3.2.2. Tétel. *Egy a_n komplex számsorozat pontosan akkor konvergál $\mathbb{C}$-ben, ha $\Re(a_n)$ és $\Im(a_n)$ konvergálnak $\mathbb{R}$-ben, és ha $a_n \to A$, $\Re(a_n) \to A'$, $\Im(a_n) \to A''$, akkor $A = A' + iA''$. Speciálisan, valós számsorozatokra az $\mathbb{R}$-beli és a $\mathbb{C}$-beli konvergencia és határérték egybeesik.* $\square$

3.2.3. Tétel. *Ha a_n nullsorozat, b_n pedig korlátos sorozat $\mathbb{C}$-ben, akkor a_nb_n nullsorozat.* $\square$

3.2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\overline{\mathbb{K}}$-ban $a_n \to A$ és $b_n \to B$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor*

(1) $(a_n + b_n) \to (A + B)$;

(2) $(a_nb_n) \to (AB)$;

(3) $(1/a_n) \to (1/A)$. $\square$

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon álló sorozatok esetleg véges sok helyen nincsenek értelmezve.

3.2.5. Tétel. *Egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli monoton sorozatnak létezik határértéke. Monoton növekedő sorozat határértéke az értékkészletének felső határa, monoton csökkenő sorozat határértéke az értékkészletének alsó határa.* $\square$

3.2.6. Példák. (1) Az $a_n = a_0 + nd$ *számtani sorozat* $d = 0$ esetén konstans, konvergens, határértéke a_0, korlátos, értékkészlete egyelemű; $d \neq 0$ esetén nem korlátos, divergens, értékkészlete végtelen, határértéke $\overline{\mathbb{C}}$-ben ∞. Ha a_0 és d valósak, akkor $\overline{\mathbb{R}}$-ben határértéke $d > 0$ esetén $+\infty$, ha pedig $d < 0$, akkor $-\infty$.

(2) Az $a_n = n^2$ sorozat nem korlátos, divergens, értékkészlete végtelen, határértéke $\overline{\mathbb{R}}$-ben $+\infty$.

(3) Az $a_n = 1/n$ sorozat nullsorozat (legyen $N\varepsilon > 1$), korlátos, értékkészlete végtelen.

(4) Az $a_n = 1 + (-1)^n/n$ sorozat konvergens, határértéke 1, korlátos, értékkészlete végtelen.

(5) Az $a_n = i^n$ sorozat divergens, korlátos, értékkészlete négy elemű, határértéke nincs.

3.2.7. Felső és alsó határérték. Legyen a_n egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli sorozat, és $b_n = \sup_{k\geq n} a_k$. A b_n sorozat monoton csökkenő, így létezik határértéke. Ezt az a_n sorozat *felső határértéké*nek nevezzük, és $\limsup_{n\to\infty} a_n$-el jelöljük. Tehát

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Hasonlóan, a $c_n = \inf_{k\geq n}$ sorozat monoton növekvő, így létezik határértéke; ezt az a_n sorozat *alsó határértéké*nek nevezzük, és $\liminf_{n\to\infty} a_n$-el jelöljük. Tehát

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Mivel nyilván $c_n \leq b_n$, kapjuk, hogy $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

3.2.8. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *ha* $x > \limsup_{n\to\infty} a_n$, *akkor csak véges sok olyan index van, amelyre* $a_n \ge x$;

(2) *ha* $x < \limsup_{n\to\infty} a_n$, *akkor végtelen sok olyan index van, amelyre* $a_n \ge x$;

(3) *az előző tulajdonságok jellemzik a* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *bővített valós számot, azaz ez az egyetlen bővített valós szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik;*

(4) *ha* $x < \liminf_{n\to\infty} a_n$, *akkor csak véges sok olyan index van, amelyre* $a_n \le x$;

(5) *ha* $x > \liminf_{n\to\infty} a_n$, *akkor végtelen sok olyan index van, amelyre* $a_n \le x$;

(6) *az előző tulajdonságok jellemzik a* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *bővített valós számot, azaz ez az egyetlen bővített valós szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik;*

(7) $\lim_{n\to\infty} a_n$ *pontosan akkor létezik, ha* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, *és ekkor* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Bizonyítás. Az előző definíció jelöléseit fogjuk használni. Ha (1) nem teljesülne, akkor $b_n \ge x$ lenne minden n-re. Ha (2) nem teljesülne, akkor egy indextől kezdve $b_n \le x$ teljesülne. (3) abból következik, hogy ha $A < B$, és A is, B is rendelkezne az (1) és (2) tulajdonságokkal, akkor választva egy $A < x < B$ számot ellentmondást kapnánk. (4)–(6) bizonyítása teljesen hasonló (1)–(3) bizonyításához.

Végül ha $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ létezik, akkor $x > A$ esetén (1), $x < A$ esetén pedig (2) teljesül, így $A = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Teljesen hasonlóan adódik, hogy $A = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Megfordítva, ha $A = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, akkor bármely $x > A$-ra véges sok index kivételével $a_n < x$, és bármely $y < A$-ra véges sok index kivételével $a_n > y$, így A bármely környezetében a sorozatnak véges sok kivételével minden tagja benne van. □

3.2.9. Állítás. *Ha* a_n *és* b_n *két* $\overline{\mathbb{R}}$*-beli sorozat, és véges sok tag kivételével* $a_n \le b_n$, *akkor* $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$ *és* $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$. □

3.2.10. Cauchy-sorozatok. Egy $\mathbb{K}$-beli sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n, m \ge N$, akkor $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

A fogalom jelentőségét az adja, hogy anélkül dönthetünk segítségével a konvergenciáról, hogy ismernénk a határértéket.

3.2.11. Cauchy-féle konvergenciakritérium. *Egy* $\mathbb{K}$*-beli sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha konvergens.*

* **Bizonyítás.** Az egyik irány egyszerű: ha $a_n \to A$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \ge N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon/2$, így $n, m \ge N$ esetén $|a_n - a_m| \le |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon$.

A megfordítást elég valós sorozatokra bizonyítani, mert ha a_n Cauchy-sorozat, akkor a valós és a képzetes része is. Először is vegyük észre, hogy egy Cauchy-sorozat korlátos, mert ha $n, m \ge N$ esetén $|a_n - a_m| < 1$, akkor az értékkészlete $K_1(a_N)$ és véges sok egyelemű halmaz egyesítése. Legyen $A = \limsup_{n\to\infty} a_n$. A korlátosság miatt $A \in \mathbb{R}$. Ha $x < A$, választva $\varepsilon = (A - x)/2$-höz N-et, $\sup_{k\ge N} a_k \ge A$ miatt van olyan $m \ge N$, hogy $a_m > A - \varepsilon$. Innen $n \ge N$ esetén $a_n > A - 2\varepsilon = x$. Ez azt jelenti, hogy $\liminf_{n\to\infty} a_n = A$, amiből $a_n \to A$. □

* **3.2.12. Megjegyzés.** A racionális számok körében nem minden Cauchy-sorozat konvergens. Ha veszünk egy olyan racionális számokból álló monoton növekedő sorozatot, amelynek $\mathbb{R}$-ben a határértéke $\sqrt{2}$, akkor ez Cauchy-sorozat, de $\mathbb{Q}$-ban nem konvergens.

3.2.13. Nevezetes sorozatok határértéke.

(1) *ha* $p \in \mathbb{N}^+$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} 1/n^{1/p} = 0$;

(2) *ha* $a \in \mathbb{R}^+$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(4) *ha* $a \in \mathbb{R}^+$ *és* $k \in \mathbb{N}$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} n^k/(1+a)^n = 0$;

(5) *ha* $a \in \mathbb{C}$, *akkor* $|a| < 1$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, $a = 1$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$, $|a| = 1$, $a \neq 1$ *esetén* a^n *korlátos de nem konvergens,* $|a| > 1$ *esetén* a^n *nem korlátos, így nem konvergens;*

(6) *ha* $a \in \mathbb{C}$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$.

Bizonyítás. (1) bizonyításához legyen $N > (1/\varepsilon)^p$.

Ha (2)-ben $a > 1$, akkor legyen $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Ekkor $x_n > 0$, és a binomiális tétel alapján $1 + nx_n \leq (1+x_n)^n = a$, így $0 < x_n \leq (a-1)/n$, ezért $x_n \to 0$. Az $a = 1$ eset triviális. Ha $0 < a < 1$, vegyük a reciprokát, és arra alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat.

(3) bizonyításához legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Ekkor $x_n \geq 0$, és a binomiális tétel alapján $n = (1+x_n)^n \geq n(n-1)x_n^2/2$. Ezért $0 \leq x_n \leq \sqrt{2/(n-1)}$, ha $n \geq 2$. Így (1)-ből következik az állítás.

(4) bizonyításához legyen $K = k+1$. Ha $n > 2K$, akkor

$$(1+a)^n > \binom{n}{K} a^K = \frac{n(n-1)\cdots(n-K+1)}{K!} a^K > \frac{n^K a^K}{2^K K!}.$$

Ezért

$$0 < \frac{n^k}{(1+a)^n} < \frac{2^K K!}{a^K} n^{k-K}, \quad \text{ha} \quad n > 2K.$$

Mivel $k - K = -1$, (1) alapján $n^{k-K} \to 0$.

(5)-ben az $a = 0$ és $a = 1$ esetek triviálisak. A $0 < |a| < 1$ esetben $|a| = 1/(1+b)$ valamely $b > 0$-ra, így (4)-ből $k = 0$ választással következik, hogy $|a|^n$ és így a^n is nullsorozat. Ha $|a| > 1$, akkor a^n nem lehet korlátos, mert akkor $1/|a|^n \geq \varepsilon$ lenne valamely $\varepsilon > 0$-ra. Végül ha $|a| = 1$, $a \neq 1$, akkor $|a^n| = 1$ de

$$|a^{n+1} - a^n| = |a^{n+1} - a^n|/|a|^n = |a-1|,$$

így a^n nem Cauchy-sorozat.

(6) bizonyításához legyen $N = \lfloor |a| \rfloor + 1$. Ekkor $|a|/n < 1$, ha $n \geq N$, és így

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a|}{k} \leq \frac{|a|}{n} \prod_{k=1}^{N} \frac{|a|}{k} = \frac{|a|^{N+1}}{N!} \frac{1}{n},$$

ha $n > N$, ahonnan következik, hogy a sorozat nullsorozat. □

3.2.14. Sorok. Ha $a_0, a_1, \ldots$ egy $\mathbb{K}$-beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vagy $\sum a_n$ *végtelen sort* vagy röviden *sort* az $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *részletösszegek* sorozatával azonosítjuk. Az a_n számot a sor n-edik *tagjának* nevezzük. A sor tagjait rendszerint nullától indexeljük, mert a sorok szorzásánál ez a célszerű. A részletösszegekből visszakaphatjuk a sor tagjait, hiszen $a_0 = s_0$ és $a_n = s_n - s_{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, és *összege* A, ha az s_n részletösszegek sorozata A-hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Ha a sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. Ha $\overline{\mathbb{R}}$-ban $s_n \to +\infty$ illetve $s_n \to -\infty$, akkor azt írjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ illetve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$, de ilyenkor a sort nem nevezzük konvergensnek. Hasonlóan, ha $\overline{\mathbb{C}}$-ban $s_n \to \infty$, akkor azt írjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, de ilyenkor a sort nem nevezzük konvergensnek. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens. Konvergens, de nem abszolút konvergens sort *feltételesen konvergens*nek nevezünk.

A sorozatokra vonatkozó legtöbb tétel egyszerűen átfogalmazhatók sorokra. Például a sorozatok összegére és konstansszorosára vonatkozó tétel, illetve a Cauchy-féle konvergenciakritérium az alábbi alakba írható át:

3.2.15. Tétel. *Legyen $c \in \mathbb{K}$, a $\mathbb{K}$-beli $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorokra $\sum a_n = A \in \overline{\mathbb{K}}$ és $\sum b_n = B \in \overline{\mathbb{K}}$. Ha $A + B$ definiálva van, akkor $\sum (a_n + b_n) = A + B$, és ha cA definiálva van, akkor $\sum (ca_n) = cA$.*

Bizonyítás. A részletösszegek felhasználásával azonnal következik. □

3.2.16. Cauchy-féle konvergenciakritérium. *A $\mathbb{K}$-beli $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergál, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $m \geq n \geq N$ esetén $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.* □

3.2.17. Következmény. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $m = n$. □

3.2.18. Állítás. *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergál, ha részletösszegei korlátos sorozatot alkotnak.*

Bizonyítás. A monoton sorozatokra vonatkozó tételből kapjuk. □

3.2.19. Összehasonlító kritérium. *Ha véges sok n kivételével $|a_n| \leq b_n$, és $\sum b_n$ konvergál, akkor $\sum a_n$ is.*

Bizonyítás. A Cauchy-kritériumból minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy $m \geq n \geq N$ esetén $|a_n| \leq b_n$ és $\sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$. Innen $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$, és így az állítás következik a Cauchy-kritériumból. □

3.2.20. Következmény. *Ha véges sok n kivételével $b_n \geq a_n \geq 0$, és $\sum a_n$ divergál, akkor $\sum b_n$ is.*

Bizonyítás. Ha $\sum b_n$ konvergálna, akkor $\sum a_n$ is. □

3.2.21. Következmény. *Abszolút konvergens sor konvergens is.*

Bizonyítás. Legyen $b_n = |a_n|$. □

3.2.22. Következmény. *Tegyük fel, hogy $a_n, b_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. Ekkor*

(1) *ha $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c > 0$, akkor $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum b_n$ konvergens;*

(2) *ha $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is.*

Bizonyítás. Az első esetben véges sok n kivételével $cb_n/2 \le a_n \le 2cb_n$. A második esetben akármilyen $c > 0$-ra véges sok n kivételével $a_n \le cb_n$. $\square$

3.2.23. Leibniz-kritérium. *Ha a pozitív tagú a_n sorozat monoton csökkenően nullához tart, akkor $\sum_n (-1)^n a_n$ konvergens, és ha s_n a sor n-edik részletösszege, s pedig az összege, akkor $|s - s_n| \le a_{n+1}$ minden n-re.*

Bizonyítás. Az $m > 0$ esetén teljesülő

$$|s_{n+m} - s_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \le a_{n+1}$$

becslés alapján a Cauchy-kritériumból következik a konvergencia, és $m \to \infty$ határátmenettel, hogy $|s - s_n| \le a_{n+1}$. $\square$

3.2.24. Néhány nevezetes sor.

(1) *A* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ végtelen mértani sor $|a| < 1$ *esetén konvergens, összege* $1/(1-a)$, *míg* $|a| \ge 1$ *esetén divergens;*

(2) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ harmónikus sor *divergens;*

(3) *A $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Bizonyítás. Ha $|a| \ge 1$, akkor a^n nem tart nullához. Indukcióval $\sum_{k=0}^{n} a^k = (1 - a^{n+1})/(1-a)$, ha $n \in \mathbb{N}$, ahonnan következik (1) másik része.

(2) abból következik, hogy az $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ részletösszegekre

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k \ge \sum_{k=n+1}^{2n} 1/(2n) = 1/2.$$

Innen m szerinti teljes indukcióval $s_{2^m} \ge (m+1)/2$, azaz a részletösszegek sorozata nem korlátos.

Az, hogy a (3)-ban szereplő sor konvergens, következik a Leibniz-kritériumból, az pedig, hogy nem abszolút konvergens, következik (2)-ből. $\square$

3.2.25. Cauchy-féle gyökkritérium. *Egy $\mathbb{K}$-beli $\sum a_n$ sor, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

akkor konvergens, ha

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

akkor divergens.

Bizonyítás. Ha $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $\alpha < 1$, akkor $\alpha < \beta < 1$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \ge N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \le \beta$, azaz $|a_n| \le \beta^n$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\alpha > 1$, akkor $\alpha > \beta > 1$ esetén végtelen sok n-re $|a_n| \ge \beta^n > 1$, így a_n nem tart nullához. $\square$

3.2.26. D'Alambert-féle hányadoskritérium. *Egy $\mathbb{K}$-beli, nem nulla tagokból álló $\sum a_n$ sorra, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

akkor konvergens, ha

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

vagy ha véges sok n kivételével $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$, akkor divergens.

Bizonyítás. Ha $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, akkor van olyan $\beta < 1$ szám és $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \beta$. Innen indukcióval $|a_n| \leq |a_N|\beta^{n-N}$, ha $n \geq N$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$. Innen indukcióval $|a_n| \geq |a_N|$, ha $n \geq N$, így a_n nem tart nullához. □

3.2.27. Sorok szorzata. A $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *Cauchy-szorzat*án vagy röviden *szorzat*án a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor értjük, ahol $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, ha $n = 0, 1, \ldots$.

Hogy miért így célszerű sorok szorzatát definiálni, az a hatványsoroknál válik világossá.

3.2.28. Kettős sor tétel. *Legyen $a_{j,k} \in \mathbb{K}$, ha $j, k \in \mathbb{N}$. Ha*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| < +\infty \tag{1}$$

vagy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k}| < +\infty, \tag{2}$$

akkor az alábbi sorok abszolút konvergensek és

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}. \tag{3}$$

* **Bizonyítás.** Akár (1), akár (2) teljesül, van olyan K valós szám, hogy

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} |a_{j,k}| \leq K$$

minden $n, m \in \mathbb{N}$-re. Csak ezt fogjuk használni. Rögzített m-re $n \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, ahonnan $m \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, azaz (1) teljesül, és (3)-ban a bal oldalon szereplő sorok abszolút konvergensek. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy (2) is teljesül, így (1) és (2) ekvivalensek, és (3)-ban a jobb oldalon szereplő sorok is abszolút konvergensek. Feltéve, hogy K a lehető legkisebb, tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra elég nagy m-re és n-re $\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}|a_{j,k}| \geq K - \varepsilon$. Ha most $n' > n$, akkor

$$\Big|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n'} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon,$$

amiből $n' \to \infty$ határátmenettel

$$\Big|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\Big| \leq 2\varepsilon.$$

Ha most $n \to \infty$, majd $m \to \infty$, akkor kapjuk a tétel állítását. □

3.2.29. Következmény: sorok átrendezése. *Ha $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy permutáció (azaz bijekció), és a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, összege A, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege A.*

A következmény alapján ha M megszámlálható végtelen halmaz, $a_m \in \mathbb{K}$, ha $m \in M$, és van olyan K valós szám, hogy bármely véges $M' \subset M$-re $\sum_{m\in M'}|a_m| \leq K$, akkor bármely $p : \mathbb{N} \to M$ bijekcióra a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ összeg ugyanaz. Jelölése: $\sum_{m\in M} a_m$.

Bizonyítás. Legyen $a_{j,k} = a_j$, ha $k = p_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt. □

3.2.30. Következmény: sorok átzárójelezése. *Ha a K megszámlálható halmaz a K_j, $j \in J$ diszjunkt halmazok megszámlálható uniója, $a_k \in \mathbb{K}$, ha $k \in K$, és $\sum_{k\in K}|a_k| < \infty$, akkor*

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K_j} a_k.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $K, J \subset \mathbb{N}$. Legyen $a_{j,k} = a_k$, ha $k \in K_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt. □

* **3.2.31. Riemann átrendezési tétele.** *Ha a $\sum a_n$ valós számsor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leq \beta$ esetén van a sornak olyan $\sum b_n$ átrendezése amelynek $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ részletösszegeire $\liminf_{n\to\infty} s_n = \alpha$ és $\limsup_{n\to\infty} s_n = \beta$.*

Bizonyítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, 0\}$ illetve $\sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, 0\}$ sorok mindketten divergensek: ha csak az egyik lenne konvergens, akkor összegük, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens lenne, ha pedig mindkettő konvergens lenne, akkor különbségük, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor is konvergens lenne. Válasszunk olyan, monoton csökkenő α_n illetve monoton növekedő β_n valós számsorozatokat, amelyekre $\alpha_n \leq \beta_n$ minden n-re, és $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Első lépésként tekintsük a negatív a_n-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_0, b_1, \dots, b_{n_1}$ — addig, amíg $m_1 = n_1$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_1} b_j$ kisebb nem lesz, mint α_1. Második lépésként tekintsük a nemnegatív a_n-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_1+1}, b_{m_1+2}, \dots, b_{m_1+p_1}$ — addig, amíg $m_2 = m_1 + p_1$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_2} b_j$ nagyobb nem lesz, mint β_1. Így folytatjuk, felváltva választva negatív, majd nemnegatív tagokat: ha $b_0, b_1, \dots, b_{m_{2k}}$ már ki van választva, és eddig a_{n_k} az utolsó felhasznált negatív tag, akkor tekintsük az n_k-nál nagyobb indexű negatív a_n-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_{2k}+1}, b_{m_{2k}+2}, \dots, b_{m_{2k}+n_{k+1}}$ — addig, amíg $m_{2k+1} = m_{2k} + n_{k+1}$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_{2k+1}} b_j$ kisebb nem lesz, mint α_{k+1}, majd tekintsük a p_k-nál nagyobb indexű nemnegatív a_n-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_{2k+1}+1}, b_{m_{2k+1}+2}, \dots, b_{m_{2k+1}+p_{k+1}}$ — addig, amíg $m_{2k+2} = m_{2k+1} + p_{k+1}$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_{2k+2}} b_j$ nagyobb nem lesz, mint β_{k+1}. Mivel $n_1 < n_2 < \dots$ és $p_1 < p_2 < \dots$, minden a_n-et felhasználtunk, tehát b_n az a_n átrendezése. Mivel $s_{m_{2k}} > \beta_k$, de $m_{2k} \leq j < m_{2k+2}$ esetén $s_j \leq \beta_{k+1} + a_{m_{2k}}$, azt kapjuk, hogy

$$\beta = \limsup_{k\to\infty} \beta_k \leq \limsup_{j\to\infty} s_j \leq \limsup_{k\to\infty} \beta_{k+1} + \limsup_{k\to\infty} a_{m_{2k}} = \beta.$$

Hasonlóan adódik, hogy $\liminf_{n\to\infty} s_n = \alpha$. □

3.2.32. Tétel. *Ha a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok abszolút konvergensek, összegük A illetve B, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ szorzatuk is abszolút konvergens, és összege AB.*

* **Bizonyítás.** Alkalmazzuk a kettős sor tételt $a_{j,k} = a_j b_{k-j}$, ha $j \leq k$ és $a_{j,k} = 0$ egyébként választással. □

3.2.33. Abel folytonossági tétele. *Ha a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege A, akkor $\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A$.*

* **Bizonyítás.** Mivel a_0 helyettesíthető $a_0 - A$-val, feltehetjük, hogy $A = 0$. Mivel $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nullához tart, korlátos is valamely K korláttal. Tetszőleges $0 < t < 1$ mellett

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k,$$

mert a szereplő sorok abszolút konvergensek, így beszorzás után a jobb oldali sor átrendezhető és átzárójelezhető, és a bal oldalit adja. Legyen $\varepsilon > 0$, és legyen N-re $|s_n| < \varepsilon/2$, ha $n \geq N$. Ekkor

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\Big| &\leq (1-t)\Big(\sum_{k=0}^{N-1} |s_k t^k| + \sum_{k=N}^{\infty} |s_k t^k|\Big)\\ &< (1-t)KN + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Innen következik az állítás. □

3.2.34. Következmény: Abel tétele. *Ha a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok, valamint a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Cauchy-szorzatuk is konvergens, az összegek rendre A, B illetve C, akkor $C = AB$.*

* **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy a binomiális tétel szerint minden $0 < t < 1$-re

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

majd alkalmazzuk Abel folytonossági tételét. □

3.2.35. Számrendszerek. *Legyen $q > 1$ természetes szám, és legyen $A \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{Z}$ és olyan $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $k = n, n+1, n+2, \ldots$ sorozat, amelyre $a_n \neq 0$ és*

(1)
$$A = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{q^k}.$$

Ha az előállítás választható végesnek is, azaz

(2)
$$A = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{q^k}$$

alakúnak, ahol $a_m \neq 0$, akkor nem egyértelmű, de csak egy másik előállítás létezik, ez

$$A = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{a_k}{q^k} + \frac{a_m - 1}{q^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k},$$

egyébként n és az $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ jegyek egyértelműek.

Nyilván 0 is előállítható (1) alakban, lényegében egyértelműen: n tetszőleges és $a_k = 0$ minden $k \geq n$-re.

* **Bizonyítás.** Legyen n az a legkisebb egész szám, amelyre $1/q^n \leq A$. Mivel n a legkisebb, $1/q^n \leq A < 1/q^{n-1} = q/q^n$, azaz $1 \leq q^n A < q$. Legyen $a_n = \lfloor q^n A \rfloor$. Ekkor $a_n \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, $0 \leq q^n A - a_n < 1$, azaz $A_n = A - a_n/q^n$ jelöléssel $A = a_n/q^n + A_n$ és $0 \leq A_n < 1/q^n$. Tegyük fel, hogy indukcióval $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ és $0 \leq A_k < 1/q^k$, $k = n, n+1, \ldots, m$ már definiálva van úgy, hogy $A = A_m + \sum_{k=n}^{m} a_k/q^k$. Ekkor $0 \leq q^{m+1} A_m < q$, és ha $a_{m+1} = \lfloor q^{m+1} A_m \rfloor$, $A_{m+1} = A_m - a_{m+1}/q^{m+1}$, akkor $0 \leq A_{m+1} < q^{m+1}$ és $A = A_{m+1} + \sum_{k=n}^{m+1} a_k/q^k$. Mivel $\lim_{m\to\infty} A_m = 0$, azt kapjuk, hogy $A = \sum_{k=n}^{\infty} a_k/q^k$.

Az egyértelműség bizonyításához először is vegyük észre, hogy ha (2) fennáll, akkor (3) is. Legyen $A \in \mathbb{R}^+$, és tegyük fel, hogy $A = \sum_{k=n}^{\infty} a_k/q^k = \sum_{k=n'}^{\infty} a'_k/q^k$, ahol $a_n \neq 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, ha $k = n, n+1, \ldots$ és $a'_{n'} \neq 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, ha $k = n', n'+1, \ldots$. Feltehetjük, hogy $n \leq n'$. Legyen $a'_k = 0$, ha $n \leq k < n'$, és írjuk a második előállítást $A = \sum_{k=n}^{\infty} a'_k/q^k$ alakba. Legyen m a legkisebb olyan index, amelyre $a_m \neq a'_m$. Feltehetjük, hogy $a_m > a'_m$. A két előállítást kivonva egymásból,

$$\frac{a_m - a'_m}{q^m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a'_k - a_k}{q^k} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k} = \frac{q-1}{q^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^m}.$$

Innen $a'_m = a_m - 1$ és az egyenlőtlenség egyenlőség, amiből $a'_k = q-1$ és $a_k = 0$ minden $k > m$-re. $\square$

* **3.2.36. Következmény.** *A $\wp(\mathbb{N})$ halmaz és $]0,1]$ ekvivalensek.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$-re $\wp(\mathbb{N})$-nak megszámlálható sok olyan A eleme van, amelyre $\natural(A) \leq n$. Így $\mathbb{N}$ összes véges részhalmazainak $\mathcal{F}$ halmaza megszámlálható. Ha $A \subset \mathbb{N}$, jelölje χ_A az A halmaz $\mathbb{N}$-en értelmezett karakterisztikus függvényét. Az

$$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_A(k)}{2^{k+1}}$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}$ halmazt, azaz $\mathbb{N}$ összes végtelen részhalmazait $]0,1]$-re. Így $]0,1] \sim \wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F} \sim \wp(\mathbb{N})$. $\square$

3.2.37. Következmény. *Ha $\mathbb{R}$ egy részhalmazának van belső pontja, akkor nem lehet megszámlálható.*

* **Bizonyítás.** Ha az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van belső pontja, akkor tartalmaz egy $]a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ intervallumot, ez viszont ekvivalens $]0,1]$-el. Így az előző tétel szerint $]a,b]$ nem megszámlálható. Innen A sem lehet megszámlálható, mert megszámlálható halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható. $\square$

* **3.2.38. Végtelen szorzatok.** Ha $a_0, a_1, \ldots$ egy $\mathbb{K}$-beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}$-beli $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ vagy $\prod a_n$ *végtelen szorzat*ot a $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *részletszorzat*ok sorozatával azonosítjuk. Az a_n számot a sor n-edik *tényező*jének nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ szorzat konvergens, és értéke A, ha a p_n részletszorzatok sorozata A-hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Ha a

szorzat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. Ha $\overline{\mathbb{R}}$-ban $p_n \to +\infty$ illetve $p_n \to -\infty$, akkor azt írjuk, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ illetve $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$, de ilyenkor a szorzatot nem nevezzük konvergensnek. Hasonlóan, ha $\overline{\mathbb{C}}$-ban $p_n \to \infty$, akkor azt írjuk, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, de ilyenkor a szorzatot nem nevezzük konvergensnek.

3.3. Elemi függvények

3.3.1. Hatványsorok. A polinomok általánosításai a hatványsorok. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

alakú függvénysorokat ($x, c, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{K}$) *hatványsor*nak nevezzük; $a_0, a_1, \ldots$ a hatványsor *együtthatói*, c a hatványsor *konvergenciaközéppont*ja. Az utóbbi elnevezés értelmére a következő tétel világít rá.

3.3.2. Cauchy–Hadamard-tétel. *Az előző pont jelöléseivel, legyen*

$$R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(itt $1/0 = +\infty$). Ekkor $|x-c| < R$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ abszolút konvergens, $|x-c| > R$ esetén pedig divergens.

* **Bizonyítás.** Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-c|}{R}.$$

3.3.3. Konvergenciasugár, konvergenciatartomány. Az előző pont jelöléseivel, R a hatványsor *konvergenciasugara*, $\{x \in \mathbb{K} : |x-c| < R\}$ pedig a *konvergenciatartománya*.

3.3.4. Példák. A $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ hatványsor konvergenciasugara nulla, és csak a nulla pontban konvergens. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsor konvergenciasugara 1; ha $|x| = 1$, akkor divergál, mivel az általános tag nem tart nullához. A $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ hatványsor konvergenciasugara 1; ha $x = 1$, akkor a sor divergál, ha $x = -1$, akkor konvergál, de nem abszolút konvergens. A $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ hatványsor konvergenciasugara 1; ha $|x| = 1$, akkor a sor abszolút konvergens, mivel

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \le 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{k} < 2,$$

ha $k > 1$.