

Bevezetés a matematikába

Járai Antal

Ezek a programok csak szemléltetésre szolgálnak.

- ▶ 1. Halmazok
- ▶ 2. Természetes számok
- ▶ 3. A számfogalom bővítése
- ▼ 4. Véges halmazok

```
> restart;
```

▼ 4.1. Véges halmazok alaptulajdonságai

▶ 4.1.1. *Halmazok ekvivalenciája.*

▶ 4.1.2. *Állítás.*

▶ 4.1.3. *Megjegyzés.*

▶ ->4.1.4. *Feladat.*

▼ ->4.1.5. *Feladat.*

▶ ->4.1.6. *Feladat.*

▶ ->4.1.7. *Feladat.*

▶ 4.1.8. *Tétel.*

▶ 4.1.9. *Tétel.*

▼ 4.1.10. *Véges és végtelen halmazok.*

```
> X:={a,aa,b,c,d}; nops(X); nops({});  
X:= {a, aa, b, d, c}
```

5

0

(4.1.10.1)

▶ 4.1.11. *Tétel.*

▶ 4.1.12. *Skatulya elv.*

- ▶ **4.1.13. Tétel.**
- ▶ **4.1.14. Feladat.**
- ▶ **4.1.15. Feladat.**
- ▶ **->4.1.16. Feladat.**
- ▶ **->4.1.17. Feladat.**
- ▶ **->4.1.18. Feladat.**
- ▶ **->4.1.19. Feladat.**
- ▶ **->4.1.20. Feladat.**
- ▶ **->4.1.21. Feladat.**
- ▼ **->4.1.22. Feladat.**
- ▶ ***4.1.23. Feladat.**
- ▶ ***4.1.24. Feladat.**
- ▶ **4.1.25. Feladat.**
- ▶ **4.1.26. További feladatok.**

▼ 4.2. Kombinatorika

```
> with(combinat);
```

[Chi, bell, binomial, cartprod, character, choose, composition, conjpart, decodepart, encodepart, fibonacci, firstpart, graycode, inttovec, lastpart, multinomial, nextpart, numbc comb, numbc comp, numbp art, numbp erm, partition, permute, powerset, prevp art, randc omb, randp art, randp erm, setp artition, stirling1, stirling2, subsets, vectoint]

(4.2.1)

▼ 4.2.1. Permutációk.

```
> L:=[a,b,c,d]; permute(L); numbp erm(L);
```

$L := [a, b, c, d]$

[[a, b, c, d], [a, b, d, c], [a, c, b, d], [a, c, d, b], [a, d, b, c], [a, d, c, b], [b, a, c, d], [b, a, d, c], [b, c, a, d], [b, c, d, a], [b, d, a, c], [b, d, c, a], [c, a, b, d], [c, a, d, b], [c, b, a, d], [c, b, d, a], [c, d, a, b], [c, d, b, a], [d, a, b, c], [d, a, c, b], [d, b, a, c], [d, b, c, a], [d, c, a, b], [d, c, b, a]]

24

(4.2.1.1)

▼ 4.2.2. Variációk.

```

> L; permute(L,2); numbperm(L,2);
      [a, b, c, d]
[[a, b], [a, c], [a, d], [b, a], [b, c], [b, d], [c, a], [c, b], [c, d], [d, a],
 [d, b], [d, c]]
      12
(4.2.2.1)

```

▼ 4.2.3. Ismétléses variációk.

```

> L:=[a,a,b,b,c,c,d,d]; permute(L,2); numbperm(L,2);
      L:= [a, a, b, b, c, c, d, d]
[[a, a], [a, b], [a, c], [a, d], [b, a], [b, b], [b, c], [b, d], [c, a], [c, b],
 [c, c], [c, d], [d, a], [d, b], [d, c], [d, d]]
      16
(4.2.3.1)

```

▼ 4.2.4. Kombinációk.

```

> L:=[a,b,c,d]; choose(L,2); numbcmb(L,2);
      L:= [a, b, c, d]
[[a, b], [a, c], [a, d], [b, c], [b, d], [c, d]]
      6
(4.2.4.1)

```

▼ 4.2.5. Ismétléses kombinációk.

```

> L:=[a,a,b,b,c,c,d,d]; choose(L,2); numbcmb(L,2);
      L:= [a, a, b, b, c, c, d, d]
[[a, a], [a, b], [a, c], [a, d], [b, b], [b, c], [b, d], [c, c], [c, d], [d, d]]
      10
(4.2.5.1)

```

▼ 4.2.7 Ismétléses permutációk.

```

> L:=[a,a,b,b,b,c]; permute(L);
      L:= [a, a, b, b, b, c]
[[a, a, b, b, b, c], [a, a, b, b, c, b], [a, a, b, c, b, b], [a, a, c, b, b, b], [a,
 b, a, b, b, c], [a, b, a, b, c, b], [a, b, a, c, b, b], [a, b, b, a, b, c], [a,
 b, b, a, c, b], [a, b, b, b, a, c], [a, b, b, b, c, a], [a, b, b, c, a, b], [a,
 b, b, c, b, a], [a, b, c, a, b, b], [a, b, c, b, a, b], [a, b, c, b, b, a], [a,
 c, a, b, b, b], [a, c, b, a, b, b], [a, c, b, b, a, b], [a, c, b, b, b, a], [b,
 a, a, b, b, c], [b, a, a, b, c, b], [b, a, a, c, b, b], [b, a, b, a, b, c], [b,
 a, b, a, c, b], [b, a, b, b, a, c], [b, a, b, b, c, a], [b, a, b, c, a, b], [b,
 a, b, c, b, a], [b, a, c, a, b, b], [b, a, c, b, a, b], [b, a, c, b, b, a], [b,

```

$b, a, a, b, c], [b, b, a, a, c, b], [b, b, a, b, a, c], [b, b, a, b, c, a], [b,$
 $b, a, c, a, b], [b, b, a, c, b, a], [b, b, b, a, a, c], [b, b, b, a, c, a], [b,$
 $b, b, c, a, a], [b, b, c, a, a, b], [b, b, c, a, b, a], [b, b, c, b, a, a], [b,$
 $c, a, a, b, b], [b, c, a, b, a, b], [b, c, a, b, b, a], [b, c, b, a, a, b], [b,$
 $c, b, a, b, a], [b, c, b, b, a, a], [c, a, a, b, b, b], [c, a, b, a, b, b], [c,$
 $a, b, b, a, b], [c, a, b, b, b, a], [c, b, a, a, b, b], [c, b, a, b, a, b], [c,$
 $b, a, b, b, a], [c, b, b, a, a, b], [c, b, b, a, b, a], [c, b, b, b, a, a]]$

> **multinomial(6,2,3,1);**

60

(4.2.6.2)

- ▶ ->4.2.7. Feladat.
- ▶ ->4.2.8. Feladat.
- ▶ ->4.2.9. Feladat.
- ▶ ->4.2.10. Feladat.
- ▶ ->4.2.11. Feladat.
- ▶ ->4.2.12. Feladat.
- ▶ ->4.2.13. Feladat.
- ▶ ->4.2.14. Feladat.
- ▶ ->4.2.15. Feladat.
- ▶ ->4.2.16. Feladat.
- ▶ 4.2.17. Feladat.
- ▼ ->4.2.18. Feladat.
- ▼ ->4.2.19. Feladat.
- ▶ 4.2.20. Feladat.
- ▼ ->4.2.21. Feladat.
- ▶ ->4.2.22. Feladat.
- ▶ ->4.2.23. Feladat.
- ▼ ->4.2.24. Feladat.
- ▶ *4.2.25. Feladat.
- ▶ *4.2.26. Feladat.
- ▶ 4.2.27. Feladat.
- ▶ *4.2.28. Feladat.
- ▶ 4.2.29. Feladat.
- ▶ 4.2.30. Feladat.
- ▼ 4.2.31. Feladat.

- ▼ 4.2.32. Feladat.
- ▶ 4.2.33. Feladat.
- ▶ 4.2.34. Feladat.
- ▶ 4.2.35. Feladat.
- ▶ 4.2.36. Feladat.
- ▶ 4.2.37. További feladatok megoldásokkal.
- ▶ 4.2.38. További feladatok.

▼ 4.3. Polinomiális tétel, szita formula

▼ 4.3.1. Binomiális tétel.

$$\begin{aligned}
 &> (x+y)^6; \text{ expand(\%); sum(binomial(n,k)*x^k*y^{(n-k)},k=0..n);} \\
 &\quad (x+y)^6 \\
 &\quad x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \\
 &\quad \left(\frac{x}{y} + 1\right)^n y^n \qquad (4.3.1.1)
 \end{aligned}$$

▼ 4.3.2. Következmény.

$$\begin{aligned}
 &> \text{sum(binomial(n,k),k=0..n); sum(binomial(n,k)*(-1)^k,k=0..n)} \\
 &\quad ; \\
 &\quad 2^n \\
 &\quad 0 \qquad (4.3.2.1)
 \end{aligned}$$

▼ 4.3.3. Polinomiális tétel.

$$\begin{aligned}
 &> (x+y+z)^4; \text{ expand(\%);} \\
 &\quad (x+y+z)^4 \\
 &\quad 12xyz^2 + 12x^2yz + 12xy^2z + x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 \quad (4.3.3.1) \\
 &\quad + 6x^2z^2 + 4xy^3 + 4xz^3 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3
 \end{aligned}$$

▶ 4.3.4. Logikai szita formula.

▼ 4.3.5. Példa.

$$\begin{aligned}
 &> 120, -\text{floor}(120/2), -\text{floor}(120/3), -\text{floor}(120/5), -\text{floor}(120/7) \\
 &\quad , \text{floor}(120/6), \text{floor}(120/10), \text{floor}(120/14), \text{floor}(120/15), \\
 &\quad \text{floor}(120/21), \text{floor}(120/35), -\text{floor}(120/30), -\text{floor}(120/42), - \\
 &\quad \text{floor}(120/70), -\text{floor}(120/105), \text{floor}(120/210); \qquad (4.3.5.1)
 \end{aligned}$$

120, -60, -40, -24, -17, 20, 12, 8, 8, 5, 3, -4, -2, -1, -1, 0 (4.3.5.1)

> '+' (%);

27

(4.3.5.2)

- ▶ ->4.3.6. Feladat.
- ▶ ->4.3.7. Feladat.
- ▶ ->4.3.8. Feladat.
- ▶ ->4.3.9. Feladat.
- ▶ ->4.3.10. Feladat.
- ▶ ->4.3.11. Feladat.
- ▶ ->4.3.12. Feladat.
- ▶ 4.3.13. Feladat.
- ▶ 4.3.14. Feladat.
- ▶ ->4.3.15. Feladat.
- ▶ 4.3.16. Feladat.
- ▶ ->4.3.17. Feladat.
- ▶ ->4.3.18. Feladat.
- ▶ 4.3.19. Feladat.
- ▶ 4.3.20. Feladat.
- ▶ 4.3.21. Feladat.
- ▶ 4.3.22. Feladat.
- ▶ 4.3.23. További feladatok megoldásokkal.
- ▶ 4.3.24. További feladatok.

▶ 5. Végtelen halmazok

▶ 6. Számelmélet

▶ 7. Gráfelmélet

▶ 8. Algebra

▶ 9. Kódolás

▶ 10. Algoritmusok

