- $8/-2$:

  $<$

félévet. Mindenütt a egyszerűség elsődleges szempontjának a matematikai pontossággal

  $>$

félévet. Mindenütt az egyszerűség elsődleges szempontjának a matematikai pontossággal

- $12/4$:

  $<$

Ha A és B halmazok, akkor nyilván $A \cap B := \cap\{A, B\}$.

  $>$

Ha A és B halmazok, akkor nyilván $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

- $28/4$:

  $<$

is: ha $A \subset \mathbb{R}$ nem üres és alulról korlátos, akkor $\inf A = -\sup(-A)$.

  $>$

is: ha $A \subset \mathbb{R}$ nem üres és alulról korlátos, akkor $\inf(A) = -\sup(-A)$.

- $30/15$:

  $<$

$n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{N}$ vagy az $\mathbb{N}^+$ halmaz n-nél nem nagyobb elemein értelmezett függvényeket *véges sorozat*nak nevezzük. Az x véges sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vagy x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, illetve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vagy x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ha a szöveg-

  $>$

$n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{N}$ illetve az $\mathbb{N}^+$ halmaz n-nél kisebb illetve nem nagyobb elemein értelmezett függvényeket *véges sorozat*nak nevezzük. Az x véges sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ vagy x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, illetve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vagy x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ha a szöveg-

- $31/15$:

  $<$

2.1.22. Általános rekurziótétel. *Legyen adott egy X halmaz és egy f függvény, amelynek értékkészlete X részhalmaza, értelmezési tartománya pedig az összes olyan függvények halmaza, amelyek értékkészlete X részhalmaza, értelmezési tartománya pedig $\mathbb{N}$ valamely kezdőszelete. Ekkor egyértelműen létezik egy $g : \mathbb{N} \to X$ függvény, amelyre $g(a) = f\big(g|_{]\leftarrow, a[}\big)$ minden $a \in \mathbb{N}$-re.*

A tétel és a bizonyítás érvényes marad akkor is, ha $\mathbb{N}$ helyett tetszőleges N jólrendezett halmaz szerepel. Ezt az általánosabb változatot szokás transzfinit rekurziótételnek nevezni.

* **Bizonyítás.** Az egyértelműség bizonyítása $\mathbb{N}$ jólrendezettségén múlik. (Az ilyen bizonyításokat *transzfinit indukció*val történő bizonyításnak nevezzük.) Tegyük fel, hogy g és g^* is eleget tesz a tétel feltételeinek. Legyen $S = \big\{x \in \mathbb{N} : g(x) \neq g^*(x)\big\}$. Ha S

nem üres, akkor létezik legkisebb eleme, legyen ez a. Mivel $g|_{]\leftarrow,a[} = g^*|_{]\leftarrow,a[}$, azt kapjuk, hogy
$$g(a) = f\big(g|_{]\leftarrow,a[}\big) = f\big(g^*|_{]\leftarrow,a[}\big) = g^*(a),$$
ami ellentmond annak, hogy $a \in S$.

A g létezésének bizonyítása hasonlít a rekurziótétel megfelelő részének bizonyítására. Nevezzük $\mathbb{N} \times X$ egy A részhalmazát f-zártnak, ha minden $a \in \mathbb{N}$-re és minden $h :]\leftarrow, a[\to X$ függvényre, amelyre $h \subset A$, teljesül, hogy $\big(a, f(h)\big) \in A$. Maga $\mathbb{N} \times X$ egy f-zárt halmaz, ilyen halmaz tehát létezik. Legyen g az összes f-zárt halmaz metszete. Mivel g nyilván f-zárt, csak azt kell megmutatnunk, hogy g a $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény. Más szóval, azt fogjuk bizonyítani, hogy ha $c \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $x \in X$, hogy $(c, x) \in g$ és ha $(c, y) \in g$, akkor $x = y$. A bizonyítás transzfinit indukcióval történik. Legyen S azon $\mathbb{N}$-beli c elemek halmaza, amelyekre ez nem igaz. Legyen a az S legkisebb eleme. Ekkor $g|_{]\leftarrow,a[}$ egy $]\leftarrow, a[$-n értelmezett függvény. Mivel a g halmaz f-zárt, ha $x = f\big(g|_{]\leftarrow,a[}\big)$, akkor $(a, x) \in g$. Mivel $a \in S$, van olyan $y \in X$, hogy $(a, y) \in g$ és $y \neq x$. Megmutatjuk, hogy $g \setminus \big\{(a, y)\big\}$ is f-zárt. Ez azt jelenti, hogy $b \in \mathbb{N}$ és $h :]\leftarrow, b[\to X$, $h \subset g \setminus \big\{(a, y)\big\}$ esetén $\big(b, f(h)\big) \in g \setminus \big\{(a, y)\big\}$. Ez nyilvánvaló akkor is, ha $b = a$, és akkor is, ha $b \neq a$. $\square$

2.1.23. Példa: Fibonacci-számok. Példaként megmutatjuk, hogyan definiálhatók a Fibonacci-számok az előző tétel segítségével pontosan. Legyen $X = \mathbb{N}$, legyen $f(\emptyset) = 0$, $f\Big(\big\{(0, k)\big\}\Big) = 1$ bármely $k \in \mathbb{N}$-re, és ha $n > 1$, $h :]\leftarrow, n[\to \mathbb{N}$ egy függvény, akkor legyen $f(h) = h(n-1) + h(n-2)$. $\big[$Megjegyezzük, hogy $n = \min\big(\mathbb{N} \setminus \mathrm{dmn}(h)\big)$.$\big]$
$>$

2.3.13. Általános rekurziótétel. *Legyen adott egy X halmaz és egy X-be képező f függvény, amelynek értelmezési tartománya az X-beli (nullától indexelt) véges sorozatok halmaza. (Az f adja a rekurziót.) Ekkor egyértelműen létezik egy $g : \mathbb{N} \to X$ függvény, amely „f-zárt”, azaz $g(n) = g_n = f(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.*

A tétel szemléletesen fogalmazva azt mondja, hogy ha adott egy függvényünk, amely egy egydimenziós tömb esetén kiszámítja a tömb már feltöltött kezdetéből, hogy a következő helyre mit kell tennünk, akkor ennek segítségével a tömböt akármeddig feltölthetjük.

A tétel és a bizonyítás érvényes marad akkor is, ha $\mathbb{N}$ helyett tetszőleges N jólrendezett halmaz szerepel. Ezt az általánosabb változatot szokás *transzfinit rekurziótétel*nek nevezni. Ekkor f értelmezési tartománya az összes, N valamely kezdőszeletéből X-be képező függvény halmaza, és azt állítjuk, hogy egyértelműen létezik egy $g : N \to X$ függvény, amely „f-zárt”, azaz $g(n) = f\big(g|_{]\leftarrow,n[}\big)$ minden $n \in N$-re. (Itt $]\leftarrow, n[$ az $n \in N$-hez tartozó kezdőszelet.)

* **Bizonyítás.** Az egyértelműség bizonyítása $\mathbb{N}$ jólrendezettségén múlik. (Az ilyen bizonyításokat *transzfinit indukció*val történő bizonyításnak nevezzük.) Tegyük fel, hogy g és g^* is eleget tesz a tétel feltételeinek. Legyen $S = \big\{k \in \mathbb{N} : g(k) \neq g^*(k)\big\}$. Ha S nem üres, akkor létezik legkisebb eleme, legyen ez n. Mivel g és g^* megegyeznek az $]\leftarrow, n[$

intervallumon, azt kapjuk, hogy

$$g(n) = f\big(g|_{]\leftarrow,n[}\big) = f\big(g^*|_{]\leftarrow,n[}\big) = g^*(n),$$

ami ellentmond annak, hogy $n \in S$.

A g létezésének bizonyítása hasonlít a rekurziótétel megfelelő részének bizonyítására. Nevezzük $\mathbb{N} \times X$ egy A részhalmazát f-zártnak, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re és minden

$$h :]\leftarrow, n[\to X$$

függvényre, amelyre $h \subset A$, az is teljesül, hogy $\big(n, f(h)\big) \in A$. Maga $\mathbb{N} \times X$ egy f-zárt halmaz, ilyen halmaz tehát létezik. Legyen g az összes f-zárt halmaz metszete. Mivel nyilván g is f-zárt, csak azt kell megmutatnunk, hogy g az egész $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény. Más szóval, azt fogjuk bizonyítani, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $x \in X$, hogy $(k, x) \in g$, továbbá ha $(k, y) \in g$, akkor $x = y$. A bizonyítás megint indirekt, transzfinit indukcióval történik. Legyen S azon $\mathbb{N}$-beli k elemek halmaza, amelyekre ez nem igaz. Legyen n az S legkisebb eleme. Ekkor $g|_{]\leftarrow,n[}$ egy $]\leftarrow, n[$-en értelmezett függvény, és mivel a g halmaz f-zárt, ha $x = f\big(g|_{]\leftarrow,n[}\big)$, akkor $(n, x) \in g$. Mivel $n \in S$, ez csak úgy lehet, hogy van olyan $y \in X$, hogy $(n, y) \in g$ és $y \neq x$. Megmutatjuk, hogy $g \setminus \big\{(n, y)\big\}$ is f-zárt. Ez azt jelenti, hogy $m \in \mathbb{N}$ és $h :]\leftarrow, m[\to X$, $h \subset g \setminus \big\{(n, y)\big\}$ esetén $\big(m, f(h)\big) \in g \setminus \big\{(n, y)\big\}$. Ez nyilvánvaló akkor is, ha $m = n$, és akkor is, ha $m \neq n$. Viszont ez ellentmond annak, hogy g a legszűkebb f-zárt halmaz. $\square$

2.3.14. Példa: Fibonacci-számok. Példaként megmutatjuk, hogyan definiálhatók a Fibonacci-számok az előző tétel segítségével pontosan. Legyen $X = \mathbb{N}$. Először az $f(\emptyset) = 0$, $f\Big(\big\{(0, k)\big\}\Big) = 1$ bármely $k \in \mathbb{N}$-re definíciókkal előírjuk, hogy az előző tétel szerint adódó g-re $g(0) = 0$ és $g(1) = 1$ legyen. Most ha $n > 1$, $(h_0, h_1, \ldots, h_{n^-})$ egy véges sorozat, akkor legyen $f(h) = h_{n^-} + h_{n^{--}}$. (Megjegyezzük, hogy $n = \min\big(\mathbb{N} \setminus \operatorname{dmn}(h)\big)$.)

- $40/-7$:

  $<$

  Az $f(m, n)$ függvény „működése” a 2.6. ábrán tanulmányozható.

  $>$

  Az f függvény „működése” a 2.6. ábrán tanulmányozható.

- $45/3$:

  $<$

$k = 0, 1, \ldots, k-1$), ezeket n-edik *primitív egységgyök*öknek nevezzük. Az $\varepsilon_0 = 1$ nyil-

  $>$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$), ezeket n-edik *primitív egységgyök*öknek nevezzük. Az $\varepsilon_0 = 1$ nyil-

- 46/0 AZ ÁBRÁN :

  $<$

  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

  $>$

  z_0, z_1, z_2, z_3, z_4

- 47/12 :

$<$

tehát tetszőleges $p, q \in \mathbb{H}$-ra $p \times q = q \times p$, azaz a vektoriális szorzás nem kommutatív, hanem *antikommutatív*. A definícióból könnyen adódik, hogy teljesül a *Jacobi-identitás*:

$>$

tehát tetszőleges $p, q \in \mathbb{H}$-ra $p \times q = -q \times p$, azaz a vektoriális szorzás nem kommutatív, hanem *antikommutatív*. A definícióból könnyen adódik, hogy $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$, és teljesül a *Jacobi-identitás*:

- 48/9 2.3.12 ÉS 2.3.11 CSERÉJE :

$<$

2.3.12

$>$

2.3.11

- 50/-6 :

$<$

egyébként $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_{m-n}$, $q_{m-n} = f_m/g_n$ és $r(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1} x^{n-1}$.

$>$

egyébként $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_{m-n} x^{m-n}$, $q_{m-n} = f_m/g_n$ és $r(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1} x^{n-1}$.

- 52/13 :

$<$

Bizonyítás. A tétel később, a komplex függvénytanban bizonyítjuk. □

$>$

A tétel később, a komplex függvénytanban bizonyítjuk. □

- 53/8 :

$<$

a j-edik *Lagrange-interpolációs alappolinom* (erre $l_j(x_j) = 1$ és $l_j(x_i) = 0$, ha $i \neq j$) és

$>$

a j-edik *Lagrange-interpolációs alappolinom* $\big[$erre $l_j(x_j) = 1$ és $l_j(x_i) = 0$, ha $i \neq j\big]$ és

- 53/10 :

$<$

2.4.14. Többváltozós polinomok és racionális törtfüggvények. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_k$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ függvényt k-adik *koordináta-*

$>$

2.4.14. Többváltozós polinomok és racionális törtfüggvények. Legyen n pozitív természetes szám. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_k$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ függvényt k-adik *koordináta*

- 55/6 :

  $<$

  3.1.1. Környezetek. Legyen $x \subset \mathbb{K}$ és $r > 0$. Az x szám r sugarú $\mathbb{U}_r(x)$ *környezetén* a $\{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}$ halmazt érjük. Ha a sugár nem lényeges, akkor egyszerűen x egy környezetéről beszélünk.

  $>$

  3.1.1. Távolság, környezetek, korlátosság. Az $x, y \in \mathbb{K}$ *távolsága* $|x - y|$. Az $x \in \mathbb{K}$ szám $r > 0$ sugarú $\mathbb{U}_r(x)$ *környezetén* a $\{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}$ halmazt érjük. Ha a sugár nem lényeges, akkor egyszerűen x egy környezetéről beszélünk. Az $A \subset \mathbb{K}$ halmaz *korlátos*, ha van a nullának olyan környezete, amelyben benne van, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy $|x| < K$ minden $x \in A$-ra.

- 56/12 :

  $<$

  nem zárt, korlátos; $\mathbb{R}$ nyílt, zárt, nem korlátos. Ha $\mathbb{C}$ részhalmazának tekintjük ezeket

  $>$

  zárt, korlátos; $\mathbb{R}$ nyílt, zárt, nem korlátos. Ha $\mathbb{C}$ részhalmazának tekintjük ezeket

- 59/14 :

  $<$

  Bizonyítás. Legyen $S = \big\{y \in [a, b] : f(y) \le c\big\}$ és $x = \sup S$. Ha $f(x) > c$

  $>$

  Bizonyítás. Elég az első esetet bizonyítani. Legyen $S = \big\{y \in [a, b] : f(y) \le c\big\}$ és $x = \sup S$. Ha $f(x) > c$

- 62/−7 :

  $<$

  $$1/+\infty = 0 = 1/-\infty.$$

  Más esetekben az összeadást és a szorzást nem definiáljuk.

  $>$

  $$x/+\infty = 0 = x/-\infty, \quad \text{ha} \quad x \in \,]-\infty, +\infty[.$$

  Más esetekben az eredményt nem definiáljuk.

- 62/−2 :

  $<$

  $$1/\infty = 0, \qquad 1/0 = \infty.$$

  $>$

  $$x/\infty = 0, \qquad x/0 = \infty, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{C}.$$

- 63/5 :

$<$

(3) $\lim_{x\to a}(1/f)(x) = 1/b$.

$>$

(3) $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = b/c$.

- 63/15 :

$<$

veleteket: $A+B$, AB és $1/A$ pontosan akkor és úgy van definiálva, hogy a fenti tétel igaz

$>$

veleteket: $A+B$, AB és A/B pontosan akkor és úgy van definiálva, hogy a fenti tétel igaz

- 63/18 :

$<$

$0 \cdot (+\infty)$-t nem definiáltuk.

$>$

$0 \cdot (+\infty)$-t nem definiáltuk.

3.1.36.5 Feladat [6]. Adjunk hasonló példát a többi nem definiált esethez is.

- 65/10 :

$<$

sorozatot *korlátos*nak nevezünk, ha értékkészlete korlátos. Konvergens sorozat nyilván

$>$

sorozatot *korlátos*nak nevezünk, ha értékkészlete korlátos. Konvergens $\mathbb{K}$-beli sorozat nyilván

- 65/−12 :

$<$

(3) $(1/a_n) \to (1/A)$. $\square$

$>$

(3) $(a_n/b_n) \to (A/B)$. $\square$

- 66/9 :

$<$

sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, teljesül hogy $\lim n \to \infty f(x_n) = b$.

$>$

sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, teljesül hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

- 74/4 :

<

Innen következik az állítás. □

>

Innen következik az állítás, sőt látjuk, hogy ha $0 < \tau < 1$, akkor minden $t \geq \tau$-ra ugyanaz az N megfelel. □

- $74/-4$:

<

$$A = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{a_k}{q^k} + \frac{a_m - 1}{q^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k},$$

>

$$A = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{a_k}{q^k} + \frac{a_m - 1}{q^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k}, \tag{3}$$

- 77/-1 :

<

azaz) fg is analitikus c-ben.

>

azaz) fg is analitikus c-ben.

3.3.5.5 Példa. Az $x \mapsto 1/x$ függvény analitikus minden $0 \neq a \in \mathbb{C}$ pontban. A geometriai sor összegét fogjuk felhasználni.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a-(a-x)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-(x-a)/-a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^n (x-a)^n.$$

- $78/-9$:

<

$$a_0 = a_0^2, \quad 2a_1 = 2a_0 a_1, \quad 4a_2 = 2a_0 a_2 + a_1^2,$$
$$8a_3 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2, \; \ldots, \; 2^k a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \; \ldots$$

>

$$a_0 = a_0^2, \quad 2a_1 = 2a_0 a_1, \quad 4a_2 = 2a_0 a_2 + a_1^2,$$
$$8a_3 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2, \; \ldots, \; 2^n a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \; \ldots$$

- 78/−2 :

<
3.3.8. Az exponenciális függvény. Az *exponenciális függvény*t
>
3.3.8. Az exponenciális függvény. Az *exponenciális függvény*t az

- 79/12 :

<
3.3.9. Az e szám. Az $e := \exp(1)$ számra nyilván

$$2 < e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 3.$$

>
3.3.9. Az e szám. Az $e := \exp(1)$ számra $s_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ jelöléssel nyilván

$$s_n < e < s_n + \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\Big) = s_n + \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)},$$

ahonnan $n = 35$ választással $e = 2{,}71828182845904523536028747235266249775 72\ldots$.

- 83/−3 :

<
(3) $\mathrm{ch}(z + 2\pi i) = \mathrm{ch}(z)$, $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z)$. $\square$
>
(3) $\mathrm{ch}(z + 2\pi i) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{sh}(z + 2\pi i) = \mathrm{sh}(z)$. $\square$

- 87/5 :

<
odik deriváltfüggvénye. (A d^2f/dx^2 jelölés is használatos.) Indukcióval folytatva, az
>
odik deriváltfüggvénye. (A d^2f/dx^2 jelölés is használatos.) Rekurzióval folytatva, az

- 87/10 :

<
álható 0-ban. Olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is létezik, amely sehol sem differenciálható, de
>
álható 0-ban (bár a jobb és bal oldali deriváltja létezik). Olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is létezik, amely sehol sem differenciálható, de

- 87/10 :

<
álható 0-ban. Olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is létezik, amely sehol sem differenciálható, de
>
álható 0-ban (bár a bal és jobb oldali deriváltak léteznek, de nem egyeznek meg). Olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is létezik, amely sehol sem differenciálható, de

- 87/−7 :

$<$

4.1.5. Példák. A definíció alapján konstans függvény deriválható és a deriváltja nulla. Az $f(x) = x$, $x \in \mathbb{K}$ függvény a definíció alapján deriválható, és deriváltja 1. Innen az $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{Z}$ függvény minden pontban, ahol értelmezve van, differenciálható és a deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$; ez $n \in \mathbb{N}$ esetén a szorzat differenciálási

$>$

4.1.5. Példák. A definíció alapján egy c konstans függvény deriválható és a deriváltja nulla, valamint $(cf)' = cf'$. Az $f(x) = x - c$, $x \in \mathbb{K}$ függvény a definíció alapján deriválható, és deriváltja 1. Innen az $f(x) = (x-c)^n$, $x \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{Z}$ függvény minden pontban, ahol értelmezve van, differenciálható és a deriváltja $f'(x) = n(x-c)^{n-1}$; ez $n \in \mathbb{N}$ esetén a szorzat differenciálási

- 88/1 :

$<$

A szorzat differenciálási szabályából az is következik, hogy ha f egy polinom, $n \in \mathbb{N}^+$ és $c \in \mathbb{K}$ az f egy n-szeres gyöke, akkor c az f'-nek $(n-1)$-szeres gyöke: Ha $f(x) = (x-c)^n g(x)$, akkor $f'(x) = (x-c)^{n-1}\big((x-c)g'(x) + ng(x)\big)$. Mivel a zárójelben álló kifejezés értéke a c helyen $ng(c)$, ami nem nulla, c pontosan $(n-1)$-szeres gyöke f'-nek.

$>$

A szorzat differenciálási szabályából az is következik, hogy ha f egy polinom, $n \in \mathbb{N}^+$ és $c \in \mathbb{K}$ az f egy n-szeres gyöke, akkor c az f'-nek $(n-1)$-szeres gyöke: Ha $f(x) = (x-c)^n g(x)$, akkor $f'(x) = (x-c)^{n-1}\big((x-c)g'(x) + ng(x)\big)$. Mivel a zárójelben álló kifejezés értéke a c helyen $ng(c)$, ami nem nulla, c pontosan $(n-1)$-szeres gyöke f'-nek.

- 89/18 :

$<$

hatványsort, a *Taylor-sort* (ha $c = 0$, akkor a sor *MacLaurin-sornak* szokás nevezni). Az

$>$

hatványsort, a *Taylor-sort* (ha $c = 0$, akkor a sort *MacLaurin-sornak* szokás nevezni). Az

- 92/16 :

$<$

4.2.3. Cauchy középérték-tétele. *Ha* $-\infty < a < b < \infty$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *az* $[a,b]$*-n folytonos függvények, amelyek* $]a,b[$*-n differenciálhatóak, akkor van olyan* $\xi \in\,]a,b[$*, amelyre*

$>$

4.2.3. Cauchy középérték-tétele. *Ha* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *az* $[a,b]$*-n folytonos függvények, amelyek* $]a,b[$*-n differenciálhatóak, akkor van olyan* $\xi \in\,]a,b[$*, amelyre*

- $92/{-3}$:

$<$

Tétel. *Ha $-\infty \le a < b \le \infty$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor*

(1) *f akkor és csak akkor monoton növekedő, ha $f'(x) \ge 0$ minden $x \in]a,b[$-re;*

(2) *f akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \ge 0$ minden $x \in]a,b[$-re;*

(3) *f akkor és csak akkor konstans, ha $f'(x) = 0$ minden $x \in]a,b[$-re.*

$>$

Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az I belső pontjaiban és folytonos az esetleges határpontokban, akkor*

(1) *f akkor és csak akkor monoton növekedő, ha $f'(x) \ge 0$ az I minden belső pontjában;*

(2) *f akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \le 0$ az I minden belső pontjában;*

(3) *f akkor és csak akkor konstans, ha $f'(x) = 0$ az I minden belső pontjában.*

- $93/2$:

$<$

$a < x_1 < x_2 < b$ párhoz van olyan $x_1 < x < x_2$, amelyre $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) \ge 0$, kapjuk a monoton növekedést.

$>$

I-beli $a < b$ párhoz van olyan $a < x < b$, amelyre $f(b) - f(a) = f'(x)(b-a) \ge 0$, kapjuk a monoton növekedést.

- $93/7$:

$<$

$f'(x) > 0$ minden $x \in]a,b[$-re, akkor f szigorúan monoton növekedő, ha pedig $f'(x) < 0$ minden $x \in]a,b[$-re, akkor f szigorúan monoton csökkenő. Itt azonban nem igaz a megfordítás, mint az $x \mapsto x^3$ függvény példája mutatja.

$>$

$f'(x) > 0$ minden x belső pontjára I-nek, akkor f szigorúan monoton növekedő, ha pedig $f'(x) < 0$ minden x belső pontjára I-nek, akkor f szigorúan monoton csökkenő. Itt azonban nem igaz a megfordítás, mint az $x \mapsto x^3$ függvény példája mutatja. A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad, amely erre a függvényre is alkalmazható.

Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az intervallum belső pontjaiban és folytonos az esetleges végpontokban, akkor*

(1) *f akkor és csak akkor szigorúan monoton növekedő, ha $f'(x) \ge 0$ az I minden belső pontjában és nincs olyan nem üres nyílt részintervalluma I-nek, amelyen f' azonosan nulla;*

(2) *f akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \le 0$ az I minden belső pontjában és nincs olyan nem üres nyílt részintervalluma I-nek, amelyen f' azonosan nulla.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy f akkor és csak akkor szigorúan monoton, ha monoton és nincs olyan nem üres, nyílt részintervallum, amelyen konstans, így a tétel következik az előző tételből. $\square$

- 95/9 :

$<$

$f, g :]a, [\to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a, b[$, és hogy

$>$

$f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a, b[$, és hogy

- 95/−13 :

$<$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{1}$$

$>$

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{1}$$

- 96/−17 :

$<$

Konvex és konkáv függvények, inflexiós hely. Ha $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvényt *konvex*nek nevezzük, ha $a < x < y < b$, $0 < \lambda < 1$ esetén

$>$

Konvex és konkáv függvények, inflexiós hely. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt *konvex*nek nevezzük, ha I-beli $x < y$ és $0 < \lambda < 1$ esetén

- 96/−12 :

$<$

Ha az f függvény az $a < x < b$ pontban differenciálható és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$>$

Ha az f függvény az I egy x belső pontjában differenciálható és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

- 96/−8 :

$<$

* **4.2.15. Segédtétel.** *Ha* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, *az* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor konvex, ha bármely* $a < x < t < y < b$ *esetén*

$>$

* **4.2.15. Segédtétel.** *Ha* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallum, az* $f : I \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor konvex, ha bármely* I*-beli* $x < t < y$ *esetén*

- 97/6 :

$<$

4.2.16. Tétel. *Ha* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, *az* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény*

$>$

4.2.16. Tétel. *Ha* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallum, az* $f : I \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény*

- 97/10 :

$<$

* **Bizonyítás.** Ha f konvex, és $a < x < t < r < y < b$, akkor kétszer alkalmazva az

$>$

* **Bizonyítás.** Ha f konvex, és $x < t < r < y$ az I-ben van, akkor kétszer alkalmazva az

- 97/16 :

$<$

A többi eset bizonyítása hasonló, de a szigorú eseteknél többször kell alkalmazni az előző lemmát. □

4.2.17. Következmény. *Ha $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, illetve konkáv, ha $f'' \geq 0$, illetve $f'' \leq 0$.* □

4.2.18. Következmény. *Ha $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, és az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre $f'' > 0$, illetve $f'' < 0$, akkor f szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv.* □

4.2.19. Következmény. *Ha $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek pontosan akkor van $f'' > 0$, illetve $f'' < 0$, akkor f szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv.* □

$>$

A többi eset bizonyítása hasonló, de a szigorú eseteknél háromszor kell alkalmazni az előző lemmát. □

- 99/−6 :

$<$

4.2.25. Aszimptóták. Szemléletesen, ezek olyan $ax + by = c$, $ab \neq 0$ egyenletű

$>$

4.2.25. Aszimptóták. Szemléletesen, ezek olyan $ax + by = c$, $|a| + |b| \neq 0$ egyenletű

- 101/3 :

$<$

az $f \in \mathbb{K}_2 \to \mathbb{K}_3$ függvénynek pedig létezik primitív függvénye, $\mathrm{rng}(g) \subset \mathrm{dmn}(f)$ *és*

$>$

az $f \in \mathbb{K}_2 \to \mathbb{K}_3$ függvénynek pedig létezik primitív függvénye, $\mathrm{rng}(g) \subset \mathrm{dmn}(f)$,

- 103/−6 :

$<$

$$\mathrm{th}\, x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

ha $x \in \,]-1,1[$ összefüggés. Egyébként $\ln(1+x)$ hatványsorából Abel tételét felhasználva

$>$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

ha $x \in \,]-1,1[$ összefüggés. Például $x = 1/3$ választással, 42-ig összegezve, és az elhagyott tagok összegét mértani sorral becsülve,

$$\ln 2 = 0{,}6931471805599453094172321214581765680755\ldots.$$

Egyébként $\ln(1+x)$ hatványsorából Abel tételét felhasználva

- 104/3 :

$<$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ha $x \in \,]-1,1[$.

$>$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

ha $x \in \,]-1,1[$.

5.1.12.5. A π kiszámítása. Ha $\operatorname{tg} z_1$, $\operatorname{tg} z_2$, $\operatorname{tg}(z_1+z_2)$ értelmezve vannak, akkor

$$\operatorname{tg}(z_1+z_2) = \frac{\sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)}{\cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)} = \frac{\operatorname{tg}(z_1) + \operatorname{tg}(z_2)}{1 - \operatorname{tg}(z_1)\operatorname{tg}(z_2)},$$

ez a tg függvény *addíciós képlete*. Innen $\operatorname{tg}\big(2\operatorname{arctg}(1/5)\big) = (2/5)/(1-1/25) = 5/12$ és $\operatorname{tg}\big(4\operatorname{arctg}(1/5)\big) = (10/12)/(1-25/144) = 120/119$. Ugyanígy

$$\operatorname{tg}\big(4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1)\big) = (120/119-1)/(1+120/119) = 1/239,$$

vagyis $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$. Az $x = 1/5$ esetben arctg sorát $n =$ 27-ig, az $x = 1/239$ esetben $n = 7$-ig összeadva, mindkét esetben a hibát az első elhagyott taggal becsülve, azt kapjuk, hogy $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288841971\ldots.$

- 104/13 :

$<$

$$\frac{(1+x)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}{(1+z)^{2\alpha}},$$

$>$

$$\frac{(1+x)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}{(1+x)^{2\alpha}},$$

- 107/3 :

<

tegrálhatók, ahol u elsőfokú főpolinom vagy valós gyök nélküli másodfokú főpolinom és

>

tegrálhatók, ahol v elsőfokú főpolinom vagy valós gyök nélküli másodfokú főpolinom és

- 108/−8 :

<

ahonnan $x = (t^2 - \gamma)/(\beta - 2\sqrt{\alpha}t)$. Ha $c > 0$, akkor a $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt + \sqrt{\gamma}$

>

ahonnan $x = (t^2 - \gamma)/(\beta - 2\sqrt{\alpha}t)$. Ha $\gamma > 0$, akkor a $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt + \sqrt{\gamma}$

- 111/9 :

<

Bizonyítás. Az előző segédtétel szerint, ha adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, hogy bármely két δ-finom P_1 és P_2 felosztásra $\bigl|s(f, P_1) - s(f, P_2)\bigr| \le \varepsilon$, akkor ugyanez $[a, c]$ és $[c, b]$ δ-finom pontozott felosztásaira is teljesül. Innen f integrálható $[a, c]$-n és $[c, b]$-n is. Legyen P' egy δ-finom pontozott felosztása $[a, c]$-nek, P'' pedig $[c, b]$-nek. Ekkor $P = P' \cup P''$ egy δ-finom pontozott felosztása $[a, b]$-nek, és $s(f, P) = s(f, P') + s(f, P'')$, továbbá mivel az integrálközelítő összeg tetszőlegesen közel lehet az integrálhoz, $\bigl|s(f, P) - \int_a^b f\bigr| \le \varepsilon$, $\bigl|s(f, P') - \int_a^c f\bigr| \le \varepsilon$ és $\bigl|s(f, P'') - \int_c^b f\bigr| \le \varepsilon$. Innen

>

Bizonyítás. Az előző segédtétel szerint, ha adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, hogy bármely két δ-finom P_1 és P_2 felosztásra $\bigl|s(f, P_1) - s(f, P_2)\bigr| \le \varepsilon$, akkor ugyanez $[a, c]$ és $[c, b]$ δ-finom pontozott felosztásaira is teljesül. Innen f integrálható $[a, c]$-n és $[c, b]$-n is. Legyen P' egy δ-finom pontozott felosztása $[a, c]$-nek, P'' pedig $[c, b]$-nek. Ekkor $P = P' \cup P''$ egy δ-finom pontozott felosztása $[a, b]$-nek, és $s(f, P) = s(f, P') + s(f, P'')$, továbbá mivel az integrálközelítő összeg tetszőlegesen közel lehet az integrálhoz, $\bigl|s(f, P) - \int_a^b f\bigr| \le \varepsilon$, $\bigl|s(f, P') - \int_a^c f\bigr| \le \varepsilon$ és $\bigl|s(f, P'') - \int_c^b f\bigr| \le \varepsilon$. Innen

- 111/−5 :

<

Ha $-\infty < u < v < +\infty$ és az $f : [u, v] \to \mathbb{K}$ függvény Riemann-integrálható, akkor esetszétválasztással azonnal adódik, hogy $a, b, c \in [u, v]$ esetén $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

>

Ha $-\infty < u < v < +\infty$ és az $f : [u, v] \to \mathbb{K}$ függvény integrálható, akkor esetszétválasztással azonnal adódik, hogy $a, b, c \in [u, v]$ esetén $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. Az is teljesül, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$-re az $\int_a^b f(x)\,dx$ és $\int_{a+c}^{b+c} f(x + c)\,dx$, illetve az $\int_a^b cf(cx)\,dx$ és $\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$ integrálok egyszerre léteznek és egyenlőek, mert az integrálközelítő összegek egyenlőek.

- 114/15 :

<

$$\begin{aligned}\left|f(y)-f(x)-(y-x)f'(t)\right| &\leq \left|f(y)-f(t)-(y-t)f'(t)\right| + \left|f(t)-f(x)-(t-x)f'(t)\right| \\ &\leq \eta(y-t)+\eta(t-x)=\eta(y-x).\end{aligned}$$

>

$$\begin{aligned}\left|f(y)-f(x)-(y-x)f'(t)\right| &\leq \left|f(y)-f(t)-(y-t)f'(t)\right| + \left|f(t)-f(x)-(t-x)f'(t)\right| \\ &\leq \varepsilon(y-t)+\varepsilon(t-x)=\varepsilon(y-x).\end{aligned}$$

- 117/−4 :

<

f/g is abszolút integrálható.

>

f/g is abszolút integrálható. A következő tétel is bizonyítható a Lebesgue-integrál elméletében, lásd például a [35] könyvben.

5.2.28.3. Tétel. *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ abszolút integrálható, F az f integrálfüggvénye. Ekkor F majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja majdnem mindenütt megegyezik f-fel.* □

5.2.28.7. Tétel: parciális integrálás integrálfüggvényekre. *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{K}$ abszolút integrálhatóak, F és G az integrálfüggvényük. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és*

$$\int_a^b fG + \int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Bizonyítás. Az abszolút integrálható függvényekről eddig mondottak alapján el tudjuk végezni a bizonyítást. Mivel fG és Fg is abszolút integrálhatóak, az integrálfüggvényük differenciálható majdnem mindenütt. De FG is majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja majdnem mindenütt $fG + Fg$, így FG az fG és a Fg integrálfüggvényének összege. Így az előző tételből következik az állítás. □

- 121/−1 :

<

gével az összefüggés könnyen következik.

>

gével az összefüggés könnyen következik.

5.3.4.5 Példa. Kiszámítjuk az $R > 0$ sugarú gömb térfogatát. Mivel $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, a térfogat

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

- 122/12 :

  <

az összefüggés könnyen következik.

  >

gével az összefüggés könnyen következik.

5.3.5.5 Példa. Kiszámítjuk az $R > 0$ sugarú gömb felszínét. Mivel $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ deriváltja $-x/\sqrt{R^2 - x^2}$, a felszín

$$2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + x^2/(R^2 - x^2)}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 4R^2\pi.$$

- 124/−11 :

  <

$$x_{n+1} = x_n - t_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakban keressük a következő közelítést, ahol t_n pozitív valós szám. Eljárhatunk úgy, hogy először $t_n = 1$-gyel próbálkozunk; ha az így kapott x_{n+1}-re $\left|f(x_{n+1})\right| < \left|f(x_n)\right|$, akkor ezt választjuk következő közelítésnek, egyébként t_n-et csökkentjük. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n) = 0$.

  >

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakban keressük a következő közelítést, ahol az $0 < \alpha_n \le 1$ *relaxációs paraméter*t úgy választjuk, hogy $\left|f(x_{n+1})\right| < \left|f(x_n)\right|$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha $f(x_n) \ne 0$ és $f'(x_n) \ne 0$: Nézzük meg, milyen irányú h-t kell választanunk, hogy az abszolút érték a lehető legjobban csökkenjen. A h adott (kis) hossza mellett $f(x) + f'(x)h$ abszolút értéke akkor lesz a legkisebb, ha egyenesen a nulla felé mozdulunk el, tehát ha $f'(x)h$ az $f(x)$ ellentettjének egy pozitív konstansszorosa, vagyis ha h az $f(x)/f'(x)$ ellentettjének egy pozitív konstansszorosa. Mivel $f(x + h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$, azt kapjuk, hogy elég kis $|h|$ esetén

$$\left|f(x+h)\right| - \left|f(x)\right| \le -\left|hf'(x)\right| + \left|r(h)\right|.$$

Az $x = x_n$, $\Delta x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$, $h = \alpha\Delta x_n$ jelöléssel

$$\frac{\left|f(x_n + \alpha\Delta x_n)\right| - \left|f(x_n)\right|}{\alpha\left|f(x_n)\right|} \le -1 + \frac{\left|r(\alpha\Delta x_n)\right|}{\alpha\left|f(x_n)\right|} \to -1,$$

ha $\alpha \to 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1 - \sigma$ valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \le \sigma \le 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük α_n-et, rendszerint szorozzuk ϱ-val, ahol $0 < \varrho < 1$, általában $0{,}3 \le \varrho \le 0{,}8$.

- 126/−8 :

$<$

függvényeket is *elsőfajú Bessel-függvény*eknek hívjuk.

$>$

függvényeket is *elsőfajú Bessel-függvény*eknek hívjuk.

* **5.3.13.5. Generátorfüggvények.** Sokszor célszerű egy számsorozatot egy analitikus függvénybe, úgynevezett *generátorfüggvény*be összefogni. A $g_0, g_1, g_2, \dots$ komplex számsorozat *generátorfüggvény*én a

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük, ha a hatványsor konvergens a nulla egy környezetében. Ha az $f_0, f_1, f_2, \dots$ sorozat generátorfüggvénye F, akkor a hatványsorok ismert tulajdonságaiból adódnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
\alpha F(z) + \beta G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) z^n; \\
z^m G(z) &= \sum_{n \geq m} g_{n-m} z^n; \\
\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} &= \sum_{n=0} g_{n+m} z^n; \\
G(cz) &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n g_n z^n; \\
G'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} z^n; \\
F(z)G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \Big) z^n.
\end{aligned}$$

A fenti összefüggések kombinálásával könnyen kaphatunk újabb összefüggéseket, például

$$zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n z^n, \quad z^2 G''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) g_n z^n,$$

és így

$$z^2 G''(z) + zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 g_n z^n,$$

vagy hogy ha F a G azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$, akkor

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{n-1}}{n} z^n.$$

A fenti összefüggések generátorfüggvények lineáris kombinálására, szorzására, differenciálására és integrálására, új változó bevezetésére és a sorozat eltolására vonatkoznak. Ha ismert hatványsorokat is felhasználunk (Newton binomiális sora, az exponenciális függvény sora, $1/(1-z)$ sora, stb.) újabb összefüggéseket kaphatunk, például

$$\frac{G(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{0\le k\le n} g_k\Big) z^n.$$

Mindezek nagyon hasznosak például a valószínűségszámításban, mi is fel fogjuk használni őket.

Néhány trükk az alkalmazásokhoz: Ha g_n legfeljebb d-ed fokú polinomja n-nek, akkor $G(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nevezője $(1-z)^{d+1}$. Ha ez az $n \bmod m$ maradéktól függően más-más polinommal teljesül, akkor véges sok $(1-z^j)^{d_j}$ alakú tényező szorzata a nevező. Ha g_n rekurzív, $g_n = c_1 g_{n-1} + c_2 g_{n-2} + \cdots + c_d g_{n-d}$, ha $n \ge d$, akkor G racionális törtfüggvény, amelynek nevezője d-ed fokú polinom. Ha a c_j együtthatók nem konstansok, hanem polinomjai n-nek, akkor G egy polinomegyütthatós lineáris differenciálegyenletnek tesz eleget. Például az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n > 1$ Fibonacci-számokra

$$\begin{aligned} F(z) &= f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + f_4 z^4 + \dots, \\ zF(z) &= f_0 z + f_1 z^2 + f_2 z^3 + f_3 z^4 + \dots, \\ z^2 F(z) &= f_0 z^2 + f_1 z^3 + f_2 z^4 + \dots, \end{aligned}$$

amiből kivonással $(1-z-z^2)F(z) = z$. Ebből parciális törtekre bontással

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1-\phi_1 z} - \frac{1}{1-\phi_2 z}\Big),$$

ahol $\phi_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $\phi_2 = 1-\phi_1 = (1-\sqrt{5})/2$. Innen

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n) z^n,$$

azaz $f_n = (\phi_1^n - \phi_2^n)/\sqrt{5}$. A levezetés nem precíz, mert a hatványsorok konvergenciáját nem vizsgáltuk, de pontossá tehető.

Néha más módon rendelünk egy sorozathoz egy függvényt. Például ha g_n valamely permutációk száma, vagy egyszerűen csak a generátorfüggvényt definiáló hatványsor nem konvergál a nulla egy környezetében, akkor használhatjuk a $g_n/n!$ sorozat generátorfüggvényét, ez a g_n sorozat *exponenciális generátorfüggvénye*. A számelméletben gyakran használják a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^z}$$

Dirichlet-féle generátorfüggvényt; az $1, 1, 1, \dots$ sorozathoz tartozó Dirichlet-féle generátorfüggvény a nevezetes ζ *függvény*.

- 128/−11 :

  $<$

így a sor konvergens.

  $>$

így a sor konvergens, sőt, ha α komplex, $\Re(\alpha) > 1$, akkor is abszolút konvergens.

- 129/6 :

  $<$

  Jelölés. Bár a kódoláselméletben véges testek is szerepet játszanak, szá-

  $>$

  Jelölés. Bár a kódoláselméletben véges testek is szerepet játszanak, és a lineáris algebrát akár ferdetestekre is lehetne tárgyalni, szá-

- 136/13 :

  $<$

  Gauss–Jordan-kiküszöbölés esetén a k-adik lépésben összesen $n-1$ osztásra és $(n-k+m)(n-1)$ szorzásra és kivonásra van szükség. Az x_k meghatározásához viszont minden

  $>$

  Gauss–Jordan-kiküszöbölés esetén a k-adik lépésben összesen $n-1$ osztásra és $(n-k+m)(n-1)$ szorzásra és kivonásra van szükség. Az x_k meghatározásához viszont minden

- 144/−10 :

  $<$

dimenziós, és dimenziója a tényezők dimenzióinak összege. $\square$

  $>$

dimenziós, és dimenziója a tagok dimenzióinak összege. $\square$

- 150/19 :

  $<$

*áris transzformáció*knak nevezzük. Ha egy lineáris transzformáció U-t U-ra képezi le kölcsönösen egyértelműen, akkor *reguláris*nak nevezzük, egyébként *szinguláris*nak.

  $>$

*áris transzformáció*knak nevezzük.

- 161/−15 :

  $<$

Mivel a jobb oldalon szereplő x lineáris kombinációra $S(x,x) \geq 0$, ugyanez teljesül a jobb

  $>$

Mivel a bal oldalon szereplő x lineáris kombinációra $S(x,x) \geq 0$, ugyanez teljesül a jobb

- 163/6 :

$<$

Egy $B : V \times V \to \mathbb{C}$ konjugált bilineáris formát *Hermite-szimmetrikus*nak, illetve *Hermite-antiszimmetrikus*nak nevezünk, ha $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$, illetve $B(x,y) = -\overline{B(y,x)}$ minden $x, y \in V$-re. Nyilván B pontosan akkor Hermite-szimmetrikus, ha iB Hermite-antiszimmetrikus. Tetszőleges B konjugált bilineáris forma egyértelműen írható fel $B = S+A$ alakban, ahol S Hermite-szimmetrikus, A pedig Hermite-antiszimmetrikus, ugyanis

$>$

Egy $B : V \times V \to \mathbb{C}$ konjugált bilineáris formát *Hermite-szimmetrikus*nak, illetve *Hermite-antiszimmetrikus*nak nevezünk, ha $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$, illetve $B(x,y) = -\overline{B(y,x)}$ minden $x, y \in V$-re. Nyilván B pontosan akkor Hermite-szimmetrikus, ha iB Hermite-antiszimmetrikus. Tetszőleges B konjugált bilineáris forma egyértelműen írható fel $B = S + A$ alakban, ahol S Hermite-szimmetrikus, A pedig Hermite-antiszimmetrikus, ugyanis

- 182/-4 :

$<$

pedig normatartó lineáris bijekció.

$>$

pedig normatartó lineáris bijekció.

A normált terek normált térbe való leképezéseit általában *operátor*nak, skalár értékű leképezéseit pedig *funkcionál*nak nevezzük.

- 183/-13 :

$<$

*zat*ának vagy *skaláris szorzat*ának jelölésére az (x,y), $(x|y)$, $\langle x|y\rangle$, $x \cdot y$, xy és $x \bullet y$ jelölések is szokásosak.

$>$

*zat*ának vagy *skaláris szorzat*ának jelölésére az (x,y), $(x|y)$, $x \cdot y$, xy és $x \bullet y$ jelölések is szokásosak.

- 183/-5 :

$<$

ki. Megjegyezzük, hogy a fizikában a második változóban való linearitást szokás feltenni, ekkor az első változóból emelhető ki a skalár konjugáltja. (2)-ből $\langle 0, x\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle$

$>$

ki. Megjegyezzük, hogy a fizikában a $\langle y|x\rangle = \langle x, y\rangle$ belső szorzatot használják, ez a második változóban lineáris és az első változóból emelhető ki a skalár konjugáltja. (2)-ből $\langle 0, x\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle$ minden

- 185/-10 :

$<$

6.3.10. Általánosított Pythagoras-tétel. *Ha az X belső szorzat tér*

$>$

6.3.10. Általánosított Pitagorasz-tétel. *Ha az X belső szorzat tér*

- 193/12 :

$<$

olyan $Q : X \to Y$ lineáris izometria és $P : X \to X$ pozitív definit transzformáció, hogy $A = QP$, ha pedig $\dim(X) \geq \dim(Y)$, akkor létezik olyan $Q : Y \to X$ lineáris izometria és $P : Y \to Y$ pozitív definit transzformáció, hogy $A = PQ^*$.

$>$

olyan $Q : X \to Y$ lineáris izometria és $P : X \to X$ pozitív szemidefinit transzformáció, hogy $A = QP$, ha pedig $\dim(X) \geq \dim(Y)$, akkor létezik olyan $Q : Y \to X$ lineáris izometria és $P : Y \to Y$ pozitív szemidefinit transzformáció, hogy $A = PQ^*$.

- 193/−15 :

$<$

a mátrix felírható $a = \tilde{q}s\overline{q}'$ alakban, ahol s egy $m \times n$-as diagonális mátrix a főátlójában álló

$>$

a mátrix felírható $a = \tilde{q}s\overline{q}'$ alakban, ahol s egy $m \times n$-es diagonális mátrix a főátlójában álló

- 199/11 :

$<$

7.1.12. Konvex halmaz. Egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér egy D részhalmazát *konvex halmaz*nak nevezzük, ha $x, y \in K$ esetén az x és y pontot összekötő szakasz $\lambda x + (1-\lambda)y$, $0 < \lambda < 1$ pontjai is benne vannak a halmazban. Például a gömbök konvex halmazok:

$>$

7.1.12. Konvex halmaz, konvex és konkáv függvény. Egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér egy K részhalmazát *konvex halmaz*nak nevezzük, ha $x, y \in K$ esetén az x és y pontot összekötő szakasz $\alpha x + (1-\alpha)y$, $0 < \alpha < 1$ pontjai is benne vannak a halmazban. Egy valós értékű függvényt *konvex függvény*nek nevezünk, ha egy K konvex halmazon van értelmezve és $x, y \in K$, $0 < \alpha < 1$ esetén

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y);$$

ha az egyenlőtlenség mindig szigorú, akkor *szigorúan konvex függvény*ről beszélünk, ellenkező irányú egyenlőtlenség esetén pedig *konkáv függvény*ről illetve *szigorúan konkáv függvény*ről. Egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben *konvex kombináció*n olyan affin kombinációt értünk, amelyben az együtthatók nemnegatívok. A tagszám szerinti indukcióval adódik, hogy egy K konvex halmazra, illetve egy rajta értelmezett konvex függvényre ha $x_1, \ldots, x_n \in K$, akkor $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in K$ és

$$f\big(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n\big) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

minden konvex kombinációra. Az $n = 2$ esetben visszakapjuk a konvexség definícióját.

Például a gömbök konvex halmazok:

- 202/18 :

$<$

következik az előző tételből, mert a valamely U környezetében $\big|h(x)-h(a)\big| < 1$, ahonnan

$>$

következik az előző segédtételből, mert a valamely U környezetében $\big|h(x) - h(a)\big| < 1$, ahonnan

- 221/19 :

$<$

míg $f'(x)$ az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)$ tér egy eleme, $f''(x)$ már az $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)\big)$ tér eleme, stb., és ennek megfelelően nő a parciális deriváltak száma is.

$>$

míg $f'(x)$ az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)$ tér egy eleme, $f''(x)$ már az $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)\big)$ tér eleme, stb.

- 221/−2 :

$<$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\partial_{h_m}\partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x+th_m) - \partial_{h_m}\partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x)}{t}$$

$>$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x+th_m) - \partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x)}{t}$$

- 228/−14 :

$<$

és folytonos az x egy környezetében, $f^{(k)}(x) = 0$, ha $1 \le k < m$. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$

$>$

és folytonos az x egy környezetében, $f^{(k)}(x) = 0$, ha $1 \le k < m$ és $f^{(m)}(x) \neq 0$. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$

- 229/−2 :

$<$

* **7.2.39. Lagrange-elv: feltételes szélsőérték keresése, egyenlőtlenségeket is tartalmazó feltételrendszer.** *Legyen G nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, $f_i : G \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1 \dots, m$ folytonosan differenciálhatóak, $m < n$. Ha f_0-nak a $c \in G$ pontban szélsőértéke (azaz minimuma vagy maximuma) van a*

$$f_i(c) \le 0, \quad \text{ha} \quad 1 \le i \le k, \quad f_i(c) = 0, \quad \text{ha} \quad k < i \le m$$

feltételek mellett, akkor léteznek olyan $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le m$ nem mind nulla Lagrange-multiplikátorok, hogy $\lambda_i \ge 0$, ha $0 \le i \le k$, $\lambda_i f_i(c) = 0$, ha $1 \le i \le k$ és

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(c) = 0.$$

Az $F(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ jelöléssel az utolsó feltétel $F_x(c,\lambda) = 0$ alakban írható.

A tételt és bizonyítását Páles [47] jegyzetéből vettük át. A bizonyítás nem használja az implicit függvény tételt. Ezt a tételt is gyakran alkalmazzuk lokálisan.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és hogy $>$

* **7.2.38.5. Lagrange-szorzók.** Az

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min, \quad x \in G \\
& f_j(x) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\
& f_j(x) = 0, \quad j = k+1, \dots, m
\end{aligned} \tag{1}
$$

feltételes minimumproblémát akarjuk tanulmányozni, ahol $X \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f_i : X \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Szükséges és elégséges feltételt is a $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *Lagrange-szorzó*k segítségével adhatunk:

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(c) = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \ge 0, \quad \lambda_j f_j(c) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \tag{3}$$

$$f_j(c) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad f_j(c) = 0, \quad j = k+1, \dots, m. \tag{4}$$

Nyilván ha $f_j(c) < 0$, akkor $\lambda_j = 0$ kell legyen, $(j = 1, \dots, k)$, ekkor azt mondjuk, hogy a feltétel *nem aktív*. Figyeljük meg, hogy ha egy pozitív konstanssal megszorozzuk a Lagrange-szorzókat, (2) és (3) ekvivalens feltételbe mennek át, így akár azt is feltehetjük, hogy vagy $\lambda_0 = 0$ (*elfajuló eset*), vagy $\lambda_0 = 1$ (*nemelfajuló eset*). Mindkét esetben (2), (3) és (4) összesen $n + m$ skalár egyenletet adnak c és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ meghatározásához.

A (2), (3) és (4) feltételek az L *Lagrange-függvény* segítségével is kifejezhetők, amelyet az

$$L(x, y) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x)$$

összefüggéssel definiálunk, ahol $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Például a $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ jelöléssel (2) nyilván ekvivalens az $L_x(c, \lambda) = 0$ feltétellel, és ha $k = 0$, akkor (4) ekvivalens az $L_y(c, \lambda) = 0$ feltétellel.

* **7.2.39. Lagrange-elv: feltételes szélsőérték keresése, egyenlőtlenségeket is tartalmazó feltételrendszer.** *Az előző pont jelöléseivel, tegyük fel, hogy $f_i : G \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$ folytonosan differenciálhatóak G-n.*

Szükségesség: Ha $c \in G$ az (1) feltételes minimumprobléma megoldása, akkor léteznek olyan nem mind nulla Lagrange-szorzók, hogy (2), (3) és (4) teljesül.

Elégségesség: A (2), (3) és (4) feltételekből következik, hogy c megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:

(5) $\lambda_0 = 1$;

(6) f_i, $i = 0, 1, \dots, k$ *és* $x \mapsto \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *konvexek.*

A tételt és bizonyítását Páles [47] jegyzetéből vettük át. A bizonyítás nem használja az implicit függvény tételt. Ezt a tételt is gyakran alkalmazzuk lokálisan.

Bizonyítás. Az elégségességet bizonyítása teljesen elemi. Legyen

$$\varphi(t) = L(c + t(x - c), \lambda),$$

ahol $t \in [0, 1]$ és $x \in U$ rögzített. A φ függvény konvex, és (2) szerint $\varphi'(0) \geq 0$, ezért a $[0, 1]$-en φ-nek minimuma van 0-ban. Innen következik, hogy $L(c, \lambda) \leq L(x, \lambda)$, ha $x \in G$. Mivel $\lambda_0 = 1$, a (3) és (4) feltételekből $f_0(c) = L(c, \lambda)$. Minden x-re, amely teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket, $L(x, \lambda) \leq f_0(x)$, mivel $\lambda_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, k)$. Innen $f_0(c) \leq f_0(x)$.

A szükségesség bizonyításában az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és hogy

- 230/−1 :

  $<$

$$2\lambda_0 x^* + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{3}$$

  $>$

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + 2\lambda_0 x^* + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{3}$$

- 231/6 :

  $<$

$$f_0'(x^*) + 2x^* + 2N\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^+(x^*)\nabla f_i(x^*) + \sum_{i=k+1}^{m} f_i(x^*)\nabla f_i(x^*)\right) = 0. \tag{4}$$

  $>$

$$\nabla f_0(x^*) + 2x^* + 2N\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^+(x^*)\nabla f_i(x^*) + \sum_{i=k+1}^{m} f_i(x^*)\nabla f_i(x^*)\right) = 0. \tag{4}$$

- 231/−1 :

  $<$

állítását kapjuk. □

  $>$

állítását kapjuk. □

7.2.39.2 Következmény. *Ha $f_i(x) = a_i x - b_i$, ahol a_i sormátrix, $i = 1, \dots, m$, akkor a szükségességnél a Lagrange-szorzók választhatók úgy, hogy $\lambda_0 = 1$ legyen.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy minden feltétel egyenlőtlenség, mert egy $a_i x - b_i = 0$ alakú feltétel helyett írhatunk egy $a_i x - b_i \leq 0$, $-(a_i x - b_i) \geq 0$ feltétel párt. Feltehetjük, hogy csak az első r feltétel aktív, azaz $f_i(c) < 0$, ha $r < i \leq m$. Így $\lambda_i = 0$, ha $i > r$, és a (2) feltétel $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r = 0$, ahol $a_0 = f_0'(c)$. Tegyük fel, hogy $\lambda_0 = 0$. Ha van olyan $h \in \mathbb{R}^n$, hogy $a_i h \leq 0$, $i = 1, \dots, r$ és $a_0 h < 0$, akkor elég kis pozitív t-re $x = c + th \in G$ még mindig teljesíti a mellékfeltételeket, de $f_0(x) < f_0(c)$, azaz c nem minimum. Tehát nincs ilyen h. Ekkor viszont a Farkas-lemma szerint (lásd kicsit később) léteznek olyan nemnegatív μ_i számok, hogy $a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r = 0$. A $\mu_i = 0$, ha $i > r$ választással, a két egyenletet összeadva

$$a_0 + (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) a_k = 0,$$

valamint (3) és (4) is teljesülnek λ_i helyett $\lambda_i + \mu_i$-vel.

* **7.2.39.3 Elválasztási tétel.** *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt, konvex halmaz, $a \in \mathbb{R}^n$. Ekkor létezik K-ban (az $\mathbb{R}^n$ szokásos belső szorzatából számazó normára nézve) a-t legjobban approximáló b elem, egyértelmű, és $\langle x - b, a - b \rangle \leq 0$ minden $x \in K$-ra.*

Ha $a \notin K$, akkor azt mondjuk, hogy az $\langle x - b, a - b \rangle = 0$ hipersík elválasztja K pontjait a-tól: a belső szorzat $x = a$-ra pozitív, míg $x \in K$-ra nem pozitív. Szemléletesen, a a hipersík egyik oldalán van, míg K a másikon.

Bizonyítás. Legyen $D = d(a, K)$. A $D = 0$ eset triviális, $b = a$. Egyébként van olyan $b_n \in K$ sorozat, hogy $\|b_n - a\| \to D$. A paralelogramma-azonosság szerint

$$2\|b_n - a\|^2 + 2\|b_m - a\|^2 = \|b_n - b_m\|^2 + \|b_n + b_m - 2a\|^2 \geq \|b_n - b_m\|^2 + 4D^2,$$

mivel $(b_n + b_m)/2 \in K$. Innen viszont $\|b_n - b_m\|^2 \to 0$, azaz b_n Cauchy-sorozat. Legyen b a határértéke, erre a norma folytonossága miatt $\|b - a\| = D$. Ha $x \in K$ tetszőleges, $x \neq b$, akkor $x - b$ és $a - b$ nem zárhatnak be hegyes szöget, mert akkor b-ből x felé haladva az összekötő szakaszon, differenciálással adódik, hogy kezdetben a távolság csökkenne. Ha viszont nem hegyesszöget zárnak be, akkor a távolság nő, amiből következik az egyértelműség. $\square$

* **7.2.39.4 Farkas-lemma.** *Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és $a_0, a_1, \dots, a_m$ az X' duális tér elemei. A következő két feltétel ekvivalens:*

(1) *minden $h \in X$-re, amire $a_i h \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, az is teljesül, hogy $a_0 h \geq 0$;*

(2) *léteznek olyan $\mu_1, \dots, \mu_m$ nemnegatív valós számok, hogy $a_0 = \sum_{j=1}^m \mu_j a_j$.*

Bizonyítás. Nyilván (2)-ből következik (1). Tegyük fel, hogy (2) nem teljesül. Jelölje K az $a_1, \dots, a_m$ nemnegatív együtthatós lineáris kombinációinak halmazát. Nyilván K konvex. Megmutatjuk, hogy K zárt. Tartalmazhat alteret: legyen L egy maximális dimenziós altere. Az L egyértelmű, mert ha lenne másik ugyanilyen dimenziós altér is K-ban, akkor azok összege nagyobb dimenziós altere lenne K-nak. Tekintsük azon a_i-ket, amelyek nincsenek L-ben. Feltehetjük, hogy ezek $a_1, \dots, a_k$. Jelölje K_1 ezen vektorok konvex kombinációinak halmazát (ha $k=0$, akkor K_1 üres). Ha y a K_1 egy torlódási pontja, akkor van olyan $y_n \in K$ sorozat, amelyre $y_n \to y$. A kombináló együtthatók korlátos sorozatot alkotnak $\mathbb{R}^k$-ban, aminek a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint van konvergens részsorozata. Az y_n megfelelő részsorozata együtthatóinak összege 1, így adódik, hogy $y \in K_1$. Megmutatjuk, hogy K_1 diszjunkt L-től, amiből távolságuk pozitív, mert L zárt, K_1 pedig kompakt. Ha nem így lenne, akkor $a_1, \dots, a_k$ valamely konvex kombinációja L-ben lenne. Feltehetjük, hogy a konvex kombinációban $a_1, \dots, a_r$ együtthatói a pozitívak. Ha $r=1$, akkor $a_1 \in L$, ellentmondás. Legyen $z \in L$, $z = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$ ez a kombináció. Legyen $z(t) = ta_1 + (1-t)y$, ahol $y = (\alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r)/(1-\alpha_1) \in K_1$. Ha valamely $t \neq \alpha_1$-re $z(t) \in L$, akkor minden $0 \le t \le 1$-re is, így $\alpha_1 \in L$, ami ellentmondás. Ha viszont nem ez a helyzet, akkor a $z(t)-z$, $0 \le t \le 1$ szakasznak $t = \alpha_1$-re pontja az origó, és más pontja nincs L-ben. Mivel a szakasz pontjainak nemnegatív konstansszorosai is K-ban vannak, ez ellentmond annak, hogy L dimenziója maximális. Legyen most x egy érintkezési pontja K-nak, és $x_n \in K$ egy sorozat, amelyre $x_n \to x$. Legyen $x_n = \lambda_n y_n + z_n$, ahol $\lambda_n y_n$ az $a_1, \dots, a_k$ nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja, λ_n a kombináló együtthatók összege, $y_n \in K_1$ (tetszőleges, ha $\lambda_n = 0$) és $z_n \in L$; a felírás nem egyértelmű. Ha λ_n nem lenne korlátos, akkor valamely részsorozata $+\infty$-hez tartana; feltehetjük, hogy ez az eredeti sorozat. Mivel y_n egy korlátos és zárt halmazban van, lenne olyan részsorozata, amely konvergens; ismét feltehetjük, hogy ez az egész sorozat. De ekkor $z_n/\lambda_n - y_n = x_n/\lambda_n \to 0$, ami ellentmond annak hogy L és K_1 távolsága pozitív. Most hasonló gondolatmenettel, ha kell, részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $\lambda_n \to \lambda$ és $y_n \to y \in K_1$. Ekkor z_n is konvergens, $z_n \to z \in L$. Ez azt jelenti, hogy $x = \lambda y + z \in K$.

Tehát K zárt konvex halmaz X'-ben, $a \notin K$. Az előző tétel szerint van olyan $b \in K$, hogy $\langle x-b, a-b \rangle \le 0$ minden $x \in K$-ra. Az $x=0$ helyettesítéssel $-\langle b, a-b \rangle \le 0$, az $x = 2b$ helyettesítéssel pedig $\langle b, a-b \rangle \le 0$, azaz $\langle b, a-b \rangle = 0$, így $\langle x, a-b \rangle \le 0$ minden $x \in K$-ra. Mivel a bal oldalon egy lineáris funkcionál áll, és X'' azonosítható X-szel, van olyan $h \in X$, hogy $xh \le 0$ minden $x \in K$-ra, speciálisan $a_1, \dots, a_m$-re is, de $(a-b)h < 0$. Mivel $b \in K$, $bh \le 0$, így $ah > 0$. Áttérve $-h$-ra kapjuk, hogy (1) nem teljesül. $\square$

* **7.2.39.5 Következmény.** *A következő két feltétel ekvivalens:*

(1) *minden $h \in X$-re, amire $h \ge 0$ és $a_i h = 0$, $i = 1, \dots, n$, az is teljesül, hogy $a_0 h \ge 0$;*

(2) *léteznek olyan $\mu_1, \dots, \mu_m$ valós számok, hogy $a_0 \le \sum_{j=1}^m \mu_j a_j$.*

Bizonyítás. Legyen a az a mátrix, amelynek sorai $a_1, \dots, a_m$, b pedig az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az a, a $-a$ és az m-szer m-es δ egységmátrixot egymás alá helyezzük. Ekkor (2) azzal ekvivalens, hogy $y'b = a_0$-nak van $y \ge 0$ megoldása, ami a lemmát alkalmazva b soraira, ekvivalens (1)-gyel. $\square$

* **7.2.39.6 Primál-duál feladatpár.** A lineáris programozás alapfeladatát a megfogalmazásakor is használt jelölésekkel tömören

$$d + c'x \to \max, \quad x \ge 0, \quad ax \le b$$

alakban írhatjuk, ahol $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopmátrixok és a egy $m \times n$-es mátrix. Tekintsük ehhez a *primál feladat*hoz a

$$d + b'y \to \min, \quad y \geq 0, \quad a'y \geq c$$

*duál feladat*ot, ahol $y \in \mathbb{R}^m$. Ez nyilván

$$-d - b'y \to \max, \quad y \geq 0, \quad -a'y \leq -c$$

alakban írható, aminek a duálisa

$$-d - c'x \to \min, \quad x \geq 0, \quad -a''x \geq -b,$$

ekvivalens az eredeti feladattal. A két feladat kapcsolatának vizsgálatához szükségünk lesz egy tételre.

$\to$* **7.2.39.7 Feladat [6].** Az előző pont jelöléseivel, adjunk példát, amiben $n, m \leq 2$ és

(1) mindkét feladatnak van megengedett megoldása;

(2) csak a primál feladatnak van megengedett megoldása;

(3) csak a duál feladatnak van megengedett megoldása;

(4) egyik feladatnak sincs megengedett megoldása.

* **7.2.39.8 Nyeregpont tétel.** *Legyenek X és Y nem üres halmazok és $L : X \times Y \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $F(x) = \inf_{y\in Y} L(x, y)$ és $G(y) = \sup_{x\in X} L(x, y)$, továbbá $\alpha = \sup_{x\in X} F(x)$ és $\beta = \inf_{y\in Y} G(y)$ bővített valós értékek. Ekkor $\alpha \leq \beta$ és az alábbi két állítás ekvivalens:*

(1) *van olyan $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, hogy $L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y)$ minden $x \in X$, $y \in Y$-ra* (nyeregpont)*;*

(2) *$F(x_0) = \alpha$, $G(y_0) = \beta$, $\alpha = \beta$.*

Ha (1) vagy (2) fennáll, akkor

(3) *$\alpha = F(x_0) = L(x_0, y_0) = G(y_0) = \beta$.*

Bizonyítás. Mivel $G(y) \geq L(x, y)$ minden $x \in X$ és $y \in Y$-ra,

$$\beta = \inf_{y\in Y} G(y) \geq \inf_{y\in Y} L(x, y) = F(x)$$

minden $x \in X$-re, ahonnan $\alpha \leq \beta$ következik.

Ha (2) fennáll, akkor

$$\beta = G(y_0) = \sup_{x\in X} L(x, y_0) \geq L(x_0, y_0) \geq \inf_{y\in Y} L(x_0, y) = F(x_0) = \alpha,$$

így mindenütt egyenlőség áll, amiből (1) következik.

Ha (1) fennáll, akkor

$$F(x_0) = \inf_{y\in Y} L(x_0, y) = L(x_0, y_0) = \sup_{x\in X} L(x, y_0) = G(y_0),$$

így

$$\alpha \geq F(x_0) = L(x_0, y_0) = G(y_0) \geq \beta,$$

amivel (2)-t és (3)-at is beláttuk.

* **7.2.39.9 A lineáris programozás főtétele.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha* $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, ax \leq b\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0, a'y \geq c\}$, $\alpha = \sup_{x \in X} c'x + d$, *és* $\beta = \inf_{y \in Y} b'y + d$, *akkor* $\alpha \leq \beta$ *és az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *a primál feladatnak van* x_0 *optimális megoldása;*

(2) *a duál feladatnak van* y_0 *optimális megoldása;*

(3) *mindkét feladatnak van megengedett megoldása.*

Továbbá ha (1), (2) teljesülnek, akkor x_0, y_0 *az* $L(x,y) = d + c'x + b'y - y'ax$, $x \in X$, $y \in Y$ *függvénynek nyeregpontja,* $\alpha = \beta = y_0'ax_0$.

Tehát egy lineáris programozási problémának, ha van megengedett megoldása, akkor vagy van optimális megoldása vagy a célfüggvény nem korlátos. A szimplex módszer eldönti, melyik eset áll fenn. Persze az is lehetséges, hogy sem a primál, sem a duál feladatnak nincs megengedett megoldása.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1) teljesül: a célfüggvény $-d - c'x$ ellentettjének van minimuma az $ax - b \leq 0$, $-e_jx \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$ feltételek mellett, ahol e_i a sorvektorok terének szokásos bázisa, és $'$ a transzponálás. Ha a_i az a mátrix i-edik sora, akkor az $ax \leq b$ feltétel az $a_ix - b_i$, $i = 1, \ldots, m$ feltételekkel ekvivalens. Jelöljön x_0 egy optimális megoldást, és alkalmazzuk a Lagrange-elv egyenlőtlenséges alakjának következményét. Kicsit más jelölésekkel azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m+n$ Lagrange-szorzók, hogy

$$-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{m+j} e_j = 0,$$

továbbá $\lambda_i(a_ix_0 - b_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ és $\lambda_{m+j} = 0$, ha az x_0 vektor j-edik koordinátája nem nulla. Ez azt jelenti, hogy

$$-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$$

minden koordinátája nemnegatív, és nulla, ha az x_0 vektor j-edik koordinátája nem nulla, azaz tömören

$$-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \geq 0 \quad \text{és} \quad \Big(-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i\Big) x_0 = 0.$$

Tehát bevezetve az y_0 oszlopmátrixot $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ koordinátákkal, $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, és

$$(4) \qquad -c' + y_0'a \geq 0, \quad (-c' + y_0'a)x_0 = 0, \quad ax_0 - b \leq 0, \quad y_0'(ax_0 - b) = 0.$$

Tekintsük az $L(x,y) = d + c'x - y'(ax - b)$ Lagrange-függvényt, ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, és alkalmazzuk a nyeregpont-tételt. Most

$$F(x) = \inf_{y \geq 0} L(x,y) = \begin{cases} d + c'x, & \text{ha } ax \leq b, \\ -\infty & \text{egyébként;} \end{cases}$$

valóban, ha $ax-b \le 0$, akkor $-y'(ax-b)$ minimális értéke 0, ha viszont $ax-b$ valamelyik koordinátája pozitív, akkor y megfelelő koordinátáját elég nagynak, a többit nullának választva, $-y'(ax-b)$ bármilyen számnál kisebb lehet. Így $\alpha = \sup_{x\ge 0} F(x)$. Mivel $L(x,y) = d + b'y + x'(c - a'y)$, hasonlóan

$$G(y) = \sup_{x\ge 0} L(x,y) = \begin{cases} d + b'y, & \text{ha } a'y \ge c, \\ +\infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így $\beta = \inf_{y\ge 0} G(y) \ge \sup_{x\ge 0} F(x) = \alpha$. A (4) összefüggésekből egyrészt $c'x - y_0'ax \le 0 = c'x_0 - y_0'ax_0$, ahonnan $L(x,y_0) \le L(x_0,y_0)$, másrészt $y'b - y'ax_0 \ge 0 = y_0'(b - ax_0)$, ahonnan $L(x_0,y_0) \le L(x_0,y)$. Ez azt jelenti, hogy x_0, y_0 nyeregpont, azaz x_0 az F-nek maximumhelye, y_0 a G-nek minimumhelye és $\alpha = \beta$. Tehát (1)-ből következik (2), és a szélsőértékek egyenlősége. A dualitás miatt (2)-ből is következik (1). Ha csak a megengedett megoldások kisebb X, Y halmazain tekintjük L-et, x_0, y_0 ott is nyeregpont. Az világos, hogy (1)-ből és (2)-ből következik (3). Azt kell megmutatnunk, hogy (3)-ból következik (1), vagyis ha a $d + c'x$ célfüggvény felülről korlátos, akkor felveszi az α szuprémumát. Tegyük fel indirekt, hogy nem. Feltehetjük, hogy $d = 0$ és az $x \ge 0$ feltételrendszert belefoglalhatjuk az $ax \le b$ feltételekbe, ha a alá írjuk egy n-szer n-es δ egységmátrix ellentettjét, b-t pedig nullákkal egészítjük ki. Az indirekt feltevés szerint nincs olyan $x \in \mathbb{R}^n$, amelyre $ax \le b$ és $c'x \ge \alpha$. Ekkor viszont a Farkas-lemma következménye szerint (azt $a_0 = (b', \alpha)$-ra, az a mátrix soraira és $-c'$-re alkalmazva) van olyan $y \ge 0$ és $\lambda \ge 0$, hogy $y'a - \lambda c' = 0$, de $y'b - \lambda\alpha < 0$. Innen

$$\begin{aligned} \lambda\alpha &= \lambda \sup\{c'x : ax \le b\} = \sup\{\lambda c'x : ax \le b\} = \sup\{y'ax : ax \le b\} \\ &\le y'b < \lambda\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

- 234/−1 :

$<$

Néhány lépés után újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

$>$

Néhány lépés után újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

A *fékezett Newton-módszer*nél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletből meghatározzuk Δx_n-et, de $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \Delta x_n$, ahol az $0 < \alpha_n \le 1$ *relaxációs paraméter*t úgy választjuk, hogy $\|f(x_{n+1})\|^2 < \|f(x_n)\|^2$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha az egyenlet megoldható: Az $\|f\|^2$-nek a Δx_n irány menti deriváltja az x_n helyen

$$2\langle f(x_n), f'(x_n)\Delta x_n\rangle = -2\|f(x_n)\|^2,$$

így

$$\frac{\|f(x_n + \alpha\Delta x_n)\|^2 - \|f(x_n)\|^2}{\alpha\|f(x_n)\|^2} \to -2,$$

ha $\alpha \to 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1 - \sigma$ valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \le \sigma \le 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük α_n-et, rendszerint szorozzuk ϱ-val, ahol $0 < \varrho < 1$, általában $0{,}3 \le \varrho \le 0{,}8$.

A módosított Newton-módszerből is képezhető fékezett változat, de itt már nem biztos, hogy a feltétel teljesíthető, esetleg újra kell számolni a deriváltat.

- 235/3 :

$<$

tékét az $A_n \Delta x_n = -\alpha_n f(x_n)$ egyenlet megoldásával nyerjük, ahol A_n az $f'(x_n)$ egy közelítése, az α_n pedig egy *relaxációs paraméter*. A közelítést nyerhetjük például dif-

$>$

tékét az $A_n \Delta x_n = -f(x_n)$ egyenlet megoldásával nyerjük, ahol A_n az $f'(x_n)$ egy közelítése (itt is lehetséges fékezett változat). A közelítést nyerhetjük például dif-

- 235/8 :

$<$

$\alpha_n = 1$ minden n-re, $A_0 = f'(x_0)$, és A_{n+1}-et úgy próbáljuk meghatározni, hogy

$>$

$A_0 = f'(x_0)$, és A_{n+1}-et úgy próbáljuk meghatározni, hogy

- 235/−1 :

$<$

megoldását megkönnyítheti.

$>$

megoldását megkönnyítheti. Ahol Φ nincs értelmezve, ott az értékét $+\infty$-nek tekintjük.

- 240/−8 :

$<$

* **7.2.61. Algebrai egyenletek megoldása.** A Newton-módszer minden további nélkül alkalmazható komplex változós, komplex értékű f függvényre is. Hogy a konvergenciát biztosabbá tegyük, kezdetben alkalmazhatjuk a gradiens módszert az $|f|$ függvényre, majd a Newton-módszert. Mivel a Taylor-formulából $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$, az abszolút érték akkor nő a leggyorsabban, ha $f(x)$ és $f'(x)h$ iránya megegyezik, azaz ha $f(x) = r(h)f'(x)h$ valamely $r(h) \geq 0$-ra. Innen az $|f|$ gradiense $f(x)/f'(x)$ irányú, ha $f(x) \neq 0$ és $f'(x) \neq 0$. Ha $r(h)h = f(x)/f'(x)$, $r(h) > 0$, akkor

$$\big|f(x+h)\big| - \big|f(x)\big| \approx \big|f'(x)\big||h|,$$

ahonnan átosztva $|h| \to 0$ határátmenettel $\big|\nabla|f|(x)\big| = \big|f'(x)\big|$. Összegezve

$$\nabla|f|(x) = \frac{f(x)\big|f'(x)\big|^2}{f'(x)\big|f(x)\big|}.$$

Így az $x_{n+1} = x_n - tf(x_n)/f'(x_n)$ alakban kell keresnünk a következő közelítést, ahol t pozitív valós szám. Eljárhatunk úgy, hogy először $t = 1$-gyel próbálkozunk, ami a Newton-módszernek felel meg, majd a gradiens-módszernél leírtak szerint változtatjuk t-t. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n) = 0$.

Polinomokra alkalmazva ezt az eljárást, meghatározhatjuk a polinom gyökeit. Megjegyezzük, hogy még ha a polinom valós együtthatós, akkor is ajánlatos egy véletlen komplex kezdőértékből indítani az iterációt, mert így nagyon kicsi a valószínűsége, hogy megszakad, és újra kell indítani. Ezzel az eljárással megkaphatjuk a polinom egy zérushelyét. A polinomot elosztva a gyöktényezővel, eggyel alacsonyabb fokú polinomot kapunk, amit ugyanúgy kezelhetünk. A számítási hibák felhalmozódása miatt a talált közelítő értékek pontosságát érdemes az eredeti polinom felhasználásával végzett iterációval növelni.

>

* **7.2.62 Belső pont módszerek.** A Lagrange-szorzóknál leírt

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min, \quad x \in G \\
&f_j(x) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\
&f_j(x) = 0, \quad j = k+1, \dots, m
\end{aligned} \tag{1}
$$

feltételes minimumproblémát kívánjuk numerikusan megoldani. Használni fogjuk az ottani feltevéseket és jelöléseket. Az egyenlőség típusú feltételeket kiküszöbölhetjük, ha f_0 helyett az $f_0 + \sum_{i=k+1}^{m}(w_i f_i)^2$ függvényt minimalizáljuk, ahol $w_i \neq 0$ súlyok. Kérdés, hogyan célszerű választani a súlyokat. Az egyenlőtlenség típusú feltételeket úgy vehetjük figyelembe, hogy a célfüggvényhez hozzáadunk egy

$$
-\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{k}\ln\bigl(-f_j(x)\bigr)
$$

tagot. Ez mint sorompó szerepel, az $X^- = \bigl\{x : f_j(x) < 0, j = 1, \dots, k\bigr\}$ nyílt halmaz belsejében tart minket, mert a határhoz közeledve $+\infty$-hez tart. Innen a *belső pont módszerek* elnevezés. Minél nagyobb t, annál gyengébb a sorompó, annál közelebb mehetünk a határhoz. A legegyszerűbb *sorompó módszer*nél $X^- \cap \mathrm{dmn}(f_0)$ egy pontjából indulunk. Egy adott pozitív t-re minimalizálva (például a fékezett Newton-módszerrel), ha $c(t)$-ben van a minimum, akkor megnövelt t-re, például t helyett μt-re a $c(t)$-t használhatjuk kezdőpontnak, újra minimalizálunk, stb. A tapasztalatok szerint a módszer 3 és 100 közötti μ-t választva jól működik, sebessége alig függ μ-től. Leggyakrabban μ értékét 10 és 20 között választjuk. Fontos észrevétel, hogy ha nincsenek egyenlőség típusú feltételek és $c(t)$ a minimumhely, akkor $x = c(t)$-re

$$
f_0'(x) + \sum_{j=1}^{k}\frac{f_j'(x)}{-tf_j(x)} = 0,
$$

így — legalábbis a reguláris esetben — a

$$
\lambda_j(t) = \frac{1}{-tf_j\bigl(c(t)\bigr)}
$$

mennyiségek a $c(t)$-hez tartozó Lagrange-szorzók, és $-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) f_j(x)$ az $x = c(t)$ helyen k/t. Ez adhatja az ötletet a sokkal agresszívebb és gyorsabb primál-duál belső pont módszerhez.

Tekintsük a

$$
\begin{aligned}
0 =& f_0'(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j f_j'(x), \\
0 =& -\frac{1}{t} - y_j f_j(x), \quad j = 1, \ldots, k; \\
0 =& f_j(x), \quad j = k+1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert, amely a $t > 0$ paramétertől függ. Ennek az (x, y) megoldását keressük $y_j > 0$, ha $j = 1, \ldots, k$ feltételek mellett fékezett Newton-módszerrel. Azt várjuk, hogy t növekedésével (x, y) tart (c, λ)-hoz. Kiszámítjuk $\eta = -\sum_{j=1}^{k} y_j f_j(x)$ értékét, és t-t a k/η szám μ-szörösének választjuk (μ rendszerint 10 körüli). Csak egyetlen iterációs lépést teszünk, majd újraszámoljuk t-t. Az egyenes szakasz menti keresésnél kiszámítjuk azt a legnagyobb α-t, amely nem nagyobb mint 1, és amelyre $y_j + \alpha \Delta y_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, k$, majd az α kezdőértékének ennek mondjuk 0,99-szeresét vesszük, és ha kell, tovább csökkentjük α-t a fékezett Newton-módszernél leírtak szerint. Az egész program akkor áll meg, ha $\eta < \varepsilon$ és $\sum_{j=k+1}^{m} f_j(x)^2$ meg az első egyenlet jobb oldala normanégyzetének összege kisebb mint δ^2. Egy olyan $x \in X^-$ pontból indulunk, amely mindegyik függvény értelmezési tartományában benne van, y_j kezdőértéke $-1/\big(t f_j(x)\big)$, ha $j = 1, \ldots, k$, a többi y_j tetszőleges, például nulla. Nincs garancia a konvergenciára, kivéve, ha az f_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ függvények szigorúan konvexek, az f_j, $j = k+1, \ldots, m$ függvények pedig lineáris plusz konstans alakúak.

Ha nem tudunk pontot X^--ban, amire minden f_i értelmezve van, de ismerjük az értelmezési tartományok egy közös pontját, akkor az $f_0 \to \min$, $f_j \leq s$, $j = 1, \ldots, k$, $f_j = 0$, $j = k+1, \ldots, m$, $s = 0$ problémát próbáljuk megoldani. Ha csak külön-külön tudunk egy-egy $z_i \in \mathrm{dmn}(f_i)$ pontot, akkor az $f_0(x + z_0) \to \min$, $f_j(x + z_j) \leq s$, $j = 1, \ldots, k$, $f_j(x + z_j) = 0$, $j = k+1, \ldots, m$, $s = 0$, $z_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ problémát próbáljuk megoldani.

- $243/-14$:

  $<$

  Bizonyítás. Következik abból, hogy $g - f \geq 0$. $\square$

  $>$

  Bizonyítás. Következik abból, hogy $g - f \geq 0$. $\square$

7.3.9.5 Megjegyzés. Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ egy tégla, $a, b \in \mathbb{R}^m$ és $a = (a_1, a_2, \ldots a_m)$ koordinátái mind nem nullák, $g(x) = \langle a, x\rangle + b$, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és egyenlőek:

$$
\int_T f(x)\, dx \quad \text{és} \quad \int_{g(T)} |a_1 a_2 \cdots a_m| f\big(\langle a, x\rangle + b\big)\, dx.
$$

Ez abból következik, hogy az integrálközelítő összegek megegyeznek. $\square$

- 245/16 :

$<$

7.3.15. Következmény. *Ha $T_1, \ldots, T_k$ a T tégla egy egy felosztása, és $f : T \to \mathbb{R}$*

$>$

7.3.15. Következmény. *Ha $T_1, \ldots, T_k$ a T tégla egy felosztása, és $f : T \to \mathbb{R}$*

- 256/−3 :

$<$

$$Jg(u,v) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\left(1 + f'(u)^2\right) f(u)^2},$$

$>$

$$Jg(u,v) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{vmatrix}} = f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2},$$

- 256/−1 :

$<$

$$|F| = \int_a^b \int_0^{2\pi} 1 \cdot f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\, dv\, du = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du.$$

$>$

$$|F| = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\, dv\, du = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du.$$

- 263/5 :

$<$

(2) *minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan, a T résztégláin értelmezett ω nemnegatív szupe-radditív függvény, $\delta : T \to \mathbb{R}^+$ és $p : T \to \mathbb{N}^+$, hogy $\omega(T) \le \varepsilon$ és*

$>$

(2) *minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan, a T résztégláin értelmezett ω nemnegatív szuper-additív függvény, $\delta : T \to \mathbb{R}^+$ és $p : T \to \mathbb{N}^+$, hogy $\omega(T) \le \varepsilon$ és*

- 270/−6 :

$<$

$$\left|f(x) - B_{f,n}(x)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$>$

$$\left|f(x) - B_{f,n}(x)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

- 272/1 :

  $<$

  8.2.1. Általánosított Pythagoras-tétel. *Legyen x_n egy (véges vagy végtelen)*

  $>$

  8.2.1. Általánosított Pitagorasz-tétel. *Legyen x_n egy (véges vagy végtelen)*

- 276/11 :

  $<$

sora az

  $>$

sora a

- 277/-1 :

  $<$

$$\frac{1}{l}\|f\|^2 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|^2 + |b_k|^2\big).$$

  $>$

$$\frac{1}{l}\|f\|^2 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2\,dx = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|^2 + |b_k|^2\big).$$

- 279/14 :

  $<$

(6) ha az f^* deriválja f és $f^*(0) = 0$, azaz $f^*(x) = \int_0^x f$, akkor $2\pi i k c_k^* = c_k$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás. □

  $>$

(6) ha az f^* deriválja f és $f^*(0) = 0$, azaz $f^*(x) = \int_0^x f$, akkor $2\pi i k c_k^* = c_k - c_0$.

Bizonyítás. (1)–(5) egyszerű számolás. (6) parciális integrálással adódik az integrálfüggvényekre vonatkozó változatot használva. □

- 282/-7:

  $<$

Ultraszférikus	$\alpha = \beta$	${}^{(\alpha)}P_n$	$]-1,1[$	$(1-x^2)^\alpha$

  $>$

Ultraszférikus	$\alpha = \beta > -1$	${}^{(\alpha)}P_n$	$]-1,1[$	$(1-x^2)^\alpha$

- 282/−0 :
  $<$
  $>$

$\to$ **8.2.19. Feladat** [6]. Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben a páros függvények halmazának ortogonális komplementerét.

$\to$ **8.2.20. Feladat** [5]. Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben a $t \mapsto e^t$ függvényt legjobban approximáló elsőfokú polinomot.

$\to$ **8.2.21. Feladat** [7]. Ortogonalizáljuk $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben az 1, x, x^2 függvényrendszert.

8.2.22. Feladat [8]. Ortonormáljuk $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben az $1, x, x^2$ függvényrendszert.

8.2.23. Feladat [9]. Határozzuk meg az alábbi távolságokat:

(1) x távolsága x^2, x^3 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben;

(2) 1 távolsága $\sin x, \cos x$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[-\pi,\pi]$-ben;

(3) x^3 távolsága $1, x, x^2$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben;

(4) x^3 távolsága x, x^2 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben.

$\to$ **8.2.24. Feladat** [10]. Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát:

(1) $|\sin x|$;

(2) $\sin^4 x$;

(3) $\operatorname{sgn}(\cos x)$;

(4) $(1-a^2)/(1-2a\cos x + a^2)$, $|a| < 1$;

(5) $(1-a\cos x)/(1-2a\cos x + a^2)$, $|a| < 1$;

(6) $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$;

(7) $\lfloor 4x \rfloor - 3\lfloor 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor$;

(8) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \, dx$;

(9) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 4x \rfloor - 3\lfloor 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor \, dx$;

(10) $\ln\bigl|\sin(x/2)\bigr|$.

Mely pontokban konvergens a Fourier-sor és mi az összege?

8.2.25. Feladat [8]. Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát $]-\pi,\pi[$-n:

(1) xe^{x^2};

(2) $\operatorname{sgn}(x)(\pi - |x|)$;

(3) $x(\pi - |x|)$;

(4) x^2;

(5) $\bigl(\pi - \operatorname{sgn}(x)\bigr)$;

(6) $\operatorname{sgn}(x)\cos x$;

(7) $\big(1+\operatorname{sgn}(x)\big)\sin x$;

(8) $\cos ax$;

(9) $\sin ax$.

8.2.26. Feladat [8]. Az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sora $]-\pi,\pi[$-n mely pontokban konvergens és mi az összege:

(1) $x\sin(1/x)$;

(2) $\sin(x)/x$.

→ **8.2.27. Feladat [7].** Határozzuk meg az egyenáramú komponens és a harmadik felharmonikus amplitúdójának arányát egyutas egyenirányításnál.

→ **8.2.28. Feladat [7].** Szimmetrikus fűrészfog-feszültség integrálásával szinuszos jelalakot közelítünk. Határozzuk meg, hogy az alapharmonikus a teljes teljesítmény hanyadrészét képviseli.

8.2.29. Feladat [9]. Hogyan változik egy gitárhang felharmonikus tartalma, attól függően, hogy a húrt hol pendítjük meg?

8.2.30. Feladat [9]. Ortonormáljuk a megadott függvényrendszert a megadott súlyfüggvényre a megadott intervallumon:

(1) $1, x, x^2$, $\varrho(x)=e^{-x}$, $x\in[0,\infty[$;

(2) $1, x, x^2$, $\varrho(x)=x^2$, $x\in[0,1]$;

(3) $1, x, x^2$, $\varrho(x)=\sin \pi x$, $x\in[0,1]$.

- $286/-9$:

  <

Tétel. *Ha $g:[a,b]\to\mathbb{K}^n$ görbe szakaszonként differenciálható, és a derivált abszolút integrálható, akkor pálya és*

$$\mathop{\mathbb{V}}_a^b g=\int_a^b \big|g'(x)\big|\,dx.$$

Speciálisan szakaszonként sima görbe pálya.

* **Bizonyítás.** Elég differenciálható pályára bizonyítani az állítást. Ha

$$a=x_0\le x_1\le\ldots\le x_k=b,$$

akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\big|g(x_j)-g(x_{j-1})\big|=\sum_{j=1}^{k}\left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} g'(x)\,dx\right|\le\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\big|g'(x)\big|\,dx$$
$$\le\int_a^b\big|g'(x)\big|\,dx,$$

ahonnan következik, hogy g pálya, és az egyik irányú egyenlőtlenség.

A másik irányú egyenlőtlenséghez legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel g differenciálható, minden $t \in [a, b]$-hez van olyan $\delta(t) > 0$, hogy ha $t \neq y$, $|y - t| < \delta(t)$, akkor

$$\left| \frac{g(y) - g(t)}{y - t} - f'(t) \right| \leq \varepsilon,$$

ahonnan $\bigl|g(y) - g(t) - g'(t)(y - t)\bigr| \leq \varepsilon |y - t|$, ha $|y - t| < \delta(t)$. Innen bármely δ-finom $a = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq t_n \leq x_n = b$ pontozott felosztásra

$$\Bigl| \bigl|g(x_j) - g(t_j)\bigr| - \bigl|g'(t_j)\bigr|(x_j - t_j) \Bigr| \leq \varepsilon(x_j - t_j)$$

és

$$\Bigl| \bigl|g(t_j) - g(x_{j-1})\bigr| - \bigl|g'(t_j)\bigr|(t_j - x_{j-1}) \Bigr| \leq \varepsilon(t_j - x_{j-1}),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. Így

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\bigl|g(x_j) - g(t_j)\bigr| + \bigl|g(t_j) - g(x_{j-1})\bigr| \Bigr) - \sum_{j=1}^{n} \bigl|g'(t_j)\bigr|(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon(b - a).$$

Mivel az integrálközelítő összeg ε-nál közelebb kerülhet az integrálhoz, ha a felosztás elég finom,

$$\mathbb{V}(g) \geq \int_a^b |g'| - \varepsilon(b - a) + \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, kapjuk a másik irányú egyenlőtlenséget. $\square$

>

Tétel. *Egy $g : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ differenciálható görbe pontosan akkor pálya, ha a deriváltja abszolút integrálható és ekkor*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbb{V}}} g = \int_a^b |g'|.$$

* **Bizonyítás.** Ha g' abszolút integrálható és

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k = b,$$

akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \bigl|g(x_j) - g(x_{j-1})\bigr| &= \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} g'(x)\, dx \right| \leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \bigl|g'(x)\bigr|\, dx \\ &\leq \int_a^b \bigl|g'(x)\bigr|\, dx, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy g pálya.

Tegyük fel, hogy g pálya. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Van olyan $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b$, amelyre $\mathbb{V}(g) < \sum_{j=1}^{k} \bigl|g(y_j) - g(y_{j-1})\bigr| + \varepsilon$. Mivel g differenciálható, folytonos is és így egyenletesen folytonos. Van tehát olyan $\delta > 0$, amelyre $\bigl|g(t) - g(s)\bigr| < \varepsilon/(2k)$, ha $|s - t| < \delta$. Mivel g differenciálható, minden $t \in [a, b]$-hez van olyan $\delta'(t) > 0$, hogy ha $t \neq y$, $|y - t| < \delta'(t)$, akkor

$$\left|\frac{g(y) - g(t)}{y - t} - g'(t)\right| \leq \varepsilon,$$

ahonnan $\bigl|g(y) - g(t) - g'(t)(y - t)\bigr| \leq \varepsilon|y - t|$, ha $|y - t| < \delta(t)$. A $\delta'(t)$ számokat választhatjuk úgy, hogy értékük legfeljebb δ legyen. Innen bármely δ'-finom $a = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq t_n \leq x_n = b$ pontozott felosztásra

$$\Bigl|\bigl|g(x_j) - g(t_j)\bigr| - \bigl|g'(t_j)\bigr|(x_j - t_j)\Bigr| \leq \varepsilon(x_j - t_j)$$

és

$$\Bigl|\bigl|g(t_j) - g(x_{j-1})\bigr| - \bigl|g'(t_j)\bigr|(t_j - x_{j-1})\Bigr| \leq \varepsilon(t_j - x_{j-1}),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. Így

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\Bigl(\bigl|g(x_j) - g(t_j)\bigr| + \bigl|g(t_j) - g(x_{j-1})\bigr|\Bigr) - \sum_{j=1}^{n}\bigl|g'(t_j)\bigr|(x_j - x_{j-1})\right| \leq \varepsilon(b - a).$$

A zárójelben álló összeg osztópontjaihoz egyenként adjuk hozzá az $y_1, \ldots y_{k-1}$ pontokat. Minden pont hozzáadásakor az összeg legfeljebb ε/k-val nő, viszont az eredmény legalább $\mathbb{V}(g) - \varepsilon$ lesz. Így azt kapjuk, hogy

$$\left|\mathbb{V}(g) - \sum_{j=1}^{n}\bigl|g'(t_j)\bigr|(x_j - x_{j-1})\right| \leq \varepsilon(b - a) + 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, $|g'|$ integrálható és $\mathbb{V}(g) = \int_a^b |g'|$. Megkaptuk az egyenlőséget, de azt, hogy g' abszolút integrálható, csak a valós értékű esetben. Viszont ha g vektor értékű, akkor a (valós) koordináta függvényei is korlátos változásúak, így az eddig bizonyítottak szerint mindegyiknek a deriváltja abszolút integrálható. $\square$

- 287/8 :

$<$

zése $X \times Y$-nak Z-be, ahol X, Y és Z véges dimenzió vektorterek $\mathbb{R}$ felett. Egy ilyen

$>$

zése $X \times Y$-nak Z-be, ahol X, Y és Z véges dimenziós vektorterek $\mathbb{R}$ felett. Egy ilyen

- 287/10 :

$<$

írunk. Tudjuk, hogy van olyan minimális konstans, A $\cdot$ bilineáris leképezés $\|\cdot\|$ normája,

$>$

írunk. Tudjuk, hogy van olyan minimális konstans, a $\cdot$ bilineáris leképezés $\|\cdot\|$ normája,

- 290/6 :

<

$$\left|f(t_i) - f(x_{i-1})\right| \le \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|f(x_i) - f(t_i)\right| \le \varepsilon$$

>

$$\left|f(\tau_i) - f(t_{i-1})\right| \le \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|f(t_i) - f(\tau_i)\right| \le \varepsilon$$

- 290/8 :

<

$$\left|g(t_i) - g(x_{i-1})\right| \le \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|g(x_i) - g(t_i)\right| \le \varepsilon$$

>

$$\left|g(\tau_i) - g(t_{i-1})\right| \le \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|g(t_i) - g(\tau_i)\right| \le \varepsilon$$

- 290/14 :

<

Megjegyzés. Stieltjes-integrálok kiszámítása valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett Stieltjes-integráljainak kiszámítására vezethető vissza

>

Megjegyzés. Az integrálok kiszámítása valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett integráljainak kiszámítására vezethető vissza

- 292/3 :

<

$$= \int_a^b f(x)\, dG_+(x) - \int_a^b f(x)\, dG_-(x) = \int_a^b f(x)\, dF(x)$$

>

$$= \int_a^b f(x)\, dG_+(x) - \int_a^b f(x)\, dG_-(x) = \int_a^b f(x)\, dG(x)$$

- 307/1 :

<

9.2.10 Rotációtétel. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-vektormező. Ekkor

>

9.2.10 Rotációtétel. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f : \overline{G} \to \mathbb{R}3$ Lipschitz-vektormező. Ekkor

- 319/−5 :

<

sán van. Először tisztázzuk az analitikus függvények és az elemi függvények alapvető

>

sán van. Először tisztázzuk az analitikus függvények alapvető

- 321/−15 :

<

10.1.4. Inverz függvény tétel. *Az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény pontosan akkor képez le valamely, a c pontot tartalmazó U nyílt halmazt egy $f(c)$-t tartalmazó V nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen, úgy, hogy a V-n az inverze is differenciálható, ha $f'(c) \neq 0$. Ekkor*

$$(f^{-1})'\big(f(c)\big) = 1/f'(c).$$

>

10.1.4. Az inverz függvény differenciálási szabálya komplexben. *Ha $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény, $f'(c) \neq 0$, akkor van olyan a c pontot tartalmazó U nyílt halmazt, amelyet f egy V nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képez le és V-n az f inverze is differenciálható. Ha $x \in U$, $y = f(x)$, akkor*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

- 328/−1 :

<

amiből a 10.1.32. tétel miatt következik az állítás. □

>

amiből a 10.1.32. tétel miatt következik az állítás. □

10.1.41.5. Morera tétele. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, f folytonos komplex függvény D-n. Ha minden γ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszög-lappal együtt D-ben van, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, akkor f holomorf D-n.*

Bizonyítás. Az f-nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így f is analitikus. □

- 333/−6 :

<

ha $n \to \infty$. □

>

ha $n \to \infty$. □

* **10.1.66 Morera tétele.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, f folytonos komplex függvény D-n. Ha minden γ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszög-lappal együtt D-ben van, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, akkor f holomorf D-n.*

Bizonyítás. Az f-nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így f is analitikus. $\square$

ha $n \to \infty$. $\square$

10.1.66. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy a ζ függvény analitikus a $\Re(z) > 1$ félsíkon.

- 339/-1 :

$<$

hogy $\mathbf{\Gamma}(1) = 1$, és hogy $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!$, ha $n \in \mathbb{N}$.

$>$

hogy $\mathbf{\Gamma}(1) = 1$, és hogy $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!$, ha $n \in \mathbb{N}$.

10.2.11.5. Feladat [10]. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}\,dx = \mathbf{\Gamma}(z)\zeta(z), \quad \text{ha} \quad \Re(z) > 1.$$

- 341/-11 :

$<$

térfogata $\mathbf{\Gamma}(1/2)^m/\mathbf{\Gamma}(m/2+1)$.

$>$

térfogata $\mathbf{\Gamma}(1/2)^m/\mathbf{\Gamma}(m/2+1) \to 0$, ha $m \to +\infty$.

- 343/2 :

$<$

Példa. Egy rakétát függőlegesen 100 m/s kezdősebességgel fellőnek. Meny-

$>$

Példa. Egy ágyúgolyót függőlegesen 100 m/s kezdősebességgel fellőnek. Meny-

- 349/2 :

$<$

Riemann-integrálható megoldások folytonosságát bizonyítsuk.

$>$

integrálható megoldások folytonosságát bizonyítsuk.

- 349/-12 :

$<$

x megoldása a differenciálegyenletnek, akkor az előző számítás azt mutatja, hogy a $t \mapsto F\big(t, x(t)\big)$ függvény deriváltja nulla, azaz a függvény konstans.

$>$

x megoldása a differenciálegyenletnek, akkor a $t \mapsto F\big(t, x(t)\big)$ függvény deriváltja nulla, azaz a függvény konstans, mint azt az előző számítás mutatja.

- 350/2 :

  $<$

(2) $\tilde{g}x\,dt - \operatorname{ctg} t\,dx = 0;$

  $>$

(2) $\operatorname{tg} x\,dt - \operatorname{ctg} t\,dx = 0;$

- 355/−20 :

  $<$

  $>$

számítások nagyon hosszadalmasak, komputeralgebrai rendszerek (Maple, MuPAD, mu-

számítások nagyon hosszadalmasak, komputeralgebrai rendszerek (wxMaxima, Maple, MuPAD, mu-

- 360/−16 :

  $<$

nyilvánvaló. A $b < \infty$ esetben tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $t_n \uparrow b$ sorozat, amelyre $\big(t_n, x(t_n)\big) \in C$. Egy részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $x(t_n) \to \xi \in C$. A $\tau = b$ jelöléssel, létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy a τ és ξ pontok ε-környezeteinek Descartes-szorzata D-ben van, és rajta $|f| < L$ valamilyen L valós konstansra. Válasszuk meg a $0 < \delta \le \min\big\{\varepsilon, \varepsilon/(2L)\big\}$ értéket úgy, hogy x értelmezve legyen a $]\tau - \delta, \tau[$ intervallumon. Válasszunk olyan n-et, amelyre $\big|x(t_n) - \xi\big| < \varepsilon/4$. Tegyük fel, hogy $\tau - \delta \le \eta < t < t_n$ esetén $\big|x(t) - \xi\big| < \varepsilon$. Ekkor a differenciálegyenlet és a középérték-egyenlőtlenség szerint $\big|x(t) - x(t_n)\big| \le L\delta \le \varepsilon/2$, így $\big|x(t) - \xi\big| < \varepsilon$. Mivel x folytonos, az ilyen η-k alsó határa nem nagyobb, mint $\tau - \delta$. Ha $n \to \infty$, akkor kapjuk, hogy $\tau - \delta < t < \tau$ esetén $\big|x(t) - \xi\big| < \varepsilon$, tehát x Lipschitz-függvény ezen az intervallumon. Mivel így egyenletesen folytonos, egyértelműen kiterjeszthető a τ pontban is folytonos függvénnyé. Alkalmazzuk a Peano-tételt a (τ, ξ) pontban, és legyen $\tilde{x}$ a kapott lokális megoldással egyenlő, ha $t \ge \tau$, és $\tilde{x}(t) = x(t)$, ha $\tau - \delta < t < \tau$. Ekkor $\tilde{x}$ egy folytonos függvény, amely eleget tesz az

$$\tilde{x}(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \tilde{x}(s)\big)\,ds$$

integrálegyenletnek. Mivel $\tilde{x}$ nem része x-nek, x folytatható megoldás. $\square$

  $>$

nyilvánvaló. Egyébként válasszunk olyan $r > 0$ számot, amelyre C-től D komplementerének minden pontja $2r$-nél nagyobb távolságban van. A C-től r-nél nem nagyobb távolságra lévő pontok C^* halmaza kompakt, így rajta f korlátos $K > 0$-val. Ha p, q pozitív számok úgy, hogy $p + q \le r$, akkor a Peano-tétel szerint $c = \min\{p, q/K\}$-ra minden $(\tau, \xi) \in C$ kezdőértékkel létezik megoldás $]\tau - c, \tau + c[$-n. Megmutatjuk, hogy $b_0 = b - c$ választható. Valóban, ha egy $b_0 < \tau < b$ értékre $\big(\tau, x(\tau)\big) \in C$ lenne, akkor az előző tétel szerint x a b-nél nagyobb értékekre is értelmezve lenne. $\square$

- 368/3 :

$<$

(2) $(2x-1)y''+4xy'-4y=0;$

$>$

(2) $(2x+1)y''+4xy'-4y=0;$

- 380/−11 :

$<$

Fontos tudni, hogy egy valószínűségi változó várható értéke, sőt bármely Baire-függvényének a várható értéke is csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényétől függ; ez közvetlenül belátható a definíció alapján. A valós értékű esetben az alábbi tételből következik.

$>$

Fontos tudni, hogy egy valószínűségi változó várható értéke csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényétől függ; ez közvetlenül belátható a definíció alapján. A valószínűségi változó bármely Baire-függvényének a várható értéke is csak az eloszlásfüggvényétől függ. A valós értékű valószínűségi változó esetén ez az alábbi tételből következik.

- 382/−13 :

$<$

nagy n esetén a *Stirling-formulá*t érdemes használni: $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+12/n-c_n}$, ahol

$>$

nagy n esetén a *Stirling-formulá*t érdemes használni: $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+1/(12n)-c_n}$, ahol

- 393/−1 :

$<$

meg egy Pu^{239} gömb kritikus sugarát.

$>$

meg egy Pu^{239} gömb kritikus sugarát.

* **12.1.86. Mátrixjátékok.** A játékelméletben vizsgált legegyszerűbb játékban két játékos van, mindkettőnek véges sok *stratégiá*ja vagy *tiszta stratégiá*ja van. Az első és a második stratégiáit is megszámozzuk: $1, 2, \ldots, m$ illetve $1, 2, \ldots, n$. Ha az első játékos az i-edik, a második a j-edik stratégiáját választja, akkor a második fizet az elsőnek $a_{i,j}$ összeget (ami persze negatív is lehet). Az $a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot a *játék mátrixá*nak nevezzük.

Lehetőségeinket kibővítjük, ha *kevert stratégiá*t használunk; ezeket Neumann János vezette be. Ez az első játékosnál azt jelenti, hogy egy m tagú valószínűségi eloszlást választ, és annak megfelelően véletlenszerűen választja meg stratégiáját. Ha az y eloszlást választja, amit oszlopmátrixnak írunk, akkor az $y'a$ sormátrix j-edik koordinátája jelenti nyereményének várható értékét, ha a második játékos a j-edik stratégiáját választotta. Ezen sormátrix koordinátáinak minimumát szeretné maximalizálni, azaz ha b és c egy m illetve n hosszú oszlopmátrix, amelynek minden koordinátája 1, akkor célja $\beta \to \max$, az $y'a \geq \beta c'$, $y \geq 0$ és $b'y = 1$ feltételek mellett; utóbbi azt fejezi ki, hogy y valószínűségeloszlás, koordinátáinak összege 1. A feladatnak vannak megengedett megoldásai, például az egységvektorok: ezek a tiszta stratégiáknak felelnek meg. Célszerű, ha a mátrix minden eleme pozitív. Ezt könnyen elérhetjük, ha minden eleméhez hozzáadunk egy elég nagy d számot. Jelölje az így kapott mátrixot $\overline{a}$. Persze, ekkor a nyeremények is d-vel megnőnek, és $\overline{\beta} = \beta + d$ jelöléssel problémánk alakja

$$\overline{\beta} \to \max, \quad b'y = 1, \quad \overline{a}'y \geq \overline{\beta} c, \quad y \geq 0.$$

Vegyük észre, hogy már a tiszta stratégiákra is $\overline{\beta} > 0$. Az $\overline{y} = y/\overline{\beta}$ jelöléssel a feladat

$$b'\overline{y} = 1/\overline{\beta} \to \min, \quad \overline{a}'\overline{y} \geq c, \quad \overline{y} \geq 0.$$

Teljesen hasonlóan, ha a második játékos az x eloszlást választja, amit oszlopmátrixnak írunk, akkor az ax oszlopmátrix koordinátáinak maximumát szeretné minimalizálni, azaz célja $\alpha \to \min$, az $ax \leq \alpha b$, $x \geq 0$ és $c'x = 1$ feltételek mellett. Most is a feladatnak vannak megengedett megoldásai, például a tiszta stratégiák. A $\overline{\alpha} = \alpha + d$ jelöléssel problémánk alakja

$$\overline{\alpha} \to \min, \quad c'x = 1, \quad \overline{a}x \leq \overline{\alpha} b, \quad x \geq 0.$$

Mivel $\overline{a}$ minden eleme pozitív, bármely megengedett stratégiára $\overline{\alpha} > 0$. Az $\overline{x} = x/\overline{\alpha}$ jelöléssel a feladat

$$c'\overline{x} = 1/\overline{\alpha} \to \max, \quad \overline{a}\overline{x} \leq b, \quad \overline{x} \geq 0.$$

Egy duál-primál feladatpárt kaptunk, amely például a szimplex módszerrel megoldható.

* **12.1.87. Neumann nyeregpont tétele.** *Az előző pont jelöléseivel, mármely mátrixjátékhoz vannak olyan x_0, y_0 optimális kevert stratégiák, hogy bármely x, y kevert stratégiákra $y'ax_0 \leq y_0'ax_0 \leq y_0'ax$. Az optimális stratégiákhoz tartozó α, β értékekre $\alpha = y_0'ax_0 = \beta$.*

Az optimális kevert stratégiák általában nem egyértelműek. Az $y_0'ax_0$ érték a *játék értéke*; a tétel szerint az első játékos ennél nagyobb nyereséget nem tud elérni, ha a második valamelyik optimális kevert stratégiáját játsza, és a második ennél kisebb értéket nem tud elérni, ha az első játékos valamelyik optimális kevert stratégiáját játsza.

Bizonyítás. Az előző pont szerint írjuk át a játékot egy duál-primál feladatpárrá. Mivel a primál feladat megengedett $\overline{x}$ megoldásainak halmaza korlátos, hiszen egy megengedett megoldás egyetlen koordinátája sem lehet nagyobb, mint $\overline{a}$ elemei minimumának a reciproka, a megengedett megoldások halmaza kompakt. Így a primál feladatnak van optimális $\overline{x}_0$ megoldása. Alkalmazva a lineáris programozás fő tételét kapjuk, hogy a duál feladatnak is van egy $\overline{y}_0$ optimális megoldása, és $\overline{x}_0, \overline{y}_0$ nyeregpontja az $L(\overline{x}, \overline{y}) = c'\overline{x} + b'\overline{y} - \overline{y}'\overline{a}\overline{x}$ Lagrange-függvénynek, azaz $L(\overline{x}, \overline{y}_0) \leq L(\overline{x}_0, \overline{y}_0) \leq L(\overline{x}_0, \overline{y})$ és $1/\overline{\alpha}_0 = 1/\overline{\beta}_0 = L(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \overline{y}_0'\overline{a}\overline{x}_0$. Innen $c'\overline{x} + b'\overline{y}_0 - \overline{y}_0'\overline{a}\overline{x} \leq 1/\overline{\beta}_0$, tehát $1/\overline{\alpha} - y_0'\overline{a}x/(\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}_0) \leq 0$, ahonnan $\overline{\beta}_0 \leq y_0'\overline{a}x$. Mivel $1/\overline{\alpha}_0 = \overline{y}_0'\overline{a}\overline{x}_0 = y_0'\overline{a}x_0/(\overline{\alpha}_0 \cdot \overline{\beta}_0)$, egyrészt $\overline{\beta}_0 = y_0'\overline{a}x_0$, amiből levonva d-t, $\beta = y_0'ax_0$, másrészt $y_0'\overline{a}x_0 \leq y_0'\overline{a}x$, amiből levonva d-t, kapjuk az egyik egyenlőtlenséget. A másik egyenlőség és egyenlőtlenség hasonlóan adódik. $\square$

- 394/−9 :

$<$

lítést erősen lerontja, ezért több különböző osztópontrendszerrel is érdemes próbálkozni.

$>$

lítést erősen lerontja, ezért több különböző osztópontrendszerrel is érdemes próbálkozni. Egy ökölszabály az osztópontok megválasztásához: osszuk az empirikus eloszlásfüggvényhez tartozó alsó és felső kvartilis közötti részt $\sqrt[3]{n}/2$ egyenlő részre, és ezzel a lépésközzel folytassuk a beosztást mindkét irányba. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett ennek a lépésköznek egy (1-hez közeli) konstansszorosa esetén közelíti a hisztogram a sűrűségfüggvényt $\mathbb{L}^2$-ben a legjobban.

- 415/16 :

$<$

Pythagoras (i. e. 6. sz.)   185, 272

$>$

Püthagoras (i. e. 6. sz.)   185, 272

- 420/0 FEJRÉSZ TÖRLENDŐ :

$<$

$>$