of Hilbert's fifth problem” című [1] áttekintő dolgozata motiválta. Ebben a dolgozatban Aczél az Abel által vizsgált függvényegyenleteket tárgyalja. Hilbert [4] ötödik problémájának második felében idézi Abel függvényegyenletekkel kapcsolatos munkáit azzal a megjegyzéssel, hogy érdekes lenne megkapni Abel eredményeit differenciálhatósági feltételek nélkül.

Aczél összefoglalja az Abel által vizsgált egyenletekkel kapcsolatban azóta elért eredményeket. Az

$$f(u+v)f(u-v)=f(u)^2g(v)^2-f(v)^2g(u)^2, \tag{2}$$

$$g(u+v)g(u-v)=g(u)^2g(v)^2-c^2f(u)^2f(v)^2 \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 39B32. 33E05 Secondary: 33E0.
Ezt a munkát az OTKA T043080 és T043657 pályázatok támogatták .

egyenletekkel kapcsolatban azt írja, hogy „Abel ezt az egyenletrendszert legfeljebb negyedrendű differenciálegyenletekre vezette vissza, természetesen (négyszeri) differenciálhatóság feltételezése mellett, azaz, mivel komplex függvényekről van szó, analitikusság feltételezésével. Haruki, szintén legfeljebb negyedrendű differenciálegyenletekre történő visszavezetéssel, meghatározta az *egyedül csak (2)-nek* eleget tévő (négyszer) differenciálható megoldásokat. Az egyedül csak (2)-t vagy a (2), (3) rendszert minden $u, v \in \mathbb{C}$-re kielégítő *általános folytonos megoldások* nem ismertek (számomra); még kevésbé a folytonosságnál gyengébb regularitási feltételt kielégítő vagy a $\mathbb{C}^2$ részhalmazain tekintett megoldások."

Bonk [2] dolgozatában az

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

függvényegyenletet, illetve annak speciális esetét, az

$$f(u+v)f(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

egyenletet vizsgálta. A függvények komplex értékűek. Bebizonyított egy regularitási tételt, azt, hogy (4) minden folytonos f_1, f_2, g_i, h_i megoldása lineárisan független g_i és h_i függvényekkel (egyértelműen) kiterjeszthető egy $\mathbb{C}^n$-en értelmezett analitikus függvénnyé úgy, hogy a kiterjesztések eleget tesznek (4)-nek $\mathbb{C}^n$-en. Felhasználva ezt az eredményt, Bonk meghatározta (5) minden folytonos megoldását a $k \leq 2$ esetben.

1992-ben Richard Rochberg és Lee A. Rubel [9] más módszerekkel meghatározták a (4) egyenlet analitikus $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ megoldásait a $k \leq 2$ esetben. Két eljárást is adtak. Első módszerük a függvényegyenletet differenciálegyenletre vezeti vissza, a második az egyenlet speciális szimmetriáit használja. (Mindkét esetben néhány megoldást nem vettek észre.)

Végül Bonk 1997-ben [3] dolgozatában meghatározta a (4) egyenlet folytonos megoldásait a $k \leq 2$ esetben.

Sanderral megmutattuk, hogy (4) minden mérhető és nem majdnem mindenütt nulla (f_1, f_2) megoldása $\mathcal{C}^\infty$-ben van, és hogy differenciálegyenletekre történő visszavezetéssel is megkaphatók a Bonk fent említett dolgozataiban szereplő eredmények. Így Bonk, valamint Rochberg és Rubel tételeinek általánosítását kapjuk, általános módszerek felhasználásán nyugvó bizonyítással. Ez a módszer tehát a Hilbert ötödik problémája második felében kijelölt utat követi.

Regularitás

Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények teljesítik az*

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletet, továbbá, hogy f_1, f_2 mérhetőek és nem majdnem mindenütt nullák. Ekkor $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty$.

Bizonyítás vázlat. Feltehetjük, hogy g_i, h_i lineárisan függetlenek. Kifejezve a g_i és h_i függvényeket f_1-el és f_2-vel, és visszaírva az egyenletbe, azt kapjuk, hogy léteznek olyan $c_{i,j}$ komplex konstansok, illetve u_i, v_j vektorok, hogy

$$f_1(x)f_2(y) = \sum_{i,j=1}^{k} c_{i,j} f_1\Big(u_i + \frac{x-y}{2}\Big) f_2\Big(u_i - \frac{x-y}{2}\Big) f_1\Big(\frac{x+y}{2} + v_j\Big) f_2\Big(\frac{x+y}{2} - v_j\Big)$$

ha $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ha $f_1 = f_2 = f$ lenne, egy általános regularitási tételt alkalmazhatnánk. Mivel nem ez a helyzet, előbb egy ,,átviteli elvet" alkalmazunk (általánosan lásd a [6] disszertációt). Az előző egyenletből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \frac{1}{f_2(y_1)} \sum_{i,j=1}^{k} c_{i,j} f_1\Big(u_i + \frac{x_1-y_1}{2}\Big) f_2\Big(u_i - \frac{x_1-y_1}{2}\Big) \\ &\quad \cdot f_1\Big(\frac{x_1+y_1}{2} + v_j\Big) f_2\Big(\frac{x_1+y_1}{2} - v_j\Big), \\ f_2(x_2) &= \frac{1}{f_1(y_2)} \sum_{i,j=1}^{k} c_{i,j} f_1\Big(u_i + \frac{x_2-y_2}{2}\Big) f_2\Big(u_i - \frac{x_2-y_2}{2}\Big) \\ &\quad \cdot f_1\Big(\frac{x_2+y_2}{2} + v_j\Big) f_2\Big(\frac{x_2+y_2}{2} - v_j\Big). \end{aligned}$$

Most legyen $f(x) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big)$, ahol $x = (x_1, x_2)$. Az egyszerű ötlet, hogy f eleget tesz az

$$f(x) = h\Big(f\big(g_0(y)\big), f\big(g_1(x,y)\big), \ldots, f\big(g_{4k}(x,y)\big)\Big),$$

$(x,y) \in D$ egyenletnek, ahol $y = (y_1, y_2)$, alkalmas D-vel, g_i-vel és h-val. Erre az egyenletre (némi trükközéssel) alkalmazhatók [5] általános regularitási tételei (lásd [7]-et).

Vegyük észre, hogy az $x+y$, $x-y$ belső függvények jóval általánosabb belső függvényekkel helyettesíthetők. (Bonk módszere ebben az esetben már nem működik.)

Megjegyzés. Hasonló regularitási tétel nem marad igaz a sokkal általánosabb

$$\prod_{j=1}^{m} f(a_j u + b_j v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(u) h_i(v), \qquad u, v \in \mathbb{R}^n,$$

egyenletre, még ha $n = 1$, akkor sem. Legyen a bal oldal

$$f(a_1 u + b_1 v) f(a_2 u + b_2 v) f(a_3 u + b_3 v),$$

legyen f egy tetszőleges mérhető függvény, amely nulla a $]1,2[$ intervallumon kívül, és legyen $a_1 = b_1 = a_2 = 1$, $b_2 = b_3 = -1$, $a_3 = 3$ és $g_i \equiv h_i \equiv 0$. Ekkor, ha $x = u + v \in]1,2[$ és $y = u - v \in]1,2[$, azt kapjuk, hogy $a_3 u + b_3 v = x + 2y \in]3,6[$, így a szorzat mindig nulla.

A σ-függvény jellemzése

Determinánsok. Legyen

$$F(u,v)=\sum_{i=1}^{k} g_i(u)h_i(v), \quad \text{ha } u,v\in\mathbb{R}^n.$$

Legyenek továbbá $\Lambda_u^0,\dots,\Lambda_u^k$ tetszőleges, a g_i függvényeket tartalmazó valamely (lineáris) függvénytéren értelmezett lineáris funkcionálok. Az alsó index jelzi, hogy a funkcionál az u változóban hat, a felső index pedig egy egyszerű sorszám. Hasonlóan, legyenek $\Lambda_v^0,\dots,\Lambda_v^k$ a v változóban ható lineáris funkcionálok. A $v\mapsto \Lambda_u^j F(u,v)$, $j=0,1,\dots,k$ függvények a h_i függvények lineáris kombinációi, így nem lehetnek lineárisan függetlenek. Léteznek tehát olyan c_j nem mind nulla konstansok, hogy $\sum_{j=0}^k c_j\Lambda_u^j F(u,v)=0$. Alkalmazva erre az összefüggésre a Λ_v^i lineáris funkcionálokat, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{k} c_j\Lambda_v^i\Lambda_u^j F(u,v)=0, \quad \text{ha} \quad i=0,\dots,k.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\det\left(\Lambda_v^i\Lambda_u^j F(u,v)\right)_{i,j=0}^k=0.$$

Ezt az összefüggést fogjuk arra felhasználni, hogy differenciálegyenletet kapjunk az f_1,f_2 függvényekre.

Differenciálegyenlet. Vizsgáljuk meg először az egyszerűbb egydimenziós $n=1$ esetet. Legyenek u és v rögzített elemek. Ekkor a $\Lambda_u^0(g)=g(u)$, $\Lambda_u^1(g)=g'(u)$, $\Lambda_u^2(g)=g''(u)$, $\Lambda_v^0(h)=h(v)$, $\Lambda_v^1(h)=h'(v)$, $\Lambda_v^2(h)=h''(v)$ választással azt kapjuk, hogy

$$\det\begin{pmatrix} F & F_u & F_{uu}\\ F_v & F_{uv} & F_{uuv}\\ F_{vv} & F_{uvv} & F_{uuvv}\end{pmatrix}=0.$$

Ha $F(u_0,v_0)\neq 0$, akkor az origó egy környezetében értelmezve van a $G(u,v)=\ln(F(u+u_0,v+v_0)/F(u_0,v_0))$ függvény, és itt azt kapjuk, hogy

$$2G_{uv}^3+G_{uv}G_{uuvv}-G_{uuv}G_{uvv}=0.$$

Hasonló egyenletet kívánunk levezetni az összes $n\geq 1$ esetre is.

Parciális differenciálegyenlet. Hasonlóan, mint fent, azt kapjuk, hogy a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & G_{u_1v_1} & G_{u_2}G_{u_3v_1}+G_{u_3}G_{u_2v_1}+G_{u_2u_3v_1}\\ 0 & G_{v_2}G_{u_1v_3}+G_{v_3}G_{u_1v_2}+G_{u_1v_2v_3} & ** \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa nulla, ahol

$$\begin{aligned} ** =& G_{u_2}G_{v_2}G_{u_3v_3}+G_{u_2}G_{v_3}G_{u_3v_2}+G_{u_3}G_{v_2}G_{u_2v_3}\\ &+G_{u_3}G_{v_3}G_{u_2v_2}+G_{u_2}G_{u_3v_2v_3}+G_{u_3}G_{u_2v_2v_3}\\ &+G_{v_2}G_{u_2u_2v_3}+G_{v_3}G_{u_2u_3v_2}+G_{u_2v_2}G_{u_3v_3}\\ &+G_{u_2v_3}G_{u_3v_2}+G_{u_2u_3v_2v_3}. \end{aligned}$$

Speciális választásokkal:

$$G_{u_1v_1}G_{u_2v_2} = G_{u_1v_2}G_{u_2v_1},$$
$$G_{u_1v_1}G_{u_2v_2v_3} = G_{u_2v_1}G_{u_1v_2v_3},$$
$$G_{u_1v_1}G_{u_2u_3v_2} = G_{u_1v_2}G_{u_2u_3v_1}.$$

Ezeket az egyenleteket felhasználva a fenti mátrix determinánsa jelentősen egyszerűsíthető, és azt kapjuk, hogy

$$2G_{u_1v_1}G_{u_2v_2}G_{u_3v_3} + G_{u_1v_1}G_{u_2u_3v_2v_3} - G_{u_1v_2v_3}G_{v_1u_2u_3} = 0.$$

Ezt az egyenletrendszert oldjuk meg, először lokálisan, majd globálisan.

Weierstrass-függvények. Legyenek ω_1, ω_2 nullától különböző komplex számok, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Legyen $\Omega = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$. A *Weierstrass-féle szigma-függvény*t a

$$\sigma(z, \omega_1, \omega_2) = z \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

abszolút konvergens szorzat definiálja; σ a z változó egész függvénye, (egyszeres) gyökei Ω pontjai.

A *Weierstrass-féle $\mathcal{P}$-függvény* a σ logaritmusa második deriváltjának mínusz egyszerese:

$$\mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2) = -\frac{d}{dz} \frac{\frac{d}{dz}\sigma(z, \omega_1, \omega_2)}{\sigma(z, \omega_1, \omega_2)}.$$

Az alapmegoldás. A $k = 2$ esetben az „alapmegoldás”

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_2(z) = \sigma(z, \omega_1, \omega_2), \\ g_1(z) &= h_2(z) = \sigma(z, \omega_1, \omega_2)^2, \\ g_2(z) &= -h_1(z) = \sigma(z, \omega_1, \omega_2)^2 \mathcal{P}(z, \omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad .$$

A többi f_1, f_2 megoldás innen, vagy a $k = 1$, $\omega_1 = \infty$ és/vagy $\omega_2 = \infty$ elfajuló eseteknek megfelelő megoldásokból megkapható $z = L(x) + e_i$ helyettesítéssel, illetve $\exp\bigl(a_i + L_i(x) + Q(x)\bigr)$ függvényekkel való szorzással, ahol L, L_1, L_2 lineáris függvények, Q kvadratikus függvény. A részleteket lásd az eredeti [7] cikkben.

A Riemann-féle ϑ-függvény

A részletes tárgyalást lásd Mumford [8] könyvében.

Definíció. A Riemann-féle ϑ-függvényt 1 dimenzióban a

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

sor definiálja, ahol $z, \tau \in \mathbb{C}$, $\Im\tau > 0$. A z változóban 1 szerint periódikus, τ szerint kváziperiódikus:

$$\vartheta(z + \tau, \tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z)\vartheta(z, \tau).$$

A két irány mentén vett eltolások egy-egy egyparaméteres transzformációcsoportot alkotnak, azonban egymással nem kommutálnak. Segítségükkel megkapható a Heisenberg-csoport egy reprezentációja. Az

$$(x,t) \mapsto \vartheta(x, it)$$

leképezés a hővezetési egyenlet 1-periódikus alapmegoldása. A szorzatelőállításból ϑ-nak (mint z függvényének) a gyökei:

$$\frac{1}{2}(2m+1)\tau + \frac{1}{2}(2n+1), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Logaritmikus deriváltjának a deriváltja a $\mathcal{P}$-függvény mínusz egyszeresének eltoltja plusz konstans. A $\mathcal{P}$-függvény a Korteweg-de Vries egyenlet időfüggetlen megoldása, és szoros kapcsolatban van az elliptikus görbékkel.

Definíció. A Riemann-féle ϑ-függvényt d dimenzióban a

$$\vartheta(\vec{z}, \Omega) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \exp(\pi i \vec{n}^t \Omega \vec{n} + 2\pi i \vec{n}^t \vec{z})$$

sor definiálja, ahol ^{t} a transzponálás, $\vec{z} \in \mathbb{C}^d$ és Ω a Siegel-féle felső féltér eleme, olyan $d \times d$ méretű szimmetrikus komplex mátrix, amelynek képzetes része pozitív definit (ez kell a konvergenciához). A $\mathbb{Z}^d + \Omega\mathbb{Z}^d$ rácson a függvény kváziperiódikus:

$$\vartheta(\vec{z} + \vec{m}, \Omega) = \vartheta(\vec{z}, \Omega),$$

$$\vartheta(\vec{z} + \Omega\vec{m}, \Omega) = \exp(-\pi i \vec{m}^t \Omega \vec{m} - 2\pi i \vec{m}^t \vec{z})\vartheta(\vec{m}, \Omega),$$

ha $\vec{m} \in \mathbb{Z}^d$.

Riemann ϑ formulája. A második változót nem írva ki,

$$\vartheta\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}+\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)\vartheta\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}-\vec{u}-\vec{v}}{2}\right)\vartheta\left(\frac{\vec{x}-\vec{y}+\vec{u}-\vec{v}}{2}\right)\vartheta\left(\frac{\vec{x}-\vec{y}-\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)$$
$$= 2^{-d} \sum_{\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d} \exp\big(4\pi i^t \vec{\alpha}\Omega\vec{\alpha} + 2\pi i \vec{\alpha}^t(\vec{x}+\vec{y}+\vec{u}+\vec{v})\big)$$
$$\cdot\, \vartheta(\vec{x}+\Omega\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vartheta(\vec{y}+\Omega\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vartheta(\vec{u}+\Omega\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vartheta(\vec{v}+\Omega\vec{\alpha}+\vec{\beta}).$$

Legyen $y := x$, $v := u$. Mivel a jobb oldalon csak 2^d független függvény van, a $d = 1$ esetben a (4) egyenlet megodását kapjuk $k = 2$-re. Ebben az esetben a megolda‘sok lei‘rhato‘k az egydimenzio‘s ϑ-függve‘ny segi‘tse‘ge‘vel is. Ez bizonyos e‘rtelemben megva‘laszolja Mumford egy ke‘rde‘se‘t (la‘sd [8], 117. o.) az egydimenzio‘s esetben. A magasabb dimenziós ϑ-függvények a (4) egyenlet megoldását szolgáltathatják $k > 2$-re. Az összes megolda‘s nem ismert.

Irodalom

[1] Aczél János, *The state of the second part of Hilbert's fifth problem.* Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) *20* (1989), 153–163.

[2] Mario Bonk, *The addition theorem of Weierstraß's sigma function.* Math. Ann. *298* (1994), 591–601.

[3] Mario Bonk, *The addition formula for theta functions.* Aequationes Math. *53* (1997), 54–72.

[4] David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen Band III.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[5] Járai Antal, *On Lipschitz property of continuous solutions of functional equations.* Aequationes Math. *47* (1994), 69–78.

[6] Járai Antal, *Többváltozós függvényegyenletek regularitási tulajdonságai.* Akadémiai doktori értekezés. http://compalg.inf.elte.hu/~ajarai, Budapest, 1999, 249 oldal.

[7] Járai Antal, Wolfgang Sander, *A Regularity Theorem in Information Theory.* Publ. Math. Debrecen *50* (1997), 339–357.

[8] David Mumford, *Tata lectures on theta I.* Birkhauser, 1983.

[9] Richard Rochberg, Lee A. Rubel, *A functional equation.* Indiana Univ. Math. J. *41* (1992), 363–376.

[10] Wolfgang Sander, *Problem 19.* Aequationes Math. 46 (1993), 294.

Eötvös Loránd Tudományegyetem Komputeralgebra Tanszék H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

E-mail address: ajarai@moon.inf.elte.hu *Homepage:* http://compalg.inf.elte.hu/~ajarai