• 94/8 :

$<$

jelöléseket.

$>$

jelöléseket.

Az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbb{U}_1(0)$, $\mathbb{B}_1(0)$ és $\mathbb{S}_1(0)$ gömböket olyan gyakran hasznaljuk, hogy ezekre külön jelölést vezetünk be: $\mathbb{U}_n$, $\mathbb{B}^n$ és $\mathbb{S}_{n-1}$.

• 116/−16 :

$<$

ra, a $T_i(x) = x$ fixpont problémával. Melyik T_i alkalmas iterációra?

$>$

a $T_i(x) = x$ fixpont problémával. Melyik T_i alkalmas iterációra?

Feladat [9]. Tekintsük az $F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, 2x_1 + x_2 - 1)$ függvény. Legyen

$$T_1(x_1, x_2) = \Big((1 - x_2)/2, \sqrt{1 - x_1^2}\Big), \quad T_2(x_1, x_2) = \Big((1 - x_2)/2, \sqrt{1 - x_1^2}\Big).$$

Mutassuk meg, hogy a $(-0{,}9, 0{,}9)$ pontból indítva T_1 az $F(x) = 0$ egyenlet egyik, a $(0{,}9, 0{,}9)$ pontból indítva T_2 a másik megoldásához konvergál. Magyarázzuk meg a konvergenciák sebessége közötti különbséget.

• 116/−1 :

$<$

a legkisebb Lipschitz-konstans?

$>$

a legkisebb Lipschitz-konstans?

* **Fixpont tulajdonság.** Az X metrikus teret *fixpont tulajdonság*únak nevezzük, ha X bármely önmagába való folytonos leképezésének van fixpontja. A fixpont-tulajdonság nyilván topológiai tulajdonság.

* **Retraktum.** Egy X metrikus tér egy Y részhalmazára azt mondjuk, hogy az X *retraktum*a, ha van olyan folytonos leképezése X-nek Y-ra, amely Y-on az identitás. Az hogy Y retraktuma X-nek, nyilván topológiai tulajdonság. Például egy Hilbert-tér bármely nem üres zárt konvex részhalmaza bármely nála bővebb halmaznak retraktuma: a retrakciót úgy kapjuk, hogy minden ponthoz a hozzá legközelebbi Y-beli pontot rendeljük.

* **Tétel.** *Ha az X metrikus tér fixpont tulajdonságú és Y retraktuma X-nek, akkor Y is fixpont-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen $r : X \to Y$ egy retrakció. Ha T folyonos leképezése Y-nak önmagába, akkor $T \circ r$ folytonos leképezése X-nek Y-ba. Mivel X fixpont tulajdonságú, és $Y \subset X$, van x fixpont, amelyre $T\big(r(x)\big) = x$. Nyilván $x \in Y$, és így $r(x) = x$, amiből $T(x) = x$.

* **Összehúzhatóság.** Az X metrikus teret (az X egy x_0 pontjára) *összehúzhatónak* nevezzük, ha van olyan $f : X \times [0,1] \to X$ folytonos függvény, amelyre $f(x,0) = x$ és $f(x,1) = x_0$ minden $x \in X$-re. Az összehúzhatóság nyilván topológiai tulajdonság.

* **Tétel.** *Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{S}^n$ nem összehúzható.*

Bizonyítás. Azt az elemi geometriai tényt fogjuk felhasználni, hogy ...

* **Tétel.** *Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\mathbb{S}^{n-1}$ nem retraktuma $\mathbb{B}^n$-nek.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha X összehúzható, akkor X bármely Y retraktuma is összehúzható: valóban, ha r a retrakciója X-nek Y-ra, és f összehúzza X-et x_0-ra, akkor $r \circ f$ összehúzza Y-t $r(x_0)$-ra. Mivel $\mathbb{B}^n$ nyilván összehúzható, $\mathbb{S}^{n-1}$ pedig nem, $\mathbb{S}^{n-1}$ nem lehet $\mathbb{B}^n$ retraktuma.

* **Brouwer-féle fixponttétel.** *Az $\mathbb{R}^n$ bármely nem üres X kompakt konvex részhalmaza fixpont tulajdonságú.*

Bizonyítás. Először $\mathbb{B}^n$-re bizonyítjuk be az állítást. Ha létezne olyan $T : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ leképezés, amelynek nincs fixpontja, akkor tudnánk konstruálni $\mathbb{B}^n$-nek egy retrakcióját $\mathbb{S}^{n-1}$-re: minden $x \in \mathbb{B}^n$-re hosszabbítsuk meg a $T(x)$-ből x-be vezető szakaszt amíg metszi $\mathbb{S}^{n-1}$-et. Jelöljük ezt a pontot $r(x)$-el. Az r egy retrakciója $\mathbb{B}^n$-nek $\mathbb{S}^{n-1}$-re.

Ha most R elég nagy, akkor az R sugarú, origó középpontú gömb tartalmazza X-et. Mivel X retraktuma $R \cdot \mathbb{B}^n$-nek, X is fixpont tulajdonságú.

* **Megjegyzés.** A Brouwer-féle fixponttételnek számos alkalmazása van: egyrészt más fixponttételek bizonyíthatók belőle, másrészt olyan egyenlőtlenségek, amelyeknek fontos játékelméleti (például a *Nash-féle egyensúlypont* létezése, *Neumann minimax tétele*) és közgazdasági alkalmazásaik vannak (a matematikai közgazdaságtan fő tétele), de az is belátható segítségével, hogy $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ nem homeomorfak, ha $m \neq n$. Lásd [145], 77. fejezet.

- 117/3 :

$<$

oldására. Az alábbiakban vázoljuk az alapgondolatot. A különböző fixpont-

$>$

olhatóságának bizonyítására, és elsősorban a Banach-féle fixponttétel az egyenletek megoldására is. Az alábbiakban vázoljuk az alapgondolatot. A különböző fixpont-

- 117/14 :

$<$

ra, akkor a *módosított Newton-módszer*t kapjuk. Ha előbb az $x = x$ azonos-

$>$

ra, akkor a *módosított Newton-módszer*t kapjuk. Ha G az x-től is függ, $G(x)(y) = F'(x)^{-1}(y)$, akkor a *Newton-módszer*t kapjuk. Ha előbb az $x = x$ azonos-

- 117/−6 :

  $<$

közelítésekből a $\Delta = \Delta_1$ differenciaoperátorral

$$\Delta x_n \approx cq^n(q-1), \qquad \Delta^2 x_n \approx cq^n(q-1)^2,$$

így $(\Delta x_n)^2/\Delta^2 x_n \approx cq^n$, amiből

$$x \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

  $>$

közelítésekből a $\Delta = \Delta_1$ differenciaoperátorral

$$\Delta x_n \approx cq^n(q-1), \quad \Delta x_{n+1} \approx cq^{n+1}(q-1), \quad \Delta^2 x_n \approx cq^n(q-1)^2,$$

így $\Delta x_{n+1}/\Delta x_n \approx q$, továbbá $(\Delta x_n)^2/\Delta^2 x_n \approx cq^n$, amiből

$$x \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

- 151/−19 :

  $<$

  Bizonyítás. Legyen $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$, és alkalmazzuk a tételt.

* **Második konjugált tér.** Bármely X normált térre X^* Banach-tér. Képezhetjük a további konjugált tereket is: $X^{**} = (X^*)^*$, $X^{***} = (X^{**})^*$, stb. Az X és X^{**} között fontos kapcsolat van: ha $x \in X$ rögzített, legyen $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$. A definícióból azonnal adódik, hogy F_x lineáris funkcionál X^*-on. F_x korlátos is, mert $\big|F_x(f)\big| = \big|f(x)\big| \le \|f\|\|x\|$, amiből következik, hogy $\|F_x\| \le \|x\|$. Továbbá a Hahn–Banach-tétel következménye miatt van olyan $f \in X^*$, amelyre $\|f\| = 1$, és $f(x) = \|x\|$. Erre az f-re $\big|F_x(f)\big| = \|x\|$, így $\|F\| = \|x\|$. Így az $x \mapsto F_x$ leképezése X-nek X^{**}-ba normatartó, tehát izometria. Ezt a leképezést az X normált tér X^{**}-ba való *természetes leképezés*ének nevezzük. A definíció alapján azonnal következik, hogy a természetes leképezés lineáris. Ha a természetes leképezés X^{**}-ra képez, akkor X-et *reflexív*nek nevezzük. Természetesen ekkor X Banach-tér kell legyen.

* **Gyenge konvergencia:** Ha X tetszőleges halmaz, Y metrikus tér, (vagy általánosabban, ha topologikus tér), az Y^X függvénytérben és ennek altereiben értelmezve van a függvénysorozatok pontonkénti konvergenciája. (Ez a konvergencia származik a szorzattopológiából.) Ha $Y = \mathbb{K}$ és X normált tér $\mathbb{K}$ felett (általánosabban, ha topologikus vektortér), akkor a folytonos lineáris funkcionálok terén ezt a konvergenciát *gyenge* konvergenciá*nak (egyes szerzők gyenge konvergenciának) szokták nevezni, a topológiát, amiből származik, pedig *gyenge* topológiá*nak. Jelentőségét az adja, hogy egy X normált tér X^* konjugált terének egységgömbjét ebben a topológiában tekintve az kompakt, és ha X szeparábilis volt, akkor metrizálható is. Ezt a konvergenciát használva a normából származó konvergencia helyett, elkerülhető azoknak a nehézségeknek egy része, amelyek a variációszámításban és a parciális differenciálegyenleteknél az egységgömb kompaktságának hiánya okoz. Ezért vezette be Hilbert ezt a konvergenciát.

Ha X Hilbert-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján X^* elemeit X elemeivel azonosíthatjuk, és így a gyenge* topológiát átmásolhatjuk X-re. Általánosabban, ha X normált tér, a következőképpen járhatunk el. Minden $x \in X$-hez hozzárendelünk egy $F_x \in X^{**}$ lineáris funkcionált az $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$ összefüggéssel. A Hahn–Banach-tétel következménye szerint az $x \mapsto F_x$ leképezés lineáris izometrikus beágyazása X-nek X^{**}-ba. Így X minden eleme egy X^*-on értelmezett funkcionálnak tekinthető, és X^{**} elemeinek pontonkénti konvergenciája (és a topológia, amiből származik) átmásolható X-re. Ezt a konvergenciát *gyenge konvergenciá*nak, a topológiát, amiből származik, *gyenge topológiá*nak szokás nevezni. Ha az $x \mapsto F_x$ leképezés az X^{**}-ra képez le, akkor X-et reflexívnek nevezzük, és X-et X^{**}-gal azonosíthatjuk. Reflexív terek esetén (speciálisan Hilbert-tereknél) a gyenge és gyenge* topológia megegyezik.

A gyenge és gyenge* topológiák vizsgálatával a topologikus vektorterek elmélete foglalkozik. A legegyszerűbb tényeket illetően lásd Losonczi [82] jegyzetét. Részletes hivatkozások találhatók Zeidler [145] könyvében. Megjegyezzük, hogy a lineáris operátorok terében is fontos a pontonkénti konvergencia, amelyet néha erős konvergenciának szokás nevezni.

$>$

Bizonyítás. Legyen $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$, és alkalmazzuk a tételt.

- 153/−9 :

$<$

hogy $x = tx_0 + a$-ra $t > 0$ esetén $f(x) > d$, holott $|t| < \varepsilon$ esetén $x \in A + \mathbb{U}_\varepsilon(0)$.

$>$

hogy $x = tx_0 + a$-ra $t > 0$ esetén $f(x) > d$, holott $|t| < \varepsilon$ esetén $x \in A + \mathbb{U}_\varepsilon(0)$.

* **Definíció:** Ha X normált tér, akkor $Y \subset X$ *annullátor*a az

$$^\perp Y = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ minden } x \in Y\text{-ra}\}$$

halmaz, ami nyilván zárt lineáris altér. Ha $Y \subset X^*$, akkor Y *annullált*ja az

$$Y^\perp = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ minden } f \in Y\text{-ra}\}$$

halmaz, ami nyilván zárt lineáris altér.

* **Tétel:** *Ha X normált tér, $Y \subset X$, akkor $^\perp(X^\perp)$ az Y lineáris burkának a lezártja.*

Bizonyítás. Minden $f \in X^\perp$ nulltere zárt és tartalmazza Y-t, tehát Y lineáris burkának a lezártja része a metszetüknek. Így csak azt kell észrevennünk, hogy ha x nincs az Y lineáris burkának Z lezártjában, akkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan $c \in \mathbb{R}$ és f valós lineáris folytonos funkcionál, hogy $f(Z) \leq c < f(x)$; mivel $f(Z)$ az $\mathbb{R}$ altere, $f(Z) = \{0\}$ és $0 < f(x) \neq 0$, így $x \notin {}^\perp(Y^\perp)$. Ha X komplex tér, tekintsük az $f(x) - if(ix)$ funkcionált.

* **Tétel:** *Ha X normált tér és X^* szeparábilis, akkor X is.*

Bizonyítás. Legyen $f_n \in X^*$ egy megszámlálható sűrű halmaz, és válasszunk minden n-re egy $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ elemet, amelyre $|f_n(x_n)| > \|f_n\|/2$. Megmutatjuk, hogy az x_n-ek lineáris burka sűrű X-ben. Az előző tétel szerint elég azt megmutatnunk, hogy ha egy $f \in X^*$ lineáris funkcionál nulla minden x_n-en, akkor nulla mindenütt. Tegyük fel, hogy nem, és van olyan $f \in X^*$, amelyre $f(x_n) = 0$ minden n-re, de $\|f\| = 1$. Mivel az f_n-ek sűrű halmazt alkotnak, van olyan f_n, amelyre $\|f - f_n\| < 1/3$. De ekkor $1/3 > \big|(f - f_n)(x_n)\big| = \big|(f_n(x_n)\big| > 1/2$.

* **Második konjugált tér.** Bármely X normált térre X^* Banach-tér. Képezhetjük a további konjugált tereket is: $X^{**} = (X^*)^*$, $X^{***} = (X^{**})^*$, stb. Az X és X^{**} között fontos kapcsolat van: ha $x \in X$ rögzített, legyen $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$. A definícióból azonnal adódik, hogy F_x lineáris funkcionál X^*-on. F_x korlátos is, mert $\big|F_x(f)\big| = \big|f(x)\big| \le \|f\|\|x\|$, amiből következik, hogy $\|F_x\| \le \|x\|$. Továbbá a Hahn–Banach-tétel következménye miatt van olyan $f \in X^*$, amelyre $\|f\| = 1$, és $f(x) = \|x\|$. Erre az f-re $\big|F_x(f)\big| = \|x\|$, így $\|F_x\| = \|x\|$. Így az $F : x \mapsto F_x$ leképezése X-nek X^{**}-ba normatartó, tehát izometria. Ezt az F leképezést az X normált tér X^{**}-ba való *természetes leképezés*ének nevezzük. A definíció alapján azonnal következik, hogy a természetes leképezés lineáris. Ha a természetes leképezés X^{**}-ra képez, akkor X-et *reflexív*nek nevezzük. Természetesen ekkor X Banach-tér kell legyen. Egy reflexív tér konjugált tere is reflexív: ha $G : f \mapsto G_f$ az X^* természetes leképezése X^{***}-ba, akkor tetszőleges $g \in X^{***}$ az értékkészletben van, mert az $f(x) = g(F_x)$ funkcionálra $G_f(F_x) = F_x(f) = f(x)$. Nyilvánvaló példák reflexív terekre a Hilbert-terek. Feladatként szerepelt az is, hogy az $\mathbb{L}^p$-terek reflexívek $1 < p < \infty$ esetén, konjugált terük $\mathbb{L}^q$, ahol $1/p + 1/q = 1$. Példa nem reflexív térre $\mathcal{C}[0,1]$: minden $x \in [0,1]$-re az $f \mapsto f(x)$ funkcionálok a konjugált térben vannak, és távolságuk páronként 2, így a konjugált tér nem szeparábilis, tehát az előző tétel szerint a tér nem lehet reflexív. Az $\mathbf{l}^1$ tér sem reflexív, mert konjugált tere $\mathbf{l}^\infty$, ami nem szeparábilis. Ugyancsak nem reflexívek a c_0 és c terek, mert konjugált terük $\mathbf{l}^1$, amint az nemsokára belátjuk.

* **Tétel:** *Ha Y az X reflexív Banach-tér zárt lineáris altere, akkor Y is reflexív.*

Bizonyítás. Az $f \mapsto f|_Y$ leképezés a Hahn–Banach-tétel szerint X^*-ot Y^*-ra képezi. Tetszőleges $\alpha \in Y^{**}$-ra legyen $\beta(f) = \alpha(f|_Y)$. Mivel X reflexív, ez az eleme X^{**}-nak előáll F_x alakban valamely $x \in X$-re, ahol F a természetes leképezése X-nek X^{**}-ra, azaz $\beta(f) = f(x)$. Megmutatjuk, hogy $x \in Y$. Mivel minden $f \in Y^\perp$-re $f(x) = 0$, azt kapjuk, hogy x az Y lineáris burkának a lezártjában van.

- 155/5 :

$<$

amiből következik az állítás.

* **Tétel.** *Ha az $y = (y_1, y_2, \dots)$ számsorozatra bármely $x = (x_1, x_2, \dots)$ konvergens sorozat esetén a $\sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ sor konvergens, akkor $y \in \mathbf{l}^1$, azaz $\sum_{k=1}^\infty |y_k| < \infty$,*

és $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ *korlátos lineáris funkcionál a konvergens sorozatok terén, amelynek normája* $\|f\| = \|y\|_1$.

$>$

amiből következik az állítás.

* **Gyenge és gyenge* topológia.** Ha X tetszőleges halmaz, Y metrikus tér, (vagy általánosabban, ha topologikus tér), az Y^X függvénytérben és ennek altereiben értelmezve van a függvénysorozatok pontonkénti konvergenciája. (Ez a konvergencia származik a szorzattopológiából.) Ha $Y = \mathbb{K}$ és X normált tér $\mathbb{K}$ felett (általánosabban, ha topologikus vektortér), akkor a folytonos lineáris funkcionálok terén ezt a konvergenciát — tehát a pontonkénti konvergenciát — *gyenge* konvergenciá*nak (egyes szerzők gyenge konvergenciának) szokták nevezni. A szorzattopológia megszorítása X^*-ra úgy is megadható, mint az összes olyan topológiák metszete, amelyekre minden $f \mapsto f(x)$, $x \in X$ függvény folytonos; ezt *gyenge* topológiá*nak nevezzük. Ebből a topológiából a gyenge* konvergencia származik. Jelentőségét a *Banach–Alaoglu-tétel* adja: egy X Banach-tér X^* konjugált terének egységgömbjét ebben a topológiában tekintve az kompakt (megmutatható, hogy ha X szeparábilis volt, akkor metrizálható is). Ezt a konvergenciát használva a normából származó konvergencia helyett, elkerülhető azoknak a nehézségeknek egy része, amelyek a variációszámításban és a parciális differenciálegyenleteknél az egységgömb kompaktságának hiánya okoz. Ezért vezette be Hilbert ezt a konvergenciát.

Ha X Hilbert-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján X^* elemeit X elemeivel azonosíthatjuk, és így a gyenge* topológiát átmásolhatjuk X-re. Általánosabban, ha X normált tér, akkor X-nek X^{**}-ba való F természetes leképezése izometria, amely minden $x \in X$-hez hozzárendel egy $F_x \in X^{**}$ lineáris funkcionált az $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$ összefüggéssel. Így X minden eleme egy X^*-on értelmezett funkcionálnak tekinthető, és X^{**} elemeinek pontonkénti konvergenciája (és a topológia, amiből származik) átmásolható X-re. Ezt a konvergenciát *gyenge konvergenciá*nak, a topológiát, amiből származik, *gyenge topológiá*nak szokás nevezni. Nyilván reflexív terek esetén (speciálisan Hilbert-tereknél) a gyenge és gyenge* topológia megegyezik.

A gyenge és gyenge* topológiák vizsgálatával a topologikus vektorterek elmélete foglalkozik. A legegyszerűbb tényeket illetően lásd Losonczi [82] jegyzetét. Részletes hivatkozások találhatók Zeidler [145] könyvében. Megjegyezzük, hogy a lineáris operátorok terében is fontos a pontonkénti konvergencia, amelyet néha erős konvergenciának szokás nevezni.

* **Feladat [9]:** Bizonyítsuk be a *Banach–Alaoglu-tétel*t: egy X normált tér X^* konjugált terének egységgömbje a gyenge* topológiában kompakt.

* **Feladat [9]:** Mutassuk meg, hogy egy X szeparábilis normált térre X^* egységgömbjén a gyenge* topológia metrizálható.

* **Gyenge és gyenge* konvergencia.** Ha X normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a gyenge és gyenge* topológiáról mondottak szerint egy $x_n \in X$ sorozat *gyengén konvergál* $x \in X$-hez, jelölésben $x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$, ha $f(x_n) \to f(x)$ minden

$f \in X^*$-ra, és egy $f_n \in X^*$ sorozat *gyenge* konvergál* $f \in X^*$-hoz, jelölésben $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$, ha $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re. Egy példa: Hilbert-térben egy végtelen ortonormált sorozat gyengén konvergál nullához. A gyenge és gyenge* konvergencia jelentőségét a kiválasztási tételek adják.

* **Feladat: kiválasztási tétel gyenge* konvergenciára [9]:** Bizonyítsuk be, hogy ha X szeparábilis normált tér, akkor minden korlátos $f_n \in X^*$ sorozatnak van gyenge* konvergens részsorozata.

* **Kiválasztási tétel gyenge konvergenciára:** *Ha x_n egy korlátos sorozat egy X reflexív Banach-térben, akkor van olyan részsorozata, amely gyengén konvergál.*

Ez a tulajdonság jellemzi is a reflexív Banach-tereket, ez Eberlein (1947) és Šmuljam (1940) tétele; lásd Yosida [142], V. fejezet.

Bizonyítás. Legyen Y az x_n-ek lineáris burkának a lezártja. Mivel X reflexív, Y is, és mivel Y szeparábilis, Y^* is. Legyen f_n az Y^* egy megszámlálható sűrű részhalmaza. A diagonális eljárással kiválasztható olyan $z_n = x_{j_n}$ részsorozata az x_n sorozatnak, amelyre minden k-ra $f_k(z_n)$ konvergál valamely $\alpha_k \in \mathbb{K}$-hoz, ha $n \to \infty$. Innen bármely $f \in Y^*$-ra $f(z_n) - f(z_m)$ kicsi, ha n, m elég nagyok, azaz $f(z_n)$ Cauchy-sorozat, tehát konvergál valamely $\alpha(f) \in \mathbb{K}$-hoz. Az α funkcionál nyilván lineáris és $\big|\alpha(f)\big| \le \|f\| \sup_n \|x_n\|$. Mivel Y reflexív, van olyan $x \in Y$, hogy $\alpha(f) = f(x)$ minden $f \in Y^*$-ra, azaz $f(x_n) \to f(x)$. Mivel minden $f \in X^*$ megszorítása Y-ra az Y^* egy eleme, ez minden $f \in X^*$-ra is teljesül.

* **Egyenletes konvexség:** Az X normált teret *lokálisan egyenletesen konvex*nek nevezzük, ha minden $x \in X$, $\|x\| \le 1$ eleméhez és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $y \in X$-re, amelyre $\|y\| \le 1$ és $\|x + y\| \ge 2 - \delta$, teljesül, hogy $\|x - y\| \le \varepsilon$. Ha δ az x-től függetlennek választható, akkor azt mondjuk, hogy a tér *egyenletesen konvex*. A Hilbert-terek nyilván egyenletesen konvexek a paralelogramma-azonosság miatt. Megmutatható, hogy $1 < p < \infty$ esetén az $\mathbb{L}^p$ tér is egyenletesen konvex. A lokálisan egyenletes konvexségből következik a szigorú konvexség. Megmutatható, hogy egy reflexív Banach-térben mindig bevezethető egy, az eredeti normával ekvivalens norma, amelyre X és X^* már lokálisan egyenletesen konvexek. (Kadec (1959) és Troyanski (1971) tétele.)

* **A gyenge konvergencia alaptulajdonságai:** *Legyen X Banach-tér, $x_n \in X$. Ekkor*

(1) ha $x_n \to x$, akkor $x_n \rightharpoonup x$;

(2) ha X véges dimenziós és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $x_n \to x$;

(3) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor x_n korlátos és $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} x_n$;

(4) ha X lokálisan egyenletesen konvex, $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \to \|x\|$, akkor $x_n \to x$ (Radon–Riesz-tulajdonság);

(5) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor a $\{x_n\}$ halmaz zárt konvex burkában van olyan y_n sorozat, hogy $y_n \to x$ (Mazur tétele);

(6) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor x a $\{x_n\}$ halmaz zárt konvex burkában van;

(7) ha x_n korlátos és van olyan $D \subset X^*$ sűrű halmaz, hogy $f(x_n) \to f(x)$ minden $f \in D$-re, akkor $x_n \rightharpoonup x$;

(8) ha X reflexív és $f(x_n)$ konvergál minden $f \in X^*$-ra, akkor van olyan x, hogy $x_n \rightharpoonup x$;

(9) ha x_n minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely egy adott x-hez konvergál gyengén, akkor $x_n \rightharpoonup x$;

(10) ha $x_n \rightharpoonup x$ és $f_n \to f$ az X^*-ban, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$;

(11) ha X reflexív, $x_n \to x$ és $f_n \rightharpoonup f$ az X^*-ban, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$.

Bizonyítás. (1) és (2) triviálisak, (3) az egyenletes korátosság tétele következményének speciális esete. (4) Nyilvánvaló, ha $x = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor legyen $y = x/\|x\|$ és $y_n = y_n/\|y_n\|$ valahonnan kezdve. Ekkor $\|y\| = \|y_n\| = 1$, $y_n \rightharpoonup y$, és (3) szerint, mivel $y_n + y \rightharpoonup 2y$,

$$2 = \|2y\| \le \liminf_{n\to\infty} \|y_n + y\| \le \limsup_{n\to\infty} \|y_n + y\| \le 2,$$

így $\|y_n + y\| \to 2$, ahonnan következik az állítás. (5)-höz legyen C az x_n-ek zárt konvex burka. Tegyük fel indirekt, hogy $d(x, C) > 0$. Ekkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan f valós folytonos lineáris funkcionál és $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(C) \le c < f(x)$, ami ellentmondás; a komplex esetben használjuk az $f(x) - if(ix)$ funkcionált. (6) nyilván következik (5)-ből. (7) következik a Banach–Steinhaus-tételből. (8)-hoz legyen $\alpha(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, ha $f \in X^*$; α nyilván lineáris és az egyenletes korlátosság tételének következménye szerint korlátos is, azaz $\alpha \in X^{**}$. Mivel X reflexív, $\alpha(f) = f(x)$ valamely $x \in X$-re, és $x_n \rightharpoonup x$. (9)-et indirekt bizonyítjuk: ha nem lenne igaz, akkor létezne olyan $f \in X^*$ és $\varepsilon > 0$, amelyre $\left|f(x_{n_k}) - f(x)\right| \ge \varepsilon$ teljesülne valamely részsorozatra. (10) és (11) nyilvánvalóak, mivel a gyenge konvergenciából következik a korlátosság.

* **Feladat [6]:** Bizonyítsuk be, hogy reflexív Banach-téren zárt konvex halmaztól való távolság felvétetik.

* **A gyenge* konvergencia alaptulajdonságai:** *Legyen X Banach-tér, $f_n \in X^*$. Ekkor*

(1) ha $f_n \to f$, akkor $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(2) ha $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, akkor f_n korlátos és $\|f\| \le \liminf_{n\to\infty} f_n$;

(3) ha f_n korlátos és van olyan $D \subset X$ sűrű halmaz, hogy $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in D$-re, akkor $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(4) ha minden $x \in X$-re $f_n(x)$ konvergál minden, akkor van olyan f, hogy $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(5) ha $x_n \rightharpoonup x$ az X-ben és $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$.

Bizonyítás. Minden úgy bizonyítható, mint a gyenge konvergencia esetében.

* **Tétel.** *Ha az $y = (y_1, y_2, \dots)$ számsorozatra bármely $x = (x_1, x_2, \dots)$ nullsorozat esetén a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ sor konvergens, akkor $y \in \mathbf{l}^1$, azaz $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$, és $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ korlátos lineáris funkcionál a c_0, c és $\mathbf{l}^{\infty}$ tereken, amelynek normája $\|f\| = \|y\|_1$.*

- 223/−6 :

$<$

Úgy is tekinthető, mint a relaxáció egy esete. A részleteket illetően lásd

$>$

Úgy is tekinthető, mint a relaxáció egy esete. A részleteket illetően lásd a

- 236/−1 :

$<$

teleinek?

$>$

teleinek?

* **Lemma.** *Legyen X egy metrikus tér, T pedig X egy zárt részhalmazának folytonos leképezése X egy kompakt részhalmazába. Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan x_ε, hogy*

$$d\big(T(x_\varepsilon), x_\varepsilon\big) < \varepsilon. \tag{1}$$

Ekkor T-nek van fixpontja.

Az (1) feltételnek eleget tévő x_ε pontokat a T leképezés ε-*fixpont*jainak nevezzük.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T az F zárt részhalmazt a K kompakt halmazba képezi le. Mivel $T(x_\varepsilon) \in K$, feltehetjük, hogy valamely $\varepsilon_n \to 0$ sorozatra $T(x_{\varepsilon_n}) \to x \in K$. Az (1) feltétel szerint $x_{\varepsilon_n} \to x$, így $x \in F$. Tehát $T(x)$ definiálva van, és $T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_{\varepsilon_n}) = \lim_{n\to\infty} T(x_{\varepsilon_n}) = x$.

* **Lemma: Schauder-projekció.** *Ha K az X normált tér kompakt részhalmaza és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan Y véges reszhalmaza K-nak és P folytonos leképezése K-nak Y konvex burkába, hogy $\big\|P(x) - x\big\| < \varepsilon$ minden $x \in K$-ra.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $\{y_1, \dots, y_n\} = Y$ véges ε-hálót K-ban. Legyen

$$f_i(x) = \max\big\{0, \varepsilon - \|x - y_i\|\big\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nyilván $f_i(x) \neq 0$ pontosan akkor, ha $\|x - y_i\| < \varepsilon$. Így minden $x \in K$-ra valamelyik $f_i(x)$ nem nulla. Legyen

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x) y_i}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in K.$$

Nyilván P folytonos, és mivel $P(x)$ az x-hez ε-nál közelebb lévő pontok konvex kombinációja, $\big\|P(x) - x\big\| < \varepsilon$.

* **Schauder második fixponttétele.** *Legyen C az X normált tér egy nem üres konvex részhalmaza. Legyen T a C egy folytonos leképezése egy $K \subset C$ kompakt halmazba. Ekkor T-nek van fixpontja.*

Bizonyítás. Tekintsük $n = 1, 2, \ldots$-re a $P_n \circ T$ leképezést, ahol P_n az előző lemma szerint $\varepsilon = 1/n$-hez tartozó leképezés. Mivel $Y \subset K \subset C$, az Y halmaz konvex burka is része C-nek. Mivel Y konvex burka véges dimenziós kompakt konvex halmaz és $P_n \circ T$ ezt folytonosan képezi le önmagába, a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik egy x_n fixpontja. A $P_n\big(T(x_n)\big) = x_n$ összefüggésből $\big\|T(x_n) - x_n\big\| < 1/n$. Így T-nek van fixpontja.

* **Következmény: Schauder első fixponttétele.** *Egy normált tér bármely nem üres kompakt konvex részhalmaza fixpont-tulajdonságú.*

* **Feladat [9].** Bizonyítsuk be Peano tételét Schauder második fixponttétele segítségével.

• $412/-15$:

$<$

összeggörbülete nulla.

$>$

összeggörbülete nulla.

* **Térkép, atlasz, sokaság.** Egy m-dimenziós *térkép* vagy *koordinátarendszer* egy X metrikus tér egy nyílt részhalmazát $\mathbb{R}^m$ egy nyílt részhalmazára képező φ homeomorfizmus. A φ és ψ m-dimenziós térképek *$\mathcal{C}^r$-összeférhetőek* ($0 \le r \le \infty$), ha $\varphi \circ \psi^{-1}$ és $\psi \circ \varphi^{-1}$ is $\mathcal{C}^r$-leképezések (ezek a φ és ψ értelmezési tartománya metszetének φ és ψ általi képeit képezik le egymásra). Egy *m-dimenziós $\mathcal{C}^r$-atlasz* az X m-dimenziós térképeinek egy $\mathcal{C}^r$-összeférhető φ_i, $i \in I$ családja úgy, hogy a φ_i térképek értelmezési tartományai lefedik X-et. Egy m-dimenziós *$\mathcal{C}^r$-sokaság* egy M szeparábilis metrikus tér amelyen meg van adva egy m-dimenziós $\mathcal{C}^r$-atlasz. A $\mathcal{C}^r$-atlaszhoz M akárhány további m-dimenziós térképét hozzávehetjük, ha azok $\mathcal{C}^r$-összeférhetőek az eredeti atlasz térképeivel, mert ekkor egymással is $\mathcal{C}^r$-összeférhetőek lesznek. Gyakran érdemes technikai okokból egy atlaszhoz hozzávenni az összes vele $\mathcal{C}^r$-összeférhető térképet; az így kapott atlaszt az adott atlaszhoz tartozó *telített atlasz*nak nevezzük. A $\mathcal{C}^\infty$-sokaságokat *sima sokaság*oknak is nevezzük.

* **Példa.** Bármely nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek az identikus leképezés által megadott egyetlen térképből álló atlasszal egy sima sokaság. Ha mást nem mondunk, $\mathbb{R}^m$ nyílt részhalmazain mindig erre a sokaság-struktúrára gondolunk.

* **Példa.** Az identikus leképezés által megadott térkép valamint a $\varphi(x) = \sin(x)$ leképezés által megadott térkép $\mathcal{C}^\infty$-összeférhetőek $]-\pi/2, \pi/2[$-n.

* **Példa.** Az identikus leképezés $\mathbb{R}$-en, az $\varphi(x) = x$, ha $x \le 0$ és $\varphi(x) = 2x$, ha $x > 0$, valamint a $\psi(x) = x^3$, ha $x \in \mathbb{R}$ leképezések által megadott térképek páronként nem összeférhetőek, bár külön-külön mindegyik egy-egy sima sokaság struktúrát definiál $\mathbb{R}$-en.

* **Feladat** [**7**]. Tekintsük az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ halmazba képező

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

és

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

függvények (polár koordináták) inverzeit. Mutassuk meg, hogy az eredeti atlasszal $\mathcal{C}^\infty$-összeférhető atlaszt alkotnak.

* **Feladat** [**7**]. Milyen térképeket kapunk $\mathbb{R}^3$-ban a henger, illetve gömbi koordinátákból?

* **Példa.** Legyen $\mathbb{R}^{m+1}$ szokásos ortonormált bázisa $e_0, e_1, \dots, e_m$. Tekintsük az $\mathbb{S}_m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$ gömbfelületet. Az $e_1, \dots, e_m$ által kifeszített alteret $\mathbb{R}^m$-mel azonosítva, ha $x \in \mathbb{S}_m$ koordinátai $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m$, legyen $y = \varphi_1(x) = (x - \xi^0 e_0)/(1 - \xi^0)$, ha $x \neq e_0$ (sztereografikus projekció e_0-ból). A leképezés inverze

$$x = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1}.$$

Hasonlóan, legyen $\varphi_2(x) = (x + \xi^0 e_0)/(1 + \xi^0)$, ha $x \neq -e_0$ (sztereografikus projekció $-e_0$-ból). Ekkor $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(y) = y/\|y\|^2$ egy $\mathcal{C}^\infty$-leképezés, és az inverze is, így φ_1, φ_2 egy sima sokaság struktúrát definiál $\mathbb{S}_m$-en.

* **Példák.** Henger, tórusz, Möbius-szalag, Klein-féle kancsó, gömb fogantyúkkal és Möbius-szalagokkal, stb.

* **Feladat** [**5**]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{S}_m$ nem homeomorf $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával semmilyen n-re sem.

* **Feladat** [**10**]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{m+1}$ és

$$\{x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_0 \geq 0\}$$

nem homeomorfak.

* **Feladat** [**8**]. Adjunk meg két térképből álló atlaszt a

$$(\varphi, z) \mapsto (\cos(2\pi\varphi), \sin(2\pi\varphi), z),$$

$0 \leq \varphi \leq 1$, $0 < z < 1$ leképezés értékkészletén, egy hengerfelületen.

* **Feladat** [**9**]. Adjunk meg két térképből álló atlaszt a

$$(\varphi, r) \mapsto \Big(\big(1 + r\cos(\pi\varphi)\big)\cos(2\pi\varphi), \big(1 + r\cos(\pi\varphi)\big)\sin(2\pi\varphi), r\sin(\pi\varphi)\Big),$$

$0 \leq \varphi \leq 1$, $-1/2 < r < 1/2$ leképezés értékkészletén, egy Möbius-szalagon.

* **Feladat [10].** Adjunk meg három térképből álló atlaszt a

$$(\varphi,\vartheta)\mapsto\Big(\big(2+\cos(2\pi\vartheta)\big)\cos(2\pi\varphi),\big(2+\cos(2\pi\vartheta)\big)\sin(2\pi\varphi),\sin(2\pi\vartheta)\Big),$$

$0\le\varphi\le 1$, $0<\vartheta<1$ leképezés értékkészletén, egy tóruszon.

* **Feladat [11].** Adjunk meg három térképből álló atlaszt a Klein-féle kancsón.

* **Sima leképezések.** Legyenek M és N sima sokaságok. Egy $f:M\to N$ leképezést $\mathcal{C}^r$*-leképezés*nek ($0\le r\le\infty$) nevezünk, ha az M atlaszának bármely φ és az N atlaszának bármely ψ térképére $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ egy $\mathcal{C}^r$-leképezés. Az ilyen leképezések osztályát $\mathcal{C}^r(M;N)$ jelöli. A $\mathcal{C}^\infty$-leképezéseket *sima leképezés*eknek is nevezzük. Ha mást nem mondunk, $\mathcal{C}^r$*-függvény*, illetve *sima függvény* alatt $\mathcal{C}^r(M;\mathbb{R})$ illetve $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ elemeit értjük. Az M és N sima sokaságok *diffeomorf*ak, ha létezik olyan $f:M\to N$ kölcsönösen egyértelmű leképezése M-nek N-re, amelyre f és f^{-1} is sima; egy ilyen f-et *diffeomorfizmus*nak nevezünk.

* **Tétel.** *Ha K, M, N sima sokaságok és $f:K\to M$ valamint $g:M\to N$ is $\mathcal{C}^r$-leképezések, akkor $g\circ f:K\to N$ is $\mathcal{C}^r$-leképezés.*

* **Bizonyítás.** Bármely φ, ψ térképekre K-ban illetve N-ben, ha x a $\psi\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}$ leképezés értelmezési tartományának tetszőleges pontja és χ az M atlaszának egy olyan térképe, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza $y=f(x)$-et, a $\psi\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}$ leképezés a $\varphi(x)$ pont valamely környezetében megegyezik a $\psi\circ g\circ\chi^{-1}\circ\chi\circ f\circ\varphi^{-1}$ leképezéssel, így $\mathcal{C}^r$-leképezés. Mivel ez $\psi\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}$ értelmezési tartományának bármely pontjára teljesül, $\psi\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}$ egy $\mathcal{C}^r$-leképezés.

* **Példák.** (1) Az $f:x\mapsto 2x/\big(1-\|x\|^2\big)$ leképezés sima diffeomorfizmusa $\mathbb{R}^m$ nyílt $K_1(0)$ egységgömbjének $\mathbb{R}^m$-re, az inverze $y\mapsto y/\big(1+\sqrt{1+\|y\|^2}\big)$.

(2) A $g:x\mapsto x/\|x\|^2$ leképezés sima diffeomorfizmusa $K_1(0)\setminus\{0\}$-nak $K_1(0)$ külsejére, inverze saját maga.

(3) A $g\circ f$ leképezés sima diffeomorfizmusa $K_1(0)$ külsejének $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$-ra.

* **Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy a 10.34 példában megadott sokaságok diffeomorfak.

* **Görbék érintkezése.** Legyen M egy sima sokaság. A $\gamma_1,\gamma_2:\mathbb{R}\to M$ $\mathcal{C}^1$-görbékre azt mondjuk, hogy a $t_0\in\mathbb{R}$ pontban *érintkeznek*, ha $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$ és van olyan φ térkép, amelynek értelmezési tartományában benne van $x=\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$ és

$$\frac{d(\varphi\circ\gamma_1)}{dt}(t_0)=\frac{d(\varphi\circ\gamma_2)}{dt}(t_0).$$

Legyen N egy másik sima sokaság, és $f:M\to N$ egy $\mathcal{C}^1$-leképezés. Ekkor az $f\circ\gamma_1$ és $f\circ\gamma_2$ görbék $\mathcal{C}^1$-görbék és érintkeznek t_0-ban: az $y=f(x)$ jelöléssel $f\circ\gamma_1(t_0)=y=f\circ\gamma_2(t_0)$ és az y-t tartalmazó értelmezési tartományú bármely ψ térképre

$$\frac{d(\psi\circ f\circ\gamma_i)}{dt}(t_0)=\frac{d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma_i)}{dt}(t_0)=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'\big(\varphi(x)\big)\frac{d(\varphi\circ\gamma_i)}{dt}(t_0),$$

ha $i=1,2$, így megegyeznek.

Speciálisan, $N=M$-et f-nek pedig az identikus leképezést választva, kapjuk, hogy a görbék érintkezése t_0-ban nem függ a térkép választásától: ha van olyan térkép, amelyre érintkeznek, akkor minden x-et tartalmazó térképre érintkeznek, és így az is teljesül, hogy ha t_0-ban γ_1 érintkezik γ_2-vel, továbbá γ_2 érintkezik γ_3-mal, akkor γ_1 is érintkezik γ_3-mal.

* **Érintővektorok.** Egy M sima sokaság egy *érintővektora az $x\in M$ pontban* azon $\mathcal{C}^1$-beli $\gamma:\mathbb{R}\to M$ görbék osztálya, amelyekre $\gamma(0)=x$ és érintkeznek a 0-ban. Az M sokaság x-beli érintővektorainak halmazát T_xM-mel jelöljük, azt az érintővektort pedig, amelyhez egy adott γ tartozik, $\gamma'(0)$-val. A

$$\theta_\varphi:\gamma'(0)\mapsto\frac{d(\varphi\circ\gamma)}{dt}(0)$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi le T_xM-et $\mathbb{R}^n$-re. Az inverz leképezés a $h\in\mathbb{R}^n$ vektorhoz a

$$\gamma(t)=\varphi^{-1}\big(\varphi(x)+th\big)$$

sima görbével érintkező görbék osztályát rendeli, mert

$$\frac{d(\varphi\circ\gamma)}{dt}(0)=\frac{d\big(\varphi(x)+th\big)}{dt)}(0)=h.$$

A

$$\theta_\varphi^{-1}(h_1)+\theta_\varphi^{-1}(h_2)=\theta_\varphi^{-1}(h_1+h_2),\quad \alpha\theta_\varphi^{-1}(h)=\theta_\varphi^{-1}(\alpha h)$$

definícióval elláthatjuk T_xM-et egy vektortér-struktúrával. Ha ψ egy másik térkép, amelynek értelmezési tartományában szintén benne van x, akkor

$$\gamma(t)=\varphi^{-1}\big(\varphi(x)+th\big)$$

jelöléssel

$$\theta_\psi\circ\theta_\varphi^{-1}:h\mapsto\frac{d(\psi\circ\gamma)}{dt}(0)=\frac{d\big(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma\big)}{dt}(0)=(\psi\circ\varphi^{-1})'\big(\varphi(x)\big)h.$$

Ez azt jelenti, hogy $\theta_\psi\circ\theta_\varphi^{-1}$ bijektív lineáris leképezés, így a vektortér-struktúra nem függ a térkép választásától.

* **Az érintőleképezés.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f:M\to N$ egy sima leképezés, $x\in M$ és $y=f(x)\in N$. Egy $\gamma'(0)\in T_xM$ érintővektorhoz rendeljük hozzá a $(f\circ\gamma)'(0)$ érintővektort; mint a 10.44 pontban megmutattuk, ez nem függ az érintővektor reprezentánsának választásától. Jelölje ezt a $T_xM\to T_yN$ leképezést T_xf. Ez az f *érintőleképezés*e az x pontban. Megmutatjuk, hogy lineáris. Valóban, mint a 10.44 pontban már kiszámoltuk, ha φ az x-ben, a ψ pedig az y-ban értelmezett térkép, akkor $F=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ jelöléssel

$$\frac{d(\psi\circ f\circ\gamma)}{dt}(0)=F'\big(\varphi(x)\big)\frac{d(\varphi\circ\gamma_i)}{dt}(0),$$

így mivel a θ_ψ és θ_φ leképezések lineáris bijekciók, a $T_xf=\theta_\psi^{-1}\circ F'\big(\varphi(x)\big)\circ\theta_\varphi$ leképezés is lineáris, sőt, rangja megegyezik $F'\big(\varphi(x)\big)$ rangjával. Így definiálhatjuk a T_xf érintőleképezés rangját. Ezt a rangot $\operatorname{rg}_x f$-fel is fogjuk jelölni.

* **Tétel.** *Ha K, M, N sima sokaságok, $f : K \to M$ és $g : M \to N$ sima leképezések, $x \in K$ és $y = f(x)$, akkor $T_x(g \circ f) = T_y g \circ T_x f$.*

* **Az érintővektorok mint funkcionálok.** Legyen M egy sima sokaság és $X = \gamma'(0) \in T_x M$. Minden M-en értelmezett sima f függvényhez az

$$f \mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$$

leképezés egy számot rendel, amely csak az $X = \gamma'(0)$ érintővektortól függ. Ezt a számot Xf-fel is jelöljük. Nyilván ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és f, g sima függvények, akkor $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X f + \beta X g$, azaz a funkcionál lineáris, és a szorzás differenciálási szabálya alapján $X(fg) = f(x)Xg + g(x)Xf$. Az érintővektorokat ezen tulajdonságok segítségével is be lehet vezetni. Meg lehet mutatni, hogy két érintővektor pontosan akkor egyenlő, ha minden sima függvényre ugyanúgy hatnak.

Legyen most $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ egy x-ben értelmezett térkép, és

$$X^1, X^2, \dots, X^m$$

az X érintővektor koordinátái a $\theta_\varphi^{-1}(e_i)$, $i = 1, 2, \dots m$ bázisban, ahol $e_1, e_2, \dots, e_m$ az $\mathbb{R}^m$ szokásos bázisa. (Ez a bázis a $T_x M$ érintőtérnek a φ térképhez tartozó természetes bázisa.) Ekkor

$$\begin{aligned} Xf &= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\big(\varphi(x)\big) \frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}. \end{aligned}$$

Ennek megfelelően X hagyományos felírása ebben a koordinátarendszerben

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

* *Az érintőleképezés lokális koordinátákban.* Legyenek M és N sima sokaságok, $f : M \to N$ egy sima leképezés, $x \in M$ és $y = f(x)$. Ha $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m)$ az x-ben $\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ pedig az y-ban értelmezett térkép, akkor az

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

érintővektorra

$$Y = (T_x f)(X) = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial \psi^j},$$

ahol

$$Y^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i}\big(\varphi(x)\big) X^i,$$

mivel az $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jelöléssel az $F : (\varphi^1 \varphi^2, \dots \varphi^m) \to (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ leképezés deriváltjának mátrixa

$$\frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i}\big(\varphi(x)\big).$$

Speciálisan, ha $N = M$ és f az identikus leképezés, azt kapjuk, hogy térképcserénél X koordinátái a fenti módon transzformálódnak.

* **Feladat [8].** Az $\mathbb{S}_2$ gömbfelületen gömbi koordinátákban legyen egy vektormező

$$\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

és nulla egyébként. Számoljuk át az $(1, 0, 0)$ pontból való vetítés által adott koordinátákba.

* **Érintőnyaláb.** Egy M sima sokaság érintőtereinek (diszjunkt) unióját a sokaság *érintőnyaláb*jának nevezzük. Ez is sima sokasággá tehető egy természetes módon, de ezzel nem foglalkozunk.

* **Példa.** Egy csavarvonal egy darabja.

* **Immerzió, szubmerzió, szubimmerzió és beágyazás.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f : M \to N$ egy sima leképezés. Ha $T_x f$ kölcsönösen egyértelmű minden $x \in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *immerzió*. Ha $T_x f$ a $T_{f(x)}N$-re képez minden $x \in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *szubmerzió*. Ha $T_x f$ rangja ugyanannyi $x \in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *szubimmerzió*. Ha f immerzió, kölcsönösen egyértelmű és homeomorfizmus M és $f(M)$ között, akkor azt mondjuk, hogy *beágyazás*.

* **Példák.** $x \mapsto (x, 0)$, $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto (x, 0, 0)$, $]0, 2\pi[\ni t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto (\cos x, \sin x)$.

* **Részsokaság.** Egy M egy sokaság egy K részhalmaza az M egy k-dimenziós *részsokaság*a, ha minden $x \in K$-hoz van olyan $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ térkép az M atlaszához tartozó telített atlaszban, amelynek U értelmezési tartományában benne van x és amelyre

$$\varphi(U \cap K) = \big\{(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m) \in \varphi(U) : \varphi^{k+1} = \dots = \varphi^m = 0\big\}.$$

Egy nyílt részhalmaz nyilván mindig részsokaság.

* **Tétel.** *Egy részsokaságon egyetlen olyan sima telített atlasz létezik, amelyre az identikus leképezése K-nak M-be beágyazás. Megfordítva, ha $f : K \to M$ egy beágyazás, akkor $f(K)$ egy részsokaság, amely diffeomorf K-val.*

* **Whitney tétele.** *Minden m-dimenziós sima sokaság beágyazható $\mathbb{R}^{2m+1}$-be sima részsokaságként.*

* **Tétel.** *Legyen $f : M \to N$ egy szubimmerzió, $x \in M$ és $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y)$ egy zárt részsokasága M-nek és $T_x f^{-1}(y)$ a $T_x f$ magja.*

* **Példa.** Az $\mathbb{S}_m$ gömb mint az $x \mapsto \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ leképezésnél az 1 ősképe.

* **Vektormező.** Egy m-dimenziós M sima sokaságon értelmezett $X : x \mapsto X(x) \in T_x M$ leképezést *vektormező*nek nevezünk. Nyilván ha X, Y vektormezők, $\alpha \in \mathbb{R}$ és f függvény M-en, akkor $X+Y$, αX és fX is vektormezők. Az X vektormezőt *sima vektormező*nek nevezzük, ha minden f sima függvényre $x \mapsto X(x)f$ sima függvény; ezt a függvényt Xf-fel jelöljük. Megmutatható, hogy X pontosan akkor sima vektormező, ha bármely φ térképre az

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} X^i(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

előállításában szereplő X^i koordinátafüggvények simák.

* **Sima vektormezők Lie-zárójele.** Legyen M egy m-dimenziós sima sokaság, X és Y pedig sima vektormezők M-en. Megmutatható, hogy létezik (és csak egy) $[X,Y]$ vektormező amelyre bármely f sima függvényre

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Mivel Xf és Yf, és így $X(Yf)$ valamint $Y(Xf)$ is sima függvények, $[X,Y]$ sima vektormező.

Legyen a φ térkép az x-ben értelmezve. Ekkor

$$X(x)f = \sum_{j=1}^{m} X^j(x) \frac{\partial f}{\partial \varphi^j},$$

így

$$\begin{aligned} Y(Xf) &= \sum_{i=1}^{m} Y^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i} \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j}, \end{aligned}$$

tehát

$$[X,Y]f = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i} \Big) \frac{\partial f}{\partial \varphi^j},$$

amiből

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i} \Big) \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

* **Feladat [6].** Mutassuk meg, ha X, Y sima vektormezők és f sima függvény, akkor

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y.$$

* **Feladat [8].** Az $\mathbb{S}_2$ gömbfelületen gömbi koordinátákban legyen egy vektormező

$$\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

egy másik pedig

$$\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Számoljuk ki a Lie-zárójelüket.

* **Feladat [11].** Az előző feladatban szereplő vektormezőket számoljuk át az $(1, 0, 0)$ pontból való vetítés által adott koordinátákba, majd számoljuk ki a Lie-zárójelüket. Ellenőrizzük eredményünket a Lie-zárójel transzformálásával.

* **Lie-algebra.** Egy V vektorteret $\mathbb{K}$ felett egy $(x, y) \mapsto [x, y]$ kétváltozós művelettel *Lie-algebrá*nak nevezünk, ha

(1) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ és $x, y, z \in V$-re;

(2) $[x, y] = -[y, x]$ minden $x, y \in V$-re;

(3) $\big[[x, y], z\big] + \big[[z, x], y\big] + \big[[y, z], x\big] = 0$ minden $x, y, z \in V$-re (*Jacobi-azonosság*).

* **Tétel.** *Egy M sima sokaság sima vektormezői a vektormezők Lie-zárójelével Lie-algebrát alkotnak $\mathbb{R}$ felett.*

* **Iránymező, teljes integrál.** Legyen M egy m-dimenziós sima sokaság és $0 \le k \le m$. Egy $S : x \mapsto S_x$ hozzárendelést, ahol S_x a T_xM egy k-dimenziós altere, *k-iránymező*nek nevezünk. (A k-dimenziós *disztribúció* elnevezés is szokásos; mi ez utóbbit nem használjuk, mert a disztribúció szó másik értelme sokkal elterjedtebb.) Egy k-iránymezőre azt mondjuk, hogy *sima iránymező*, ha bármely $x \in M$-hez léteznek olyan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sima vektormezők, hogy valamely U környezetére x-nek $X_1(y), X_2(y), \ldots, X_k(y)$ bázisa T_yM-nek, ha $y \in U$.

Egy S sima k-iránymezőre legyen $\mathcal{E}(S)$ az összes olyan sima vektormezők halmaza, amelyekre $X(x) \in S(x)$, ha $x \in M$; ez az S-hez tartozó *differenciálrendszer*. Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{E}(S)$-ből nem vezet ki a sima függvényekkel való szorzás és az összeadás, sőt, még a lokálisan véges vektormező-rendszerek összeadása sem. Egy sima k-iránymezőt *involutív*nak nevezünk, ha $\mathcal{E}(S)$-re $X, Y \in \mathcal{E}(S)$ esetén $[X, Y] \in \mathcal{E}(S)$.

Ha egy k-dimenziós K sima sokaság egy $f : K \to M$ immerziójára $(T_xf)(T_xK) = S_{f(x)}$ minden $x \in K$-ra, akkor azt mondjuk, hogy a (K, f) pár az S egy *teljes integrál*ja; az $f(K)$ halmazt a *teljes integrál képé*nek nevezzük. Ha az M sokaság minden pontja rajta van valamely teljes integrál képén, akkor azt mondjuk, hogy S *teljesen integrálható*.

* **Frobenius tétele.** *Az előző definíció jelöléseivel, egy S iránymező pontosan akkor teljesen integrálható, ha involutív.*

* **Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy 1-iránymező mindig teljesen integrálható.

* **Feladat [9].** Legyen az $\mathbb{R}^3$ sokaságon a szokásos koordinátákban

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial \varphi^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial \varphi^3}$$

egy sima vektormező, amely sehol sem tűnik el, és $S(x) = X(x)^{\perp}$ a szokásos belső szorzatban. Mutassuk meg, hogy S pontosan akkor involutív, ha $X \perp \operatorname{rot} X$.

- $412/-15$:

$<$

Így csak egy helyen van szükség f' kiszámítására, de a konvergencia lelassul. A két utóbbi módszer Banach-terekre való általánosítását a differenciálszámításnál tárgyaljuk.

$>$

Így csak egy helyen van szükség f' kiszámítására, de a konvergencia lelassul.

A Newton-módszer és a módosított Newton-módszer is speciális esete az

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{Q_n}$$

iterációval dolgozó *kvázi Newton-módszer*nek, amelynél α_n minden lépésben változtatható paraméter, Q_n pedig $f'(x_n)$ egy közelítése. Megtehetjük például, hogy $f'(x_n)$-et egy

$$Q_n = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n}$$

differenciával közelítjük, ekkor egyáltalán nem kell deriváltat számolni. Ha $h_n = x_{n-1} - x_n$, akkor a szelőmódszert kapjuk vissza. Ha h_n ennél lényegesen kisebb abszolút értékű, akkor az eljárás felgyorsul, azonban a kerekítési hibák megnőhetnek.

Természetesen fixpontmódszerek is használhatók, és a módszerek kombinálhatók is.

Leállási kritériumként (egy adott iterációszám túllépésén kívül) annak vizsgálata kínálkozik, hogy $\bigl|f(x_n)\bigr| < \varepsilon$ valamely előre megadott $\varepsilon > 0$-ra. Ha a gyök közelében $|f'| \ll 1$, akkor ez túl hamar történő leállást eredményezhet, míg $|f'| \gg 1$ esetén az iteráció túl soká tarthat. Ezért inkább az $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ kritériumot alkalmazzuk. Ez csak nagyon lassan konvergáló fixpontmódszer esetén (azaz ha a kontrakcióra a Lipschitz-konstans nagyon közel van egyhez) hátrányos; ezt észrevehetjük Aitken Δ^2-módszerével.

A módszerek Banach-terekre való általánosítását a differenciálszámításnál tárgyaljuk.

- 412/−15 :

  <

gyökeiből, interpolációval.

  >

gyökeiből, interpolációval.

* **Feladat [11].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a tanult módszerekkel és megállási kritériumokkal:

(1) $\cos^2(2x) - x^2 = 0$;

(2) $\prod_{k=1}^{10}(x+k) = 0$;

(3) $x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$;

(4) $e^{-x} - \eta = 0$, $\eta = 10^{-9}$;

(5) $(x^2-1)^{m-1}\ln x = 0$, $m = 3, 5, 7$.

* **Feladat [9].** Határozzuk meg 1 mól CO_2 térfogatát 300 K°-on 10 atm (1013250 Pa) nyomáson a van der Waals-állapotegyenletből:

$$\big(p + a(n/V)^2\big)(V/n - b) = nRT,$$

ahol n a mólok száma. A van der Waals-állandók CO_2-ra $a/(\mathrm{Pa\,m^6K^\circ/mól^2}) = 188{,}33$ és $b/(\mathrm{m^3K^\circ/mól}) = 9{,}77 \cdot 10^{-4}$. Vessük össze az eredményt a tökéletes gázra kapott eredménnyel.

* **Feladat [9].** Egy alagútdióda karakterisztikája

$$I = \alpha(e^{U/\beta} - 1) - \mu U(U - \gamma),$$

ahol $\alpha/A = 10^{-12}$, $\beta/V = 25 \cdot 10^{-3}$, $\mu/(A/V^2) = 10^{-3}$ és $\gamma/V = 0{,}4$. Sorbakötjük egy 3333 Ω-os ellenállással egy 0,4 V-os feszültségforrásra. Határozzuk meg a kialakuló munkapontokat. Mi a helyzet, ha a feszültség 0,6 V, az ellenállás pedig 12 kΩ?

- 437/−1 :

  <

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin(ax)/x)^4\,dx = 2a^3\pi/3.$$

  >

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin(ax)/x)^4\,dx = 2a^3\pi/3.$$

Ablak Fourier-transzformált. Legyen a $0 \neq g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ *ablak függvény* rögzített. Ha $\operatorname{spt}(g) \subset [-T, 0]$, akkor azt mondjuk, hogy az ablak-függvény *kauzális*. Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ függvény erre vonatkozó *ablak Fourier-transzformált*ja (angol rövidítéssel: WFT-je) az $(\omega, t) \mapsto \tilde{f}(\omega, t) = (f_t)\hat{}$ függvény, ahol $f_t(x) = \overline{g}(x-t)f(x)$. A $g_{\omega,t}(x) = g(x-t)e^{2\pi i\omega x}$ jelöléssel $\tilde{f}(\omega, t) = \langle f, g_{\omega,t}\rangle$.

Példa. Az $x \mapsto \sin(\pi x^2)$ „zirp” jel a

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi x), & \text{ha } -1 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ablakkal.

Megjegyzés. A fenti „időablakozásnak” megfelel egy „frekvenciaablakozás”: a Plancherel-tétel szerint $\tilde{f}(\omega, t) = \langle f, g_{\omega,t}\rangle = \big\langle \hat{f}, (g_{\omega,t})\hat{}\,\big\rangle$, ahol $g_{\omega,t} = (\tau_t g)\mathbf{e}_\omega$ miatt $(g_{\omega,t})\hat{}= \tau_\omega\big((\tau_t g)\hat{}\,\big) = \tau_\omega(\hat{g}\mathbf{e}_{-t})$, így

$$\tilde{f}(\omega, t) = e^{-2\pi i t\omega}\langle \hat{f}, \hat{g}_{-t,\omega}\rangle.$$

Feladat [8]. Határozzuk meg a példában szereplő ablak Fourier-transzformáltját.

Tétel: bizonytalansági reláció. *Tegyük fel, hogy* $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\|g\|_2 = 1$, *továbbá*

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \big|g(t)\big|^2\,dt \quad \textit{és} \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2\big|\hat{g}(\omega)\big|^2\,d\omega$$

végesek. Ekkor

$$t_0 := \int_{\mathbb{R}} t\big|g(t)\big|^2\,dt \quad \textit{és} \quad \omega_0 := \int_{\mathbb{R}} \omega\big|\hat{g}(\omega)\big|^2\,d\omega$$

valamint

$$T^2 := \int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^2\big|g(t)\big|^2\,dt \quad \textit{és} \quad \Omega^2 := \int_{\mathbb{R}} (\omega-\omega_0)^2\big|\hat{g}(\omega)\big|^2\,d\omega$$

léteznek és végesek és $4\pi\Omega T \ge 1$.

Példa. Ha $g(t) = \sqrt[4]{2a}e^{-\pi t^2 a}$, akkor $\hat{g}(\omega) = \sqrt[4]{2/a}e^{-\pi\omega^2/a}$, $t_0 = \omega_0 = 0$ és $T = 1/\sqrt{4\pi a}$, $\Omega = \sqrt{a}/\sqrt{4\pi}$.

Feladat [11]. Bizonyítsuk be a példában szereplő állításokat.

Tétel: rekonstrukciós formula. *Ha* $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ *egy ablak függvény, akkor a hozzá tartozó ablak Fourier-transzformáltra bármely* $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$*-re*

$$f = \frac{1}{\|g\|_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega,t}\tilde{f}(\omega,t)\,dt\,d\omega.$$

Tétel. *Legyen* $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ *egy ablak függvény. Ekkor bármely* $h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$*-re, ha*

$$f_h = \frac{1}{\|g\|_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega,t}h(\omega,t)\,dt\,d\omega,$$

akkor bármely $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$*-re, amelyre* $f \ne f_h$, *teljesül, hogy* $\|h - \tilde{f}\|_2 > \|h - \tilde{f}_h\|^2$.

Shannon mintavételi tétele. *Legyen $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ folytonos függvény, amely „sávhatárolt Ω-val”, azaz amelyre $\hat{f}(\omega) = 0$, ha $\omega \notin [-\Omega, \Omega]$. Ekkor $t_n = n/(2\Omega)$ jelöléssel*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin\bigl(2\pi\Omega(t-t_n)\bigr)}{2\pi\Omega(t-t_n)} f(t_n);$$

itt $t = t_n$ esetén a tört értékének a határértéke ($= 1$) veendő.

Diszkrét rekonstrukciós formula. *Legyen $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ egy kompakt tartójú ablak függvény, amely eltűnik egy $1/\nu$ hosszúságú intervallumon kívül. Legyen*

$$H_\tau(x) = \tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bigl|g(x - n\tau)\bigr|^2.$$

(Ha g majdnem mindenütt folytonos, akkor $\tau \downarrow 0$ esetén $H_\tau(x) \to \|g\|_2^2$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.) Tegyük fel, hogy

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}} H_\tau(x) \quad \text{\textit{és}} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} H_\tau(x) < \infty.$$

(Ez csak $\nu\tau \le 1$ esetén lehetséges.) Ekkor

$$f(t) = \nu\tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{g_{m\nu,m\tau}(t)}{H_\tau(t)} \tilde{f}(m\nu, n\tau).$$

A továbbiakban skálafüggetlen módszert keresünk.

Definíció. Legyen $p \in \overline{\mathbb{R}}$ rögzített, és egy $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényre legyen $\psi_s(x) = |s|^{-1/p}\psi(x/s)$ és $\psi_{s,t}(x) = |s|^{-1/p}\psi\bigl((x-t)/s\bigr)$; ez a ψ *anyawavelet*hez tartozó *waveletcsalád* (itt $1/\infty = 0$). Ha $1 \le q < \infty$, akkor

$$\|\psi_{s,t}\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} |s|^{-q/p} \Bigl|\psi\bigl((x-t)/s\bigr)\Bigr|^q dx = |s|^{-q/p} \int_{\mathbb{R}} \bigl|\psi(y)\bigr|^q |s|\, dy = |s|^{1-q/p} \|\psi\|_q^q,$$

így $p = q$ esetén a norma nem változik; $q = \infty$-re $\|\psi_{s,t}\|_\infty = |s|^{-1/p}\|\psi\|_\infty$.

Példa. Anyawaveletnek alkalmas például $\psi(x) = xe^{-x^2}$ vagy a deriváltja, a $\psi(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ „mexikói kalap”.

Feladat [8]. Számoljuk ki az előző példában szereplő anyawaveletek Fourier-transzformáltját.

Definíció. Legyen $p \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rögzített. Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény *folytonos wavelet transzformált*ja az

$$\tilde{f}(s,t) = \langle f, \psi_{s,t}\rangle = \bigl\langle \hat{f}, (\psi_{s,t})\hat{}\,\bigr\rangle$$

függvény. Egyszerű számolással $(\psi_{s,t})\hat{}(\omega) = |s|^{1-1/p} e^{-2\pi i\omega t}\hat{\psi}(s\omega)$, így $\tilde{f}(s,t)$ az $\omega \mapsto |s|^{1-1/p}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}}(s\omega)$ függvény Fourier-transzformáltja a $-t$ helyen.

Szimmetrikus rekonstrukciós formula. *Az előző definíció jelöléseivel, tegyük fel, hogy*

$$0 < C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2}{|\xi|} \, d\xi < \infty.$$

Ekkor tetszőleges $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *visszaállítható* $\tilde{f}$*-ból:*

$$f = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2/p-3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s,t) \psi_{s,t} \, dt \, ds.$$

Megjegyzés. Ha $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, akkor $\hat{\psi}$ folytonos, így a feltételből $\hat{\psi}(0) = 0$, azaz $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, dx = 0$.

Asszimmetrikus rekonstrukciós formula. *Az előző definíció jelöléseivel, tegyük fel, hogy*

$$0 < C_+ = \int_{0}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2}{|\xi|} \, d\xi < \infty$$

és

$$0 < C_- = \int_{-\infty}^{0} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2}{|\xi|} \, d\xi < \infty.$$

Legyen

$$\eta(u) = \frac{\eta_+(u)}{C_+} + \frac{\eta_-(u)}{C_-},$$

ahol

$$\eta_+(u) = \int_0^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{2\pi i \omega u} \, d\omega \quad \textit{és} \quad \eta_-(u) = \int_{-\infty}^{0} \hat{\psi}(\omega) e^{2\pi i \omega u} \, d\omega.$$

Ekkor

$$f = \int_0^{\infty} |s|^{2/p-3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s,t) \eta_{s,t} \, dt \, ds.$$

Megjegyzés. Ha $C_- = 0$ vagy $C_+ = 0$, akkor $\tilde{f}(s,t)$, $s > 0$ nem tartalmaz információt $\hat{f}$ egyik feléről. Ez nem fordulhat elő, ha ψ valós, mert ekkor $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}}(\omega)$.

Megjegyzés. Diszkrét visszaállítás is lehetséges, ekkor $s = \pm\sigma^m$, $t = n\sigma^m\tau$, $m, n \in \mathbb{Z}$. A folytonos és a diszkrét esetnek, valamint az ablak Fourier-transzformáltnak van közös általánosítása, a különböző „frame”-ek.

Hardy-tér a felső és alsó félsíkon. Jelölje $\mathbb{C}^+$ a nyílt komplex felső félsíkot, $\mathbb{C}^-$ pedig a nyílt komplex alsó félsíkot, azaz legyen $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ és $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$. Ha $1 \le p < \infty$, legyen H^p_+ azon $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ komplex függvények halmaza, amelyek analitikusak, és amelyekre

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p \, dx$$

korlátos, mint $y > 0$ függvénye. Egy $f \in H^p_+$ függvényre legyen

$$\|f\| = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Legyen H^∞_+ azon $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ komplex függvények halmaza, amelyek analitikusak és korlátosak. Egy $f \in H^\infty_+$ függvényre legyen $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}, y>0} \bigl|f(x+iy)\bigr|$. Legyen $f \in H^p_-$ pontosan akkor, ha az $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ függvény H^p_+ eleme; ezek a függvények az alsó félsíkon analitikusak.

Definíció. Ha $x \in \mathbb{R}$, jelentse $\lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z) = c$ azt, hogy minden $C > 0$-ra az f függvény $\{\xi + i\eta : \xi, \eta \in \mathbb{R}, |\xi - x| < C\eta\}$ halmazra vett megszorításának c a határértéke az x pontban; $\lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x}$ a *nemtangenciális határérték*.

Tétel. *Ha $1 \le p \le \infty$, $f \in H^p_+$, akkor $f(x) := \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ majdnem mindenütt létezik, $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, továbbá $x \mapsto \ln\bigl|f(x)\bigr|/(1+x^2)$ integrálható.*

Következmény: Poisson-formula. *Ha $1 \le p \le \infty$, $f \in H^p_+$, akkor $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ esetén*

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) \, dt.$$

Megfordítva, ha $h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ és

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} h(t) \, dt$$

analitikus a felső félsíkon, akkor $f \in H^p_+$ és $h(x) = \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ majdnem mindenütt. Továbbá az $x \mapsto f(x+iy)$ függvény $\mathbb{L}^p$-normája tart az $x \mapsto f(x)$ függvény $\mathbb{L}^p$-normájához, ha $y \downarrow 0$.

Következmény. *Ha $1 \le p < \infty$, $f \in H^p_+$, akkor*

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy) - f(x)\bigr|^p \, dx = 0.$$

Tétel: Cauchy-formula. *Ha $1 \le p \le \infty$, $f \in H_+^p$, akkor $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ esetén*

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x+iy)}\, dt \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x-iy)}\, dt = 0$$

Megfordítva, ha $h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ és $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x-iy)}\, dt = 0,$$

akkor az

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x+iy)}\, dt$$

összefüggéssel definiált függvényre $f \in H_+^p$ és $h(x) = \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ majdnem mindenütt.

Megjegyzés. A fentiek alapján úgy tekinthető, hogy $H_+^p \subset \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, ha $1 \le p \le \infty$. Megmutatható, hogy zárt altér, így maga is Banach-tér.

Paley–Wiener-tétel. *Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény pontosan akkor van H_+^2-ben, ha a Fourier-transzformáltja majdnem mindenütt nulla a $[0,+\infty[$ intervallumon kívül.*

Megjegyzés. Ebből már könnyen következik, hogy egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény pontosan akkor van H_-^2-ben, ha a Fourier-transzformáltja majdnem mindenütt nulla a $]-\infty,0]$ intervallumon kívül. Mivel a Fourier-transzformáció $\mathbb{L}^2$-n belső szorzat tartó, minden $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény egyértelműen írható fel egy $f_+ \in H_+^2$ és egy $f_- \in H_-^2$ függvény ortogonális összegeként. A megfelelő $P_+ : \mathbb{L}^2 \to H_+^2$ és $P_- : \mathbb{L}^2 \to H_-^2$ ortogonális projekciókat *Riesz-projekció*nak hívjuk.

Definíció. Legyen $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rögzített. Az előző pont jelöléseivel az ehhez a függvényhez tartozó $T_\varphi : H_+^2 \to H_+^2$ *Töplitz-operátor*t a $T_\varphi f = P_+(\varphi f)$ összefüggés, a $H_\varphi : H_+^2 \to H_-^2$ *Hankel-operátor*t pedig a $H_\varphi f = P_-(\varphi f)$ összefüggés definiálja.

Nehari tétele. *Az előző definíció jelöléseivel, ha $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, akkor $\|H_\varphi\| = d(\varphi, H_+^\infty)$, ahol a d távolság $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$-ben értendő.*

- 454/11 :

<
állapot és vezérlési függvények, valamint a t_2 végpont meghatározása.
>
állapot és vezérlési függvények, valamint a t_1 végpont meghatározása.

- 454/−9 :

<
Ha a vezérlési függvény függ x'-től, akkor az $x'(t) = \tilde{w}(t)$ összefüggés
>
Ha az f vagy az L függvény függ x'-től, akkor az $x'(t) = \tilde{w}(t)$ összefüggés

- 455/−10 :

<

és $p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{m*}$ folytonos függvény úgy, hogy

>

és $p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n*}$ folytonos függvény úgy, hogy

- 456/−14 :

<

könyvének III. kötete 48. §-ára utalunk.

>

könyvének III. kötete 48. §-ára utalunk.

* **Feladat** [**10**]**.** Oldjuk meg a következő irányítási feladatot: az egyenesen kell egy tömegpontot eljuttatni −1-ből 1-be minimális idő alatt, 1-nél kisebb abszolút értékű gyorsulással.

* **Feladat** [**11**]**.** Oldjuk meg a következő irányítási feladatot: az egyenesen x_0 helyen tartózkodó v_0 sebességű tömegpontot kell minimális idő alatt az origóban megállítani. Mutassuk meg, hogy a vezérlés felírható a pillanatnyi hely és sebesség függvényeként. Ábrázoljuk a mozgást a fázistérben.

* **Feladat** [**12**]**.** Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket a (függőleges) „sima" Holdraszállás minimális üzemanyagfelhasználással irányítási feladatára az alábbi feltételekkel, a Hold forgását figyelmen kívül hagyva (a gyorsulás 0 és a között lehet):

(1) sem az űrhajó tömegének, sem a gravitációs mezőnek a változását nem vesszük figyelembe;

(2) csak az űrhajó tömegének változását vesszük figyelembe;

(3) mindkettőt figyelembe vesszük.

* **Feladat** [**11**]**.** Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket a rakétaindítás feladatára homogén gravitációs térben. A rakétának minimális üzemanyagfelhasználással kell egy adott pontot elérnie, a gyorsulás 0 és a között lehet.

* **Feladat: visszatérés a Holdról** [**13**]**.** A feladat egy űrhajó lefékezése a Föld légkörében és Föld körüli pályára állítás minimális felmelegedéssel. Legyen x_1 a sebesség, x_2 a hajlási szög a „pillanatnyi vízszinteshez", x_3 a magasság a felszín felett R földsugár egységekben véve, w a „fékezés", $\varrho = \varrho_0 e^{-\beta R x_3}$ a levegő sűrűsége. A kezdeti adatok $x_1(t_0) = 10{,}8$ km/s, $x_2(t_0) = 0{,}0045\pi$, $x_3(t_0) = 120$ km/R, a céladatok $x_0(t_1) = 8{,}1$ km/s, $x_2(t_1) = 0$, $x_3(t_1) = 75$ km/R. Az $x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, w)$

vezérlési feltételekben

$$f_1 = -\frac{F\varrho x_1^2}{2} c_1(w) - \frac{g \sin x_2}{(1+x_3)^2},$$
$$f_2 = \frac{F\varrho x_1}{2} c_2(w) + \frac{x_1 \cos x_2}{R(1+x_3)} - \frac{g \cos x_2}{x_1(1+x_3)^2},$$
$$f_3 = \frac{x_1 \sin x_2}{R};$$

itt F az űrhajó keresztmetszet/tömege, g a gravitációs gyorsulás, $c_1(w) = 1{,}174 - 0{,}9\cos w$, $c_2(w) = 0{,}6 \sin w$, a (nem SI egységekben megadott!) aerodinamikus ellenállás illetve emelő erő. A felmelegedést kívánjuk minimalizálni, a közelítő gyakorlati formula:

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^3 \sqrt{\varrho} \to \min .$$

Az űrhajósokról feltesszük, hogy bármit kibírnak, a Föld nyugvó gömb, és a Föld középpontján átmenő síkban repülünk. Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket, határozzuk meg a vezérlést, és visszaírva az egyenletekbe, határozzuk meg a differenciálegyenleteket és a peremfeltételeket. (Az adott numerikus esetben a magasság lemegy kb. 50 km-ig, majd nő, a sebesség kezdetben kicsit nő, majd csökken, $t_1 = 224{,}9$ s.)

- 457/9 :

  <

$$p' = -H_x = \lambda L_x, \quad p(t_1) = -\alpha, \quad \tilde{p}' = -H_{\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{p}(t_1) = -\tilde{\alpha},$$

  >

$$p' = -H_x = \lambda L_x, \quad p(t_1) = -\alpha, \quad \tilde{p}' = -H_{\tilde{x}} = \lambda L_{\tilde{x}}, \quad \tilde{p}(t_1) = -\tilde{\alpha},$$

- $457/-4..-1$:

  <

$$L_x\big(t, x(t), x'(t)\big) \quad \text{és} \quad L_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big)x'(t) - L\big(t, x(t), x'(t)\big)$$

bal és jobboldali határértéke megegyezik, ezek a *Weierstrass–Erdmann-féle törési feltétel*ek. Figyeljük meg a Pontrjagin-függvény szoros kapcsolatát a mechanikában használatos Hamilton-függvénnyel.

  >

$$L_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big) \quad \text{illetve} \quad \text{illetve } L_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big)x'(t) - L\big(t, x(t), x'(t)\big)$$

bal és jobb oldali határértéke megegyezik, ezek a *Weierstrass–Erdmann-féle törési feltétel*ek. Figyeljük meg a Pontrjagin-függvény szoros kapcsolatát a mechanikában használatos Hamilton-függvénnyel.

* **Feladat [11].** Alkalmazzuk a Pontrjagin-féle maximumelvet a szakaszonként folytonosan differenciálható $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvényekre vonatkozó

$$\int_a^b L\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt \to \min, \quad x(a) = x_0, \quad x(b) = x_1$$

$$\int_a^b f\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt = c$$

mellékfeltételes problémára, és vezessük le a megfelelő Euler–Lagrange-egyenleteket.

* **Feladat [11].** Határozzuk meg két végén felfüggesztett homogén súlyos lánc alakját (láncgörbe).

- $458/-1$:

$<$

közelítés javítható. Például a Newton-módszer alkalmazásával kaphatunk jobb közelítéseket adó $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ paramétersorozatot.

$>$

közelítés javítható, és kaphatunk jobb közelítéseket adó $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ paramétersorozatot.

* **Diszkrét irányítási feladat.** Tipikus esetként tekintsünk egy gyártási folyamatot, amelyben egy x_1 kezdeti állapotból kiindulva, ha egy w_1 vezérlést választottunk, az $x_2 = \varphi_1(x_1, w_1)$ állapotba jutunk, ahol $x_1 \in \mathbb{R}^N$, $w_1 \in W_1 \subset \mathbb{R}^M$, és közben $k_1(x_1, w_1)$ költség lép fel, majd ha egy w_2 vezérlést választunk, az $x_3 = \varphi_2(x_2, w_2)$ állapotba jutunk, ahol $x_2 \in \mathbb{R}^N$, $w_2 \in W_2 \subset \mathbb{R}^M$, és közben $k_2(x_2, w_2)$ költség lép fel stb. (Például lehet x_j összesen N kémiai anyag eloszlása a j-edik lépés előtt egy vegyipari gyártási folyamatban.) A φ_j és k_j függvények adottak, és álljon a gyártás összesen n lépésből; az utolsó költségbe annak a költségét is beleértjük, hogy a végtermék elmarad valamely „ideális” végterméktől. Legyen

$$K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) := \sum_{j=r}^{n} k_j(x_j, w_j)$$

az utolsó $n - r + 1$ lépés költsége, és

$$(r, x_r) \mapsto S_r(x_r) := \inf_{w_r, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n), \quad S_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$

az úgynevezett *Bellman-függvény*.

* **Tétel.** *Az előző pont jelöléseivel,*

(1) a Bellman-függvényre

$$S_r(x_r) = \inf_{w_r \in W_r} k_r(x_r, w_r) + S_{r+1}\big(\varphi_r(x_r, w_r)\big), \quad \textit{ha} \quad r = 1, \dots, n;$$

(2) *az x_r és $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, n$ változókra a $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = r, \dots, n$ értékekkel pontosan akkor teljesül, hogy*

$$S_r(x_r) = K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n),$$

ha

$$S_j(x_j) = k_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = r, \dots, n.$$

Bizonyítás. (1)-hez nyilván

$$K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) = k_r(x_r, w_r) + K_{r+1}\big(\varphi(x_r, w_r), w_{r+1}, \dots, w_n\big)$$

teljesül a költségekre. Mivel nyilván

$$\inf_{w_r, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) = \inf_{w_r} \inf_{w_{r+1}, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n),$$

kapjuk (1)-et.

(2)-höz tetszőleges $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, n$-re a megfelelő $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = r, \dots, n$ értékekkel

$$S_r(x_r) \le k_r(x_r, w_r) + S_{r+1}(x_{r+1}) \le \dots \le K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n).$$

Ha az adott értékekre egyenlőség áll, akkor mindenütt egyenlőségnek kell állnia, így kapjuk (2)-t.

* **Következmény: Bellman-féle optimum elv.** *A következő két állítás ekvivalens:*

(1) *az x_1 és $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$ változókra az $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = 1, \dots, n$ értékekkel*

$$S_1(x_1) = K_1(x_1, w_1, w_2, \dots, w_n);$$

(2) *az x_1 és $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$ változókra az $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = 1, \dots, n$ értékekkel*

$$S_m(x_m) = K_m(x_m, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$$

teljesül, ha $m = 1, 2, \dots, n$.

* **Bellman módszere.** Meghatározva az optimális vezérléseket az

$$S_j(x_j) = k_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1})$$

egyenletekből $j = n, n-1, \dots, 1$-re x_j függvényében, kapjuk az optimális vezérlést.

• 618/−1 :

<

megoldással.

>

megoldással.

* **Definíció:** Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátor

(1) *nemexpanxív*, ha $\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|$ minden $x, y \in \mathrm{dmn}(A)$-ra;

(2) *monoton*, ha $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $x, y \in \mathrm{dmn}(A)$-ra;

(3) *maximális monoton*, ha monoton és $\langle b - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $y \in \mathrm{dmn}(A)$ esetén $Ax = b$, azaz nincs valódi monoton kiterjesztése;

(4) *bővülő*, ha $\mathbb{I} + \mu A$ injektív, és az inverze nemexpanzív minden $\mu > 0$-ra;

(5) *maximális bővülő*, ha bővülő és $(\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$az egész H-n van értelmezve.

Vegyük észre, hogy ha A nemexpanzív, akkor $\mathbb{I} - A$ monoton, hiszen $x, y \in \mathrm{dmn}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}\big\langle (x - Ax) - (y - Ay), x - y\big\rangle &= \langle x - y, x - y\rangle - \langle Ax - Ay, x - y\rangle \\ &\geq \|x - y\|^2 - \|Ax - Ay\|\|x - y\| \geq 0.\end{aligned}$$

* **Állítás:** *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátor pontosan akkor monoton, ha bővülő.*

Bizonyítás. Nyilván

$$\big\|(x + \mu Ax) - (y + \mu Ay)\big\| = \|x - y\|^2 + 2\mu\langle Ax - Ay, x - y\rangle + \mu^2\|Ax - Ay\|^2.$$

Innen

$$\big\|(x + \mu Ax) - (y + \mu Ay)\big\| \geq \|x - y\|^2$$

minden $\mu > 0$-ra pontosan akkor teljesül, ha $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0$.

* **Állítás:** *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátorra ekvivalensek:*

(1) A monoton és $\mathrm{rng}(\mathbb{I} + A) = H$*;*

(2) A maximális bővülő;

(3) A maximális monoton.

Az, hogy (3)-ból következik (1), Minty tétele, és később bizonyítjuk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1) teljesül. A Banach-féle fixponttételt fogjuk használni. Az $R_\lambda = (\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$ operátor nemexpanzív, így elég megmutatni, hogy $\mathrm{rng}(\mathbb{I} + \mu A) = H$ minden $\mu > 0$-ra. Az $x + \mu Ax = z$, $x \in H$ egyenlet ekvivalens az $x = L_z x$, $x \in H$ egyenlettel, ahol $L_z x = R_\lambda\big((1 - \lambda/\mu)x + (\lambda/\mu)z\big)$. Ha $\mu > \lambda/2$, akkor $|1 - \lambda/\mu| < 1$ és $\|L_z x - L_z y\| \leq |1 - \lambda/\mu|\|x - y\|$ minden $x, y \in H$-ra, így pontosan egy fixpont van. Kezdve $\lambda = 1$-gyel és indukcióval folytatva $\mu > \lambda/2^n$-re kapjuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy A maximális bővülő. Ekkor A monoton. Tegyük fel, hogy $\langle b - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $y \in \mathrm{dmn}(A)$-ra. Legyen $y = y_t = (\mathbb{I} + A)^{-1}(u + b + tz)$, ha $t > 0$ és $z \in H$. Az $\langle x - y_t, x - y_t\rangle \geq 0$ egyenlőtlenséget hozzáadva a fentihez $\langle b - x - Ay_t - y_t, x - y_t\rangle \geq 0$, ahonnan $\langle zx - y_t\rangle \leq 0$. Ha $t \downarrow 0$, akkor innen $\big\langle z, x - (\mathbb{I} + A)^{-1}(b + x)\big\rangle \leq 0$ minden $z \in H$-ra, azaz $x = (\mathbb{I} + A)^{-1}(b + x)$.

* **Konvergenciatrükk maximális monotonitással:** *Legyen H valós Hilbert-tér, $A \in H \to H$ maximális monoton operátor. Ekkor ha $Ax_n \rightharpoonup b$ és $x_n \to x$ vagy $Ax_n \to b$ és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $Ax = b$.*

Bizonyítás. Mivel $\langle Ax_n - Ay, x_n - y\rangle \geq 0$, kapjuk, hogy $\langle b - Ay, x - y\rangle \geq 0$ minden $y \in \mathrm{dmn}(A)$ esetén.

* **Komura tétele:** *Legyen H valós Hilbert-tér, és tegyük fel, hogy $A \in H \to H$ monoton és $rng(\mathbb{I} + A) = H$. Ekkor minden $u_0 \in \mathrm{dmn}(A)$-ra létezik pontosan egy $u : [0, +\infty[\to H$ folytonos függvény, amelyre $u(0) = u_0$ és $u'(t) + Au(t) = 0$, ha $0 < t < +\infty$, a deriváltat gyenge értelemben értve. Továbbá erre az egyértelmű megoldásra*

(1) $u(t) \in \mathrm{dmn}(A)$, ha $t > 0$;

(2) u Lipschitz-függvény $[0, +\infty[$-en;

(3) majdnem minden $t > 0$-ra a derivált a szokásos értelemben is létezik, és teljesül a differenciálegyenlet, valamint $\big\|u'(t)\big\| \leq \|Au_0\|$;

(4) a $t \mapsto u'(t)$ függvény általánosított deriváltja a $t \mapsto u(t)$ függvénynek, és $u' : [0, +\infty[\to H$ gyengén folytonos;

(5) minden $t \geq 0$-ra létezik az $u'_+(t)$ jobb oldali derivált és $u`_+(t) + Au(t) = 0$.

A bizonyításhoz megjegyezzük, hogy az átviteli elv metrikus teret topologikus térbe képező függvény határértékére is érvényes marad.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az A-ra kirótt feltételek azzal ekvivalensek, hogy maximális monoton, illetve maximális bővülő.

Az unicitás bizonyítása nem nehéz: Legyen $u : [0, +\infty[\to H$ egy megoldás, amelyre u folytonos és u' létezik a gyenge értelemben. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big\|u(t)\big\|^2 &= \lim_{h\to 0}\frac{\big\langle u(t+h), u(t+h)\big\rangle - \big\langle u(t), u(t)\big\rangle}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, u(t) + u(t+h)\right\rangle = 2\big\langle u'(t), u(t)\big\rangle.\end{aligned}$$

Legyen v egy másik megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big\|u(t) - v(t)\big\|^2 &= 2\big\langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\big\rangle\\ &= 2\big\langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\big\rangle \leq 0,\end{aligned}$$

így $u(t) = v(t)$ minden $t \geq 0$-ra.

A létezés bizonyításának a kulcsa az $R_\mu = (\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$, $\mu > 0$ nemlineáris rezolvens használata, amely a feltételek szerint egy $H \to \operatorname{dmn}(A)$ bijektív és nemexpanzív leképezés minden $\mu > 0$-ra. Ennek segítségével képezzük a nemlineáris

$$A_\mu = \frac{1}{\mu}(\mathbb{I} - R_\mu), \quad \mu > 0$$

*Yosida-közelítés*t. A bizonyítás számos lépésből áll.

I. Megmutatjuk, hogy minden $\mu > 0$-ra és $u, v \in H$-ra $A_\mu u = AR_\mu u$, $\|A_\mu u - A_\mu v\| \leq 2\|u - v\|/\mu$, és $\langle A_\mu u - A_\mu v \rangle \geq 0$, azaz A_μ monoton és Lipschitz-függvény, továbbá minden $\mu > 0$-ra és $u \in \operatorname{dmn}(A)$-ra $R_\mu Au = A_\mu u$ és $\|A_\mu u\| \leq \|Au\|$. Valóban, $A_\mu R_\mu^{-1}[(R_\mu^{-1} - \mathbb{I})/\mu = A$ és hasonlóan $R_\mu^{-1} A_\mu = A$. Mivel R_μ nemexpanzív,

$$\|A_\mu u - A_\mu v\| = \frac{1}{\mu}\big\|(u - v) - (R_\mu u - R_\mu v)\big\| \leq \frac{2}{\mu}\|u - v\|,$$

$$\|A_\mu u\| = \frac{1}{\mu}\|u - R_\mu u\| = \frac{1}{\mu}\big\|R_\mu(\mathbb{I} - \mu A)u - R_\mu u\big\| \leq \|Au\|.$$

Mivel R_μ nemexpanzív, $\mathbb{I} - R_\mu$ monoton, és így A_μ is monoton.

II. Rögzített $T > 0$-ra az A operátorból elkészítjük az $X = \mathbb{L}^2\big[0, T]; H\big)$ tér $\tilde{A}$ operátorát az $(\tilde{A}u)(t) = Au(t)$ definícióval; az $\tilde{A}$ operátor azon u függvényekre van értelmezve, amelyekre $u(t) \in \operatorname{dmn}(A)$ majdnem minden t-re és $t \mapsto Au(t)$ az X-ben van. Megmutatjuk, hogy az $\tilde{A}$ operátor maximális bővülő. Az A monotonitásából

$$\langle \tilde{A}u - \tilde{A}v, u - v\rangle_X = \int_0^T \big\langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\big\rangle\, dt \geq 0.$$

Megmutatjuk, hogy $\operatorname{rng}(\mathbb{I} + \tilde{A}) = X$. Legyen $w \in X$ és $u(t) = (\mathbb{I} + A)^{-1} w(t)$, $v = (\mathbb{I} + A)^{-1}(0)$. Mivel $(\mathbb{I} + A)^{-1}$ nemexpanzív, $\|u(t) - v\|^2 \leq \|w(t)\|^2$. Integrálva t szerint $u - v \in X$, azaz $u \in X$.