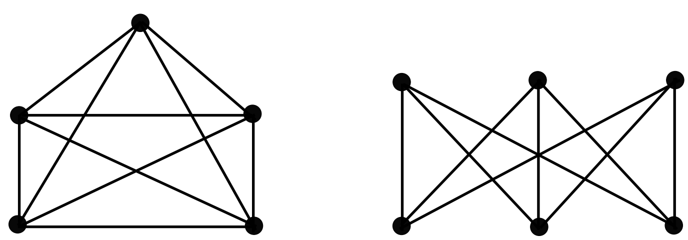
egyszerű gráfok esetén: ha G és G' egyszerű gráfok, és van olyan, a V-t V'-re képező g kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelyre $v, w \in V$ pontosan akkor szomszédosak, ha $g(v)$ és $g(w)$ szomszédosak, akkor G és G' nyilván izomorfak.

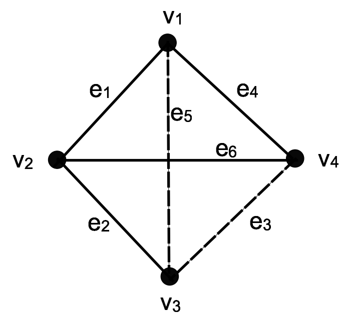
7.1.3. Teljes gráfok. Ha egy egyszerű gráfban bármely két különböző csúcsot él köt össze, akkor a gráfot *teljes gráf*nak nevezzük. Teljes gráfok esetén, ha a csúcsok halmazai között létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor a két teljes gráf izomorf, azaz teljes gráfok a csúcsok és élek elnevezésétől eltekintve megegyeznek. Ebben az értelemben beszélünk bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén n *szögpontú teljes gráf*ról. Az n szögpontú teljes gráfnak $n(n-1)/2$ éle van.

7.1.4. Páros gráfok. Egy *páros gráf* (vagy *kétrészes gráf*) egy olyan gráf, amelynél adott a csúcsok V halmazának egy V', V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy minden él egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik halmazba esik. Egy páros gráfot tehát egy (φ, E, V', V'') négyesként adhatunk meg. A legismertebb példa a „három ház, három kút" gráf, amelynél V' három házból, V'' három kútból áll, és bármely ház és bármely kút között van egy él, de több él nincs. A 7.2. ábrán balra látható K_5 az öt szögpontú teljes gráf, míg jobbra $K_{3,3}$ („három ház, három kút" gráf) páros gráf.



7.2. ábra

7.1.5. Részgráf. A $G' = (\varphi', E', V')$ gráfot a $G = (\varphi, E, V)$ gráf *részgráf*jának nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\varphi' \subset \varphi$. Néha azt mondjuk, hogy G a G' *szupergráf*ja. Ha a G' részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, amelyek végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott *feszített részgráf*nak vagy *telített részgráf*nak nevezzük. Ha $G' = (\varphi', E', V')$ részgráfja a $G = (\varphi, E, V)$ gráfnak, akkor a G'-nek G-re vonatkozó *komplementer*én a $(\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük. Ha G' egyszerű gráf, és külön nem mondjuk meg, hogy mely gráfra vonatkozó komplementerről van szó, akkor a V'-beli csúcspontokkal rendelkező olyan egyszerű gráfra gondolunk, amelyben pontosan azok a csúcsok szomszédosak, amelyek G'-ben nem; ez lényegében a V'-beli csúcspontokkal rendelkező teljes gráfra vonatkozó komplementer. (Az ilyen gráfok az élek elne-



7.3. ábra

vezésétől eltekintve azonosak, azaz izomorfak.) A 7.3. ábrán szaggatott vonal mutatja a komplementer gráfot, $(v_1, v_2, v_4, e_1, e_4, e_6)$ telített, $(v_1, v_2, v_4, e_1, e_6)$ nem telített részgráf.

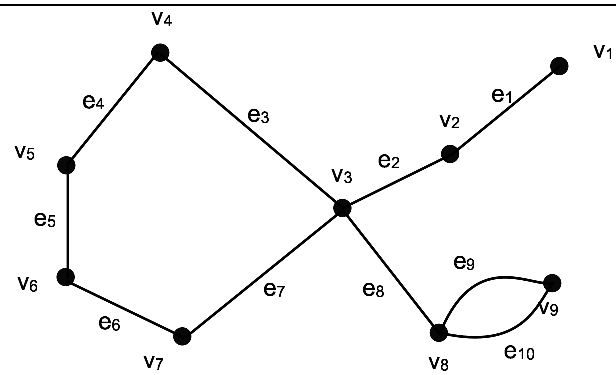
Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf és $E' \subset E$, akkor a G-ből az E' *élhalmaz törlésével kapott gráf* on a $G' = (\varphi|_{E\setminus E'}, E\setminus E', V)$ részgráfot értjük. Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyek illeszkednek valamely V'-beli csúcsra. A G-ből a V' *csúcshalmaz törlésével kapott gráf* on a $G' = (\varphi|_{E\setminus E'}, E\setminus E', V\setminus V')$ részgráfot értjük.

7.1.6. Séták, vonalak, utak és körök. Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf. Egy G-beli n *hosszú séta* v-ből v'-be egy olyan

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

$n \geq 0$ véges sorozat, amelyre e_i a v_{i-1} és v_i csúcsokra illeszkedő él, ha $1 \leq i \leq n$ és $v_0 = v$, $v_n = v'$. Ha $v = v'$, a sétát *zárt sétá*nak nevezünk, egyébként *nyílt sétá*nak. (Az út és az élsorozat elnevezés is elterjedt a séta helyett.) Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor *vonal*nak nevezzük. Ha egy vonal zárt séta, akkor *zárt vonal*nak nevezzük, egyébként *nyílt vonal*nak. Egy sétát *út*nak fogunk nevezni, ha a $v_0, v_1, \ldots, v_n$ csúcsok mind különbözők. (Akik a sétát útnak nevezik, ilyenkor az *egyszerű út* kifejezést használják.) A nulla hosszú séták mind utak és egyetlen csúcsból állnak. Az egy hosszú séták utak, ha a bennük szereplő egyetlen él nem hurokél. Egy út nem tartalmazhat sem hurokélt, sem párhuzamos éleket, sem ugyanazt az élt kétszer. Speciálisan, egy út mindig vonal. Egy legalább egy hosszú zárt vonalat *kör*nek nevezünk, ha a kezdő- és a végpont megegyeznek, de egyébként a vonal bármely más pontja ezektől és egymástól különbözik. Az egy hosszú körök egyetlen hurokélt tartalmaznak. A kettő hosszú körök két különböző de párhuzamos élt tartalmaznak. Ha egy kör 3, 4, ... hosszú, akkor néha *háromszög*nek, *négyszög*nek, ... nevezzük. A 7.4. ábrán $v_1, \ldots, v_9$ séta, de nem út és nem vonal. $v_1, \ldots, v_8$ vonal, de nem út, $v_1, \ldots, v_3$ út is vonal is. $v_3, \ldots, v_7, v_3$ kör.

7.1.7. Állítás. *Az előző pont jelöléseivel, bármely G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve e_i, v_i párokat, a v-t v'vel összekötő utat kaphatunk.*



7.4. ábra

Bizonyítás. Ha $v_i = v_j$, $i < j$, töröljük az

$$e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \ldots, e_j, v_j$$

részt, és ismételjük ezt, amíg minden csúcs különböző lesz. Mivel a séta hossza minden lépésben csökken, az eljárás véges sok lépésben véget ér. □

7.1.8. Állítás. *Bármely G gráfban egy legalább egy hosszúságú zárt vonal véges sok páronként éldiszjunkt kör egyesítése.*

Bizonyítás. Ha nincs ismétlődő csúcs, kivéve, hogy az első és utolsó megegyezik, a vonal már kör, és készen vagyunk. Egyébként az ismétlődő csúcs első előfordulásától a másodikig haladva, egy rövidebb zárt vonalat kapunk, és ezt kihagyva, az eredeti vonalból is egy rövidebb zárt vonal marad. Ezek közül azokkal, amelyek nem körök, megismételjük az eljárást. Minden lépésben, ha van még olyan zárt vonal, amely nem kör, abból két rövidebb vonalat kapunk. Végül csupa kör marad. □

7.1.9. Összefüggőség. Egy gráfot *összefüggő*nek nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy bármely két csúcsa összeköthető úttal. Nyilván egy adott gráf csúcsaira az a reláció, hogy két csúcs összeköthető úttal, ekvivalenciareláció a csúcsok halmazán, így meghatároz egy osztályozást. A csúcsok egy adott osztálya által meghatározott telített részgráf a gráf egy *komponense*. Vegyük észre, hogy két különböző osztályba tartozó csúcs nem lehet szomszédos, így a gráf minden éle hozzátartozik egy komponenshez. Nyilván egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen komponense van.

7.1.10. Fák. Egy gráfot *fá*nak nevezünk, ha összefüggő és nincs köre.

7.1.11. Tétel. *Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *G fa;*

(2) *G összefüggő, de bármely él törlésével a kapott részgráf már nem összefüggő;*

(3) *ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan egy út van v-ből v'-be;*

(4) *G-nek nincs köre, de bármilyen új él hozzávételével kapott gráf már tartalmaz kört.*

Bizonyítás. Ha egy, mondjuk v, v' végpontú élt törölve, a gráf összefüggő maradna, akkor létezne út v-ből v'-be, amit kiegészítve a törölt éllel, egy kört kapnánk, így (1)-ből következik (2). Ha most két különböző út lenne v-ből v'-be, akkor az egyiken szereplő csúcsokat $v, v_1, v_2, \ldots$-vel, a másikban szereplőket $v, v_1', v_2', \ldots$-vel jelölve, legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $v_k \neq v_k'$. Törölve a v_{k-1}, v_k végpontú élt, a gráf összefüggő maradna, mivel bármely sétában, amelyben ez az él szerepel, helyettesíthetjük a $v_{k-1}, v_k', v_{k+1}', \ldots, v', \ldots, v_{k+1}, v_k$ csúcsokon át haladó sétával. Ezzel beláttuk, hogy (2)-ből következik (3). Ha a gráfban van egy $v, v', \ldots, v$ kör, akkor nyilván két út vezet v-ből v'-be, így (3)-ból következik (1).

Végül, ha a gráf fa, akkor körmentes. Ha egy új hurokélt veszünk hozzá, akkor már tartalmaz kört, ha pedig az új él végpontjai $v \neq v'$, akkor a v-ből v'-be vezető utat ezzel kiegészítve, kört kapunk. Megfordítva, ha (4) teljesül, akkor azt kell megmutatni, hogy bármely $v \neq v'$-re vezet séta v-ből v'-be. Vegyünk hozzá egy új élt a gráfhoz, amelynek végpontjai v és v'. Az új gráfban van kör. Ebben az új él kell, hogy szerepeljen. Törölve a körből az új élt, egy utat kapunk v-ből v'-be. □

7.1.12. Tétel. *Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor van legalább két elsőfokú csúcs.*

Bizonyítás. A G-beli utak között van maximális hosszúságú. Válasszunk egy ilyet, ennek hossza legalább 1. Vezessen v-ből v'-be. Megmutatjuk, hogy v és v' is elsőfokúak. Ha valamelyik nem lenne elsőfokú, akkor belőle még vezetne valahova él. Ha egy olyan csúcsba, amely nincs az adott úton, akkor az út hossza nem maximális. Ha egy olyan csúcsba, amely az úton van, akkor a gráfban van kör. □

7.1.13. Tétel. *Egy G egyszerű véges gráfra n csúccsal a következő feltételek ekvivalensek:*

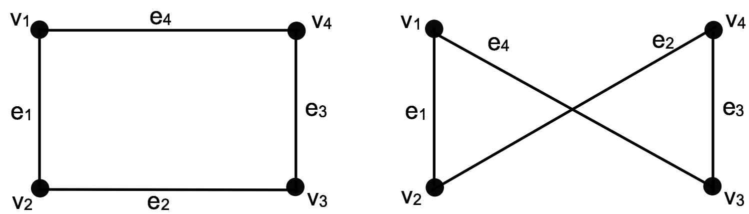
(1) *G fa;*

(2) *G-ben nincs kör és $n-1$ éle van;*

(3) *G összefüggő és $n-1$ éle van.*

Bizonyítás. Ha $n = 1$, az állítás triviális. Tegyük fel, hogy G fa, $n > 1$, és legyen v_n egy olyan csúcsa G-nek, amelynek csak egy szomszédja van, v_{n-1}. Töröljük a v_n csúcsot: a maradék G' gráf fa, mivel bármely útnak v_n csak a kezdőpontja vagy a végpontja lehet. Így n szerinti indukcióval kapjuk (1)-ből (2)-t. Hasonlóan kapjuk (2)-ből (3)-at: a fenti jelölésekkel G összefüggő, mivel v_n-ből vezet út v_{n-1}-be és (teljes indukcióval) v_{n-1}-ből vezet út G'-ben minden más csúcsba. Végül tegyük fel, hogy (3) teljesül. Ha G-nek van köre, akkor a kör bármely élét törölve, egy olyan gráfot kapunk, amely még mindig összefüggő. Folytassuk az élek törlését addig, amíg végül már nem marad kör a gráfban. Ha k lépést tettünk, akkor egy n csúcsú fát kapunk $n - k - 1$ éllel. De mivel (1)-ből következik (2), csak $k = 0$ lehetséges. □

7.1.14. Feszítőfa. Egy G gráf egy *feszítőfá*ja egy olyan F részgráfja G-nek, amely fa és a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával. (Persze, csak összefüggő gráfnak létezhet feszítőfája.) Az 7.5. ábrán két izomorf, de nem identikus gráf látható, $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3$ feszítőfa a baloldali gráfban.



7.5. ábra

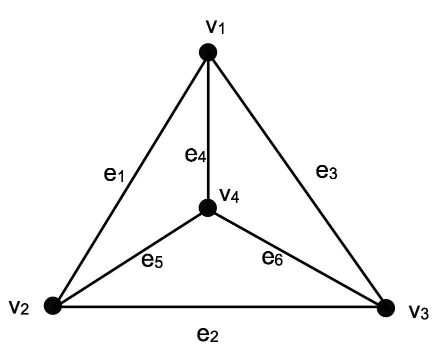
7.1.15. Állítás. *Minden véges összefüggő gráfnak létezik feszítőfája.*

Bizonyítás. A bizonyítás konstruktív. Amíg van a gráfban kör, hagyjuk el annak egyik élét. A maradék gráf összefüggő marad. Véges sok lépésben az eljárás megakad: ekkor a kapott gráf összefüggő és körmentes. □

7.1.16. Állítás. *Egy $G = (\varphi, E, V)$ véges összefüggő gráfban létezik legalább $\natural(E) - \natural(V) + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.*

Bizonyítás. Legyen F egy feszítőfája G-nek. Ennek $\natural(V) - 1$ éle van. Legyen E' a G azon éleinek halmaza, amelyek nem szerepelnek F-ben. Ha $e \in E'$, akkor ezt az élt hozzáadva F-hez, a kapott gráf tartalmaz legalább egy K_e kört. Természetesen az eredeti gráf is tartalmazza K_e-t. A kapott K_e kör tartalmazza e-t, de ha $e \neq e' \in E'$, akkor $K_{e'}$ nem tartalmazza e-t, így a K_e, $e \in E'$ körök élhalmazai mind különbözőek. □

7.1.17. Megjegyzés. Az előző bizonyításban szereplő K_e kör élhalmazát az $e \in E'$ él egyértelműen meghatározza. Ha ugyanis az F feszítőfához hozzáadva az e élt, a kapott gráfban két különböző élhalmazú kör lenne, mivel mindkettő tartalmazza e-t, az e egyik végpontjától a másikig két különböző úton is el lehetne jutni F-ben, így F nem lenne fa. A tételben szereplő szám alsó korlát, hiszen a 7.6. ábrán látható 3-reguláris gráfban több kör van, mint $\natural(E) - \natural(V) + 1$.



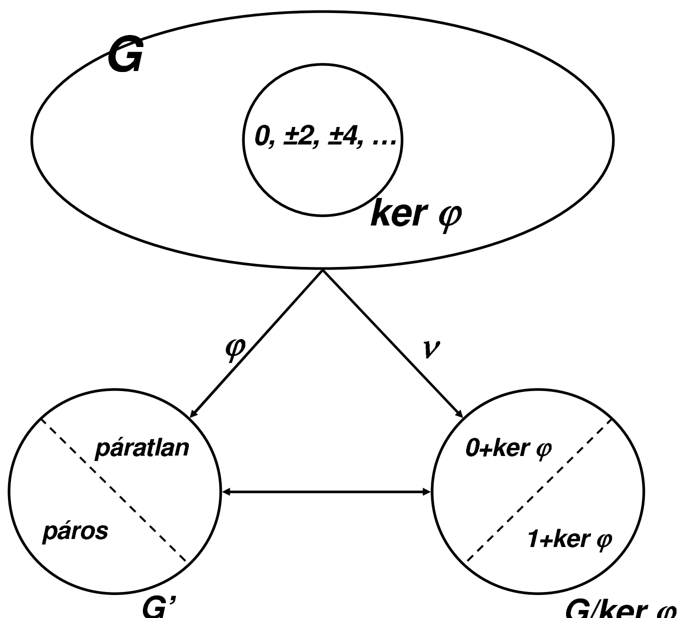
7.6. ábra

8.1.38. Homomorfizmustétel. *Egy G csoport egy φ homomorfizmusánál a homomorfizmus magja normálosztó, és a $G/\ker\varphi$ faktorcsoport izomorf $G' = \varphi(G)$-vel. A G bármely N normálosztója magja valamely homomorfizmusnak: G-nek G/N-re való kanonikus leképezése homomorfizmus, amelynek magja N.*

Bizonyítás. A $\varphi^{-1}(a')$, $a' \in G'$ halmazrendszer a G egy osztályozása. Megmutatjuk, hogy kompatibilis a szorzással. Valóban, bármely $a \in \varphi^{-1}(a')$-re és $b \in \varphi^{-1}(b')$-re $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = a'b'$, azaz $ab \in \varphi^{-1}(a'b')$, függetlenül az a és b választásától. Így e osztálya, ami $\ker\varphi$, normálosztó, és a szerinte vett osztályozás éppen a megadott osztályozás. Az $a' \mapsto \varphi^{-1}(a')$ leképezés G' izomorfizmusa $G/\ker\varphi$-re.

A tétel második fele az előző tétel következményének bizonyítása alapján nyilvánvaló. □

A homomorfizmustétel a 8.3. ábrán tanulmányozható egy konkrét példa segítségével. G az egész számok halmaza a $+$ művelettel, φ függvény minden egészre értelemszerűen a páros vagy páratlan szót adja, így $\ker\varphi = 2\mathbb{Z}$. ν a kanonikus leképezés G és $G/\ker\varphi$ között.

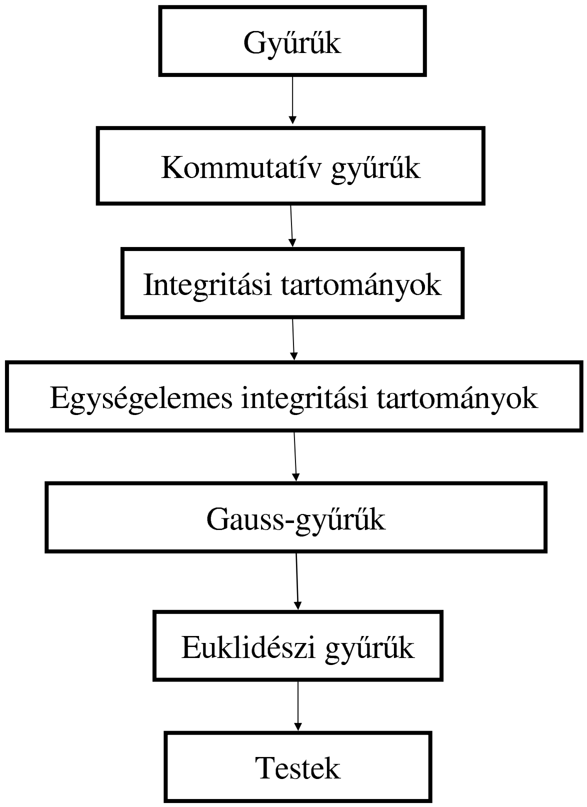


8.3. ábra

8.1.39. Direkt szorzat. Legyen G_i, $i \in I$ egy-egy binér művelettel ellátott halmazok egy családja. Az egyszerűség kedvéért mindegyik halmazon a műveletet jelöljük szorzással. Ekkor a

$$G = \times_{i\in I} G_i$$

Descartes-szorzatot ellátva az $(ab)_i = a_i b_i$, ha $i \in I$ összefüggéssel definiált művelettel, a G-t a G_i, $i \in I$ család *direkt szorzat*ának nevezzük.

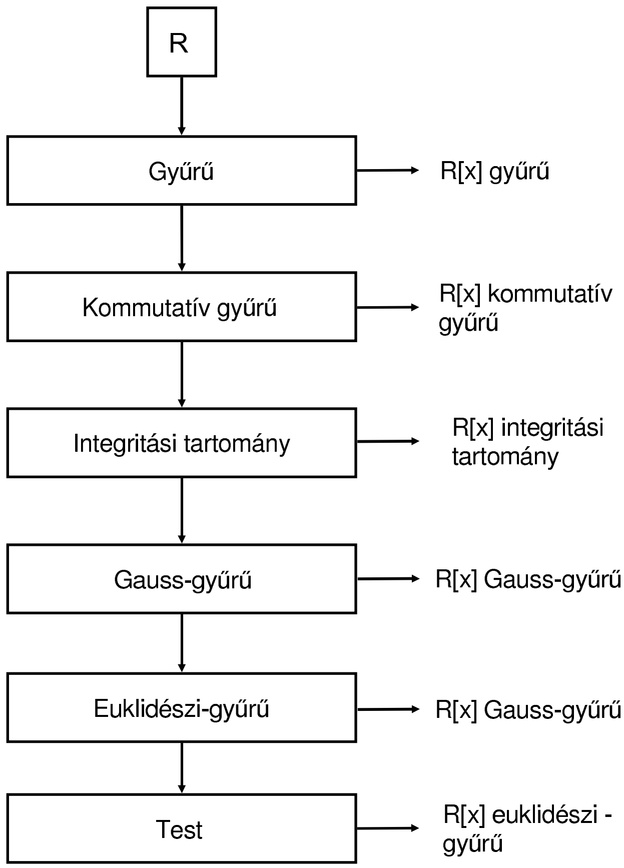


8.4. ábra

8.2.4. Gyűrű karakterisztikája. Úgy a gyűrűknél, mint a testeknél is fontos jellemző az elemek additív rendje, amely bizonyos feltételek teljesülése esetén minden nem nulla elemnél megegyezik.

8.2.5. Tétel. *Egy nullosztómentes R gyűrűben a nemnulla elemek additív rendje megegyezik, ami vagy végtelen, vagy prímszám.*

Bizonyítás. Ha egy nullosztómentes R gyűrűben egy nem nulla a elem additív rendje $n \in \mathbb{N}^+$, és b tetszőleges nem nulla elem, akkor $n(ab) = (na)b = 0b = 0$, másrészt pedig $n(ab) = a(nb)$, így $nb = 0$ kell legyen, azaz b rendje is véges, és legfeljebb annyi, mint a rendje. Mivel a és b szerepe felcserélhető, minden nem nulla elemnek ugyanannyi az additív rendje. Megmutatjuk, hogy ha a közös rend nem nulla, akkor csak prímszám lehet. Ugyanis ha n a nem nulla a elem additív rendje, akkor $n > 1$ és ha $n = km$, akkor $0 = na = k(ma)$. Ha $m < n$, akkor $ma \neq 0$, tehát $k = n$, mert egyébként ma additív rendje kisebb lenne, mint n. $\square$



8.6. ábra

(2) Néha az irreducibilitás bizonyításához a Schönemann–Eisenstein tétel nem alkalmazható közvetlenül, csak némi kerülővel. Például a

$$\sum_{j=0}^{n-1} x^j = \frac{x^n - 1}{x - 1} \in \mathbb{Z}[x]$$

úgynevezett *körosztási polinom*ok nem irreducibilisek, ha n összetett szám, mert ha $n = km$, akkor

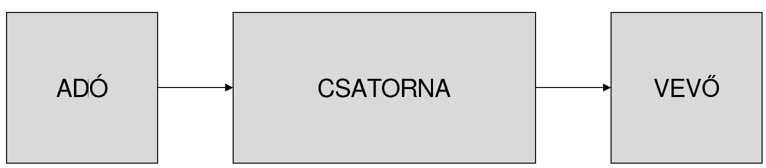
$$\sum_{j=0}^{n-1} x^j = \left(\sum_{j=0}^{k-1} x^{mj}\right)\left(\sum_{j=0}^{m-1} x^j\right).$$

9. KÓDOLÁS

Ebben a fejezetben a kódolás alapjaival foglalkozunk. Elsőként megnézzük, hogy hogyan történik az adatok átvitele.

9.1. Kommunikáció és kódolás

A *kommunikáció* során *információ*t hordozó *adat*okat viszünk át egy *csatorná*n keresztül az *információforrás*tól, az *adó*tól az információ címzettjéhez, a *vevő*höz. Ezt nagy vonalakban az 9.1. ábra mutatja.



9.1. ábra

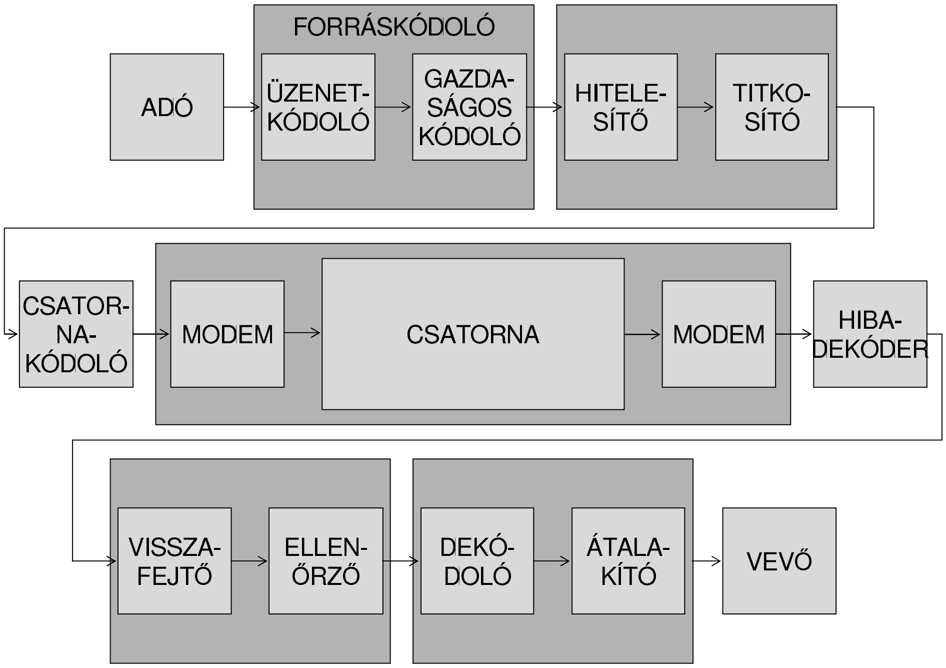
Az ábra szerint az információ átvitele térben történik. Valójában minden információátvitel térben és időben történik, és egyes esetekben az egyik, míg más esetekben a másik dimenzió a domináns. Ha Budapestről Pécsre telefonálunk, akkor az idő nem lényeges, ugyanakkor az információ lemezre való rögzítése, és egy későbbi időpontban való visszaolvasása esetén a helyváltozás kevésbé fontos. A továbbiakban általában úgy beszélünk az adatátvitelről, mintha az térben történne, de ebbe mindig beleértjük az időbeli átvitelt is.

A modellel kapcsolatban felmerül néhány kérdés:

(1) mi az információ, és hogyan mérhető az információ;

(2) hogyan történik az információ átvitele;

(3) milyen kapcsolat van az elküldött és a vett adat között.

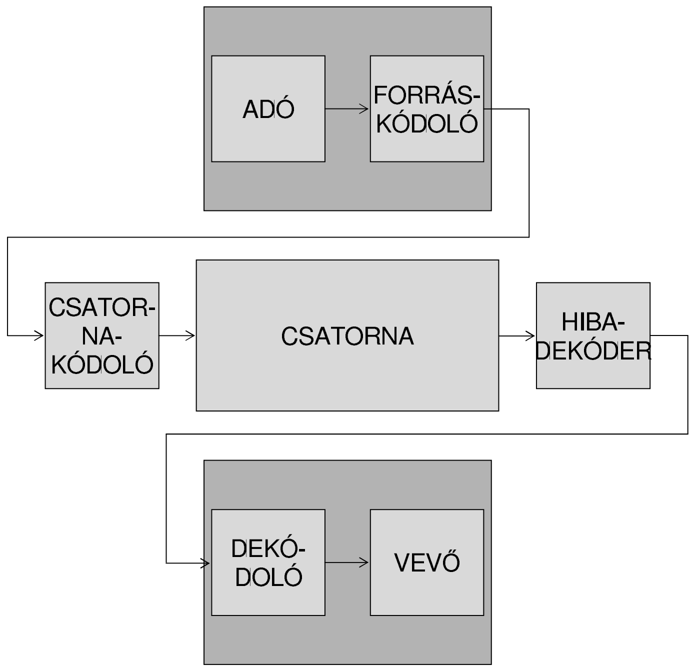


9.2. ábra

betű	kód	betű	kód	betű	kód
A	·—	J	·———	S	···
B	—···	K	—·—	T	—
C	—·—·	L	·—··	U	··—
D	—··	M	——	V	···—
E	·	N	—·	W	·——
F	··—·	O	———	X	—··—
G	——·	P	·——·	Y	—·——
H	····	Q	——·—	Z	——··
I	··	R	·—·		
szám	kód	szám	kód	írásjel	kód
0	—————	5	·····	.	·—·—·—
1	·————	6	—····	,	——··——
2	··———	7	——···	?	··——··
3	···——	8	———··	:	———···
4	····—	9	————·	-	—····—

9.1. táblázat

Itt a kódolandó ábécé az angol ábécé, míg a kódoló ábécé két betűt tartalmaz, a pontot és a vonást, és például az `ad` szó kódja „·——··”. Ezt így nem tudnánk dekódolni,

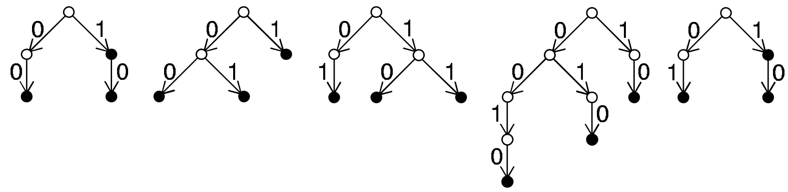


9.3. ábra

ugyanis ez a betűnkénti kódolás az eredeti definíció értelmében nem kódolás, mert nem injektív a megfeleltetés. Például az `emi` szó kódja megegyezik az előbbi kóddal. A valóságban természetesen az egyes jelek, továbbá az egyes betűk adása között meghatározott szünetet tartanak, és így már a kódolás egyértelmű lesz. Konkrétan egy vonás háromszor annyi ideig tart, mint egy pont, és minden jel után egy egységnyi szünet következik, majd a betű kódja végén még további két egységnyi szünet van (egy pont átviteléhez szükséges időt tekintve egységnek). Ha egy egységnyi hosszúságú jelet egy 1-es, és az egységnyi hosszúságú szünetet 0 jelöli, akkor például a `B` kódja, amely az eredeti, ponttal és vonással megadott rendszerben „$-\cdots$", most `111010101000` lesz.

Így már egyértelműen dekódolható a vett üzenet, hiszen minden betű kódja három 0-ra végződik, és nincs olyan betű, amelynél a kód belsejében, vagy a kódszó elején lenne három 0. Ennél a kódnál a három nullának önmagában is van jelentése, ez a szóköz kódja, vagyis ez választja el egymástól az egymás után következő szavak kódját (így egy szó kódjának a végén hat darab 0 áll). Ekkor `ad` kódja 101110001110101000000, míg `emi` kódja 10001110111000101000000, így a két kód jól megkülönböztethető és egyértelműen megfejthető.

9.2.1. Prefix, szuffix, infix; prefixmentes halmaz. Legyen α, β és γ az A ábécével felírt három szó. Ekkor



9.4. ábra

előfordulásának valószínűsége. Ekkor $\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$ *a kód átlagos szóhosszúsága*, ahol l_i az a_i kódjának hossza. Most megnézzük, hogy mekkora lehet adott valószínűségek mellett egy felbontható kód átlagos szóhosszúsága. Ehhez először közelebbről megvizsgáljuk a felbontható kódokat.

9.2.9. Tétel. *Legyen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és B két ábécé, B elemeinek a száma $r \geq 2$, és $\varphi : A \to B^+$ injektív leképezés. Ha a φ által meghatározott betűnkénti kódolás felbontható, akkor $\sum_{i=1}^{n} r^{-|\varphi(a_i)|} \leq 1$. Fordítva, ha $l_1, \ldots, l_n$ olyan pozitív egész számok, hogy $\sum_{i=1}^{n} r^{-l_i} \leq 1$, akkor van az A-nak a B elemeivel való olyan prefix kódolása, hogy az a_i betű kódjának hossza l_i.*

A fenti tételben szereplő egyenlőtlenség a *McMillan-egyenlőtlenség*, amely lényegében véve azt fejezi ki, hogy egy felbontható kódban az átlagos szóhosszúság nem lehet túlságosan kicsi (mert ha a szóhosszúság kicsi, akkor r megfelelő negatív kitevős hatványa nagy, viszont az összeg értéke nem haladhatja meg az 1-et). A tétel második része azt mutatja, hogy egy nem prefix, de felbontható kódnak nincs nagy jelentősége, hiszen ugyanolyan hosszakkal készíthető prefix kód is.

Bizonyítás.

(1) Tekintsük a $\varphi : A \to B^+$ injektív leképezés által meghatározott felbontható kódot. Jelöljük C-vel $\mathrm{rng}(\varphi)$-t, M-mel a tételben megadott $\sum_{i=1}^{n} r^{-|\varphi(a_i)|} \leq 1$ összeget, és $M^{(i)}$-vel a $\sum_{\alpha \in C^i} r^{-|\alpha|}$ összeget, ahol $i \in \mathbb{N}^+$. Ha $\alpha \in C^{i+1}$, akkor α megadható $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ alakban, ahol $\alpha_1 \in C^i$ és $\alpha_2 \in C$, és ha a kód felbontható, akkor ez a felbontás egyértelmű. A megadott jelölések alapján $M^{(1)} = M = M^1$. Tegyük fel, hogy egy pozitív egész n-re $M^{(n)} = M^n$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
M^{(n+1)} &= \sum_{\alpha \in C^{n+1}} r^{-|\alpha|} = \sum_{\alpha_1 \in C^n} \sum_{\alpha_2 \in C} r^{-|\alpha_1\alpha_2|} = \sum_{\alpha_1 \in C^n} \sum_{\alpha_2 \in C} r^{-\left(|\alpha_1|+|\alpha_2|\right)} \\
&= \sum_{\alpha_1 \in C^n} \sum_{\alpha_2 \in C} r^{-|\alpha_1|} r^{-|\alpha_2|} = \sum_{\alpha_1 \in C^n} r^{-|\alpha_1|} \sum_{\alpha_2 \in C} r^{-|\alpha_2|} \\
&= M^{(n)} M = M^n M = M^{n+1},
\end{aligned}
$$

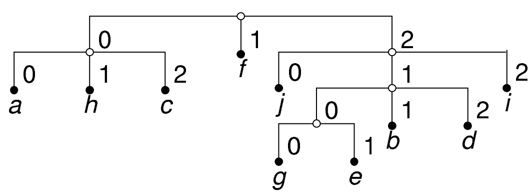
ahol a második egyenlőségnél használtuk ki, hogy a kód felbontható.

hossza 3, ezért ezt még jobbról ki kell egészíteni egy darab 0-val, tehát j kódja 110. Hasonlóan haladva megkapjuk a teljes kódot, amelyet az 9.5. táblázat mutat. Most a kód átlagos szóhosszúsága $\overline{L} = 2,3$, amely nagyobb, mint a Huffman-kódnál volt, de kisebb, mint az entrópia plusz 1.

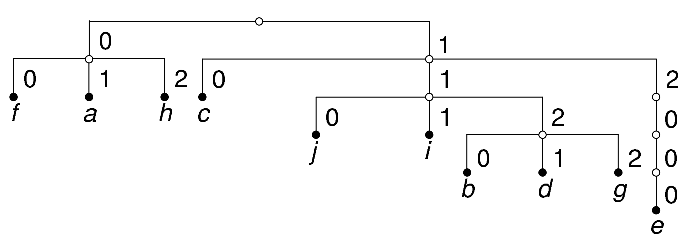
betű	kód	betű	kód
f	$\varphi(f) = 00$	a	$\varphi(a) = 01$
a	$\varphi(a) = 01$	b	$\varphi(b) = 1120$
h	$\varphi(h) = 02$	c	$\varphi(c) = 10$
c	$\varphi(c) = 10$	d	$\varphi(d) = 1121$
j	$\varphi(j) = 110$	e	$\varphi(e) = 12000$
i	$\varphi(i) = 111$	f	$\varphi(f) = 00$
b	$\varphi(b) = 1120$	g	$\varphi(g) = 1122$
d	$\varphi(d) = 1121$	h	$\varphi(h) = 02$
g	$\varphi(g) = 1122$	i	$\varphi(i) = 111$
e	$\varphi(e) = 12000$	j	$\varphi(j) = 110$

9.5. táblázat

Az 9.5. és 9.6. ábra mutatja a két kód kódfáját.



9.5. ábra



9.6. ábra